

УДК 621.891

В. И. КРАВЦОВ

Национальный авиационный университет, Киев

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛЬНОГО КАНАТА С УЧЕТОМ МЕЖВИТКОВОГО ТРЕНИЯ

Исследовано пространственное деформирование стального каната с учетом трения между витками. При этом использовалась математическая модель, основанная на численном решении системы нелинейных дифференциальных уравнений методом продолжения по параметру. Метод позволяет учитывать трение, как функционально заданную нагрузку с произвольным вектором направления на любой виток стального каната. Приведены результаты численного расчета, показывающие возможности метода.

Ключевые слова: трение, численный метод, стальной канат, дифференциальные уравнения, пространственное деформирование, спираль, коэффициент трения, линии контакта.

Введение. Инженерные сооружения, использующие разнообразные канатные системы или содержащие их как основную часть, представлены на практике довольно широким спектром: в транспорте это подвесные канатные дороги, кабельные краны, шахтные подъемные машины, вантовые транспортные установки; в строительных сооружениях висячие мосты и покрытия, предохранительные сети, в морском хозяйстве – рыболовные сети и тралы, якорные системы удержания плавучих объектов; в военном деле – заградительные сети и тросовые системы сопровождения торпед. Особенно актуальным исследование работы стальных канатов является в освоении космоса – это орбитальные гантельные системы и тросовые структуры с малым коэффициентом заполнения; тросовые сети для сбора космического мусора, гибкие канатные соединения крупногабаритных космических объектов и т.п.

Стальной канат представляет собой гибкое витое изделие, состоящее из стальных проволок круглого или фасонного сечения и органического или металлического сердечника. Трение между контактирующими слоями элементов витых проволочных изделий является важным фактором, влияющим на точность определения их напряженно-деформированного состояния.

Постановка проблемы. Проблема трения между проволоками, рассматривалась многими исследователями, но она до сих пор не имеет полного законченного решения с выходом на методики практического применения. Проблемы моделирования канатных систем путем аналитического описания становятся непреодолимыми при попытке охвата всех взаимосвязей и точного учета нелинейностей, в особенности с разрывными характеристиками. При решении реальных задач это вынуждает применять более простые и, следовательно, более грубые модели, снабжая, при этом, как правило, громоздкие и давно потерявшие наглядность аналитические выкладки некорректными оценками погрешности.

Стальные канаты в агрегатном состоянии представляют собой гибкие конструкции с осложненной геометрической структурой. Сложные и тяжелые режимы их эксплуатации связаны, как правило, с необходимостью специального изучения и определения действующих на них сил, учет сильной нелинейности

разрешающих уравнений. Решение таких задач окажется возможным только современными методами численного нелинейного анализа, применение которых побуждает к выбору модификации разрешающих уравнений, которые могут обеспечить алгоритмичность и эффективность подходов, которые используются.

Анализ последних исследований и публикаций. Расчету канатов посвящены многочисленные научные работы, в которых, в основном, рассматривается их агрегатное состояние, то есть канат аппроксимируется как гибкий стержень, жесткость которого приравнивается к суммарной жесткости витков и прядей. Классический подход к математическому описанию как статики, так и динамики сложился в основном в «докомпьютерной эре» и, естественно, основывается на представлении каната в виде непрерывного, деформируемого тела. Иными словами, за основу бралась так называемая непрерывная модель. Появление ЭВМ, особенно отметившееся в последнее десятилетие увеличение объема памяти и быстродействия на несколько порядков, успехи методов численного моделирования позволили развить новый подход, использующий, в отличие от классического, дискретную модель.

Традиционные методы учёта силовых факторов в канате связаны с установлением соответствующих коэффициентов запаса, которые основываются на опыте экспериментального исследования имеющихся образцов и достигают значений от 5 до 12. Проблема трения между проволоками в кабель-канатах рассматривалась многими исследователями, но она не имеет полного законченного решения с выходом на методики практического применения [1–3]. В расчетную схему энергетического метода [4] предлагается добавить учет трения путем введения соответствующих коэффициентов в геометрические уравнения деформирования элементов. Это обеспечит предпосылку существенного повышения точности прочностных и жесткостных расчетов стальных канатов.

На основе экспериментов построена теория учета трения для определения изгибной жесткости канатов [4]. Однако в расчетную схему этой теории не заложена механика взаимодействия элементов с учетом трения, и это не позволяет определять напряженно-деформированное состояние канатов, зависящее от внутреннего трения. Проведено исследование методами теории упругости по определению смещений и дополнительных усилий, связанных с трением, в проволоках стального каната, покрытого шланговой оболочкой [3]. Однако не приведено ни методики, ни примеров практических расчетов напряженно-деформированного состояния канатов. Обобщая литературу, посвященную этой проблеме, можно сделать вывод, что в основном решаются аналитически локальные задачи. Учет трения между витками стального каната, являющегося сложной пространственной конструкцией даже в своем прямолинейном агрегатном состоянии возможен только при решении задач численными методами.

Цель работы и постановка задачи. Задача статического расчета каната реально сводится к составлению и решению системы нелинейных уравнений с большим количеством неизвестных. Традиционный путь таков: для каждого элемента составляется схема действующих сил, уравнения их проекций по осям и уравнения связей. Он довольно быстро и легко приводит к реальным результатам в случае сравнительно простых систем. Однако, при увеличении количества рассматриваемых элементов математические трудности, связанные с численным решением, быстро прогрессируют и, по этой причине считалось, что практиче-

ская ценность стандартного математического обеспечения, в смысле получения надежных результатов в обозримое счетное время, оставляет желать лучшего. Это утверждение, может быть, слишком категоричное для систем линейных уравнений, совершенно бесспорно в случае систем нелинейных уравнений. Однако в последнее время появились методы, позволяющие преодолеть эти преграды. Одним из таких является метод численного исследования пространственно искривленных гибких стержней, подробно описанный в работе [5].

Учитывая, что стальной канат формируется взаимным расположением некоторого количества цилиндрических спиралей, можно предположить, что напряженно-деформированное состояние всего каната в агрегатном состоянии зависит от напряженно-деформированного состояния одной ветви во взаимодействии с соседними витками, которое определяется в основном силами взаимного трения.

Изложение основного материала. Опишем кратко предлагаемый метод численного расчета витого элемента стального каната, математическая модель которого базируется на известных подходах Лагранжа и Эйлера, которые описывают равновесие и упругое деформирование упругого элемента, его внешнюю и внутреннюю геометрию [5]. Вводится естественный трехгранник \bar{n} , \bar{b} , $\bar{\tau}$ – с единичными ортами главной нормали и касательной; подвижный трехгранник \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} (рис. 1). Считая, что \bar{F} , \bar{M} – векторы внутренних усилий и моментов; p , q , r – кривизны относительно орт подвижного трехгранника; x , y , z – координаты независимой переменной s , сформирована система разрешающих уравнений, описывающая деформирование витого элемента, которую можно представить в виде

$$\vec{X} = \vec{f}(X, s, \lambda), \quad (1)$$

где $\vec{X}(s) = (F_u(s), F_v(s), F_w(s), p(s), q(s), r(s), \tau_x(s), \tau_y(s), \tau(s))$,

$n_x(s), n_y(s), n_z(s), b_x(s), b_y(s), b_z(s), x(s), y(s), z(s))$ – вектор состояния ($m=18$), \vec{f} – вектор-функция правых частей системы уравнений; λ – параметр интенсивности возмущения (нагружения), штрихом обозначена производная по s . Параметр λ отображает количественные характеристики задачи.

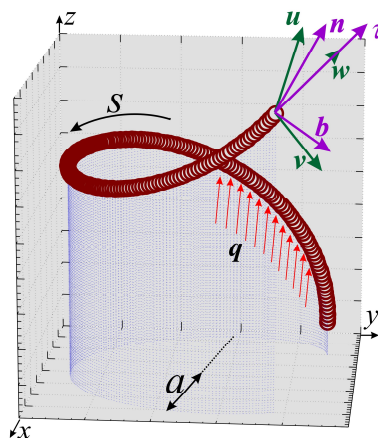


Рис. 1. Геометрия цилиндрической спирали

Сформулированная таким образом в области $0 \leq s \leq S$ изменения s система разрешающих уравнений (1) имеет общий восемнадцатый порядок. На краю $s = 0$ интервала $0 \leq s \leq S$ изменения переменной s заданы шесть независимых краевых условий $\varphi[\bar{x}(0)] = 0$ и шесть уравнений связи $\bar{\theta}[\bar{x}(0)] = 0$. Для замыкания системы уравнений достаточно на краю $s = S$ задать шесть независимых краевых условий $\bar{\psi}[\bar{x}(s)] = 0$. В сформулированных краевых уравнениях $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\psi}$ обозначают шестимерные векторы-функции. Методика решения поставленной задачи основана на совместном использовании метода продолжения по параметру и метода Ньютона-Канторовича.

Выбирая состояние $x^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}$ как порождающее, вариацией параметра λ его можно продолжить на величину $\delta x^{(n+1)}$. Практическая реализация метода осуществляется в виде программ расчета на ПЭВМ. При этом время счета в зависимости от сложности задачи не превышает 2-5 мин. для ПЭВМ с оперативной памятью 4 Гб и частотой 2800 МГц.

С помощью методики, описанной в [5], возможно исследование упругой кривой любой пространственной геометрии. Для задания геометрии осевой линии необходимо знать ее функцию и производные кривизны относительно глобальных осей. В нашем же случае геометрией пространственной кривой одного витка каната является цилиндрическая спираль. Опишем задание этой кривой для использования ее параметров в системе разрешающих уравнений.

Пусть осевая линия гибкого элемента формируется навивкой прямой с углом подъема α на цилиндрическую поверхность; $2a$ – диаметр поверхности вращения, на которую навивается кривая; h – высота спирали (см. рис. 1).

Уравнение такой кривой можно представить в виде

$$x = a \cos\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), y = a \sin\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), z = s \sin\alpha \quad (2)$$

Длина кривой определяется по формуле

$$S = \frac{2N\pi a}{\cos\alpha} \quad (3)$$

Располагая соотношениями (2), можно подсчитать параметры кривизны p_0, q_0 криволинейного элемента в недеформированном состоянии.

Примем, что в начальном состоянии направления осей подвижных трехгранников (u, v, w) и (n, b, τ) совпадают и угол $\chi = 0$. Тогда кривизна p_0 во всех точках кривой равна нулю. Кривизна q_0 определяется из известного соотношения

$$q_0 = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \quad (4)$$

Кручение r_0 подсчитывается по формуле

$$r_0 = \frac{1}{(q_0)^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{dx}{ds} = -\cos\alpha \sin\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), \quad x'' = \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\cos^2\alpha}{a} \cos\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), \\
 x''' &= \frac{d^3x}{ds^3} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} \sin\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), \quad y' = \frac{dy}{ds} = \cos\alpha \cos\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), \\
 y'' &= \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\cos^2\alpha}{a} \sin\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), \quad y''' = \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{\cos^2\alpha}{a^2} \cos\left(\frac{\cos\alpha}{a}s\right), \\
 z' &= \frac{dz}{dx} = \sin\alpha, \quad z'' = \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad z''' = \frac{d^3z}{ds^3} = 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $z''=0$ и $z'''=0$, и раскрывая определитель (5), получаем

$$r_0 = \frac{1}{(q_0)^2} \frac{dz}{ds} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{d^2y}{ds^2} \frac{d^3x}{ds^3} \right). \quad (6)$$

Из соотношений (5), (6) имеем

$$p_0 = 0, \quad q_0 = \cos^2(\alpha/a), \quad r_0 = \sin\alpha \cos(\alpha/a). \quad (7)$$

Равенства (4), (6), (7) полностью определяют геометрию гибкого элемента в виде цилиндрической спирали в недеформированном состоянии и позволяют сформулировать систему разрешающих уравнений (1) с краевыми условиями при $s=0$

$$x=a, y=0, z=0, \tau_x=0, \tau_y=\cos\alpha, \tau_z=\sin\alpha \quad (8)$$

и при $s=S$

$$x=a, y=0, z=S \sin\alpha, \tau_x=0, \tau_y=\cos\alpha, \tau_z=\sin\alpha, \quad (9)$$

где S – полная длина спирали.

Варьируя величинами a , h и α , а также начальными условиями (8), (9), можно описать необходимое пространственное положение (геометрию) криволинейного элемента в виде цилиндрической спирали.

Для установления зоны контакта витков спирали будем предполагать следующее. На рис. 2 показаны винтовые оси s_1 и s_2 двух линейно контактирующих проволок с параметрами свивки соответственно r_1, α_1 и r_2, α_2 . Диаметры проволок обозначим через δ_1 и δ_2 . Расстояние δ_{12} между точками a и b , расположенными на общей нормали к винтовым линиям, равно полусумме диаметров проволок:

$$\delta_{12} = ab = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad (10)$$

Кроме того, отрезок ab должен быть перпендикулярен касательным t_1 и t_2 к рассматриваемым винтовым линиям.

В результате условия линейного контакта рассматриваемых проволок символически запишутся так:

$$ab = \delta_{12}; \quad \delta_{12} \perp t_1; \quad \delta_{12} \perp t_2. \quad (11)$$

Введем вспомогательный угол ε_{12} , который находится из следующих соображений.

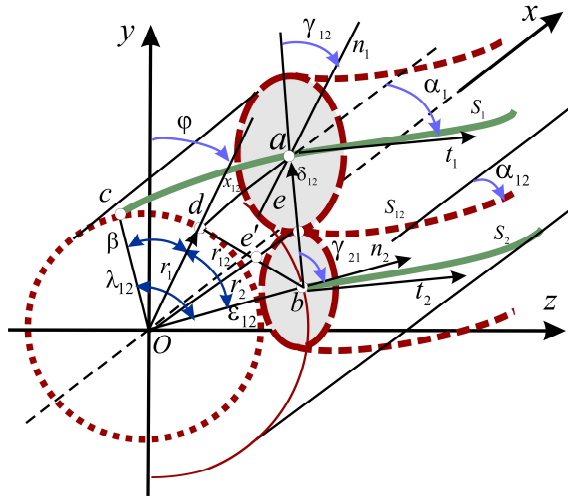


Рис. 2. Зоны контакта витков спирали

Линии s_1 и s_2 пересекают поперечное сечение каната в точках c и b , расположенных под полярным углом $\lambda_{12} = \angle cob$, который будем называть полярным углом контакта.

На практике приходится решать задачу совместного линейного контакта для трех, четырех, а иногда и большего числа проволок. Поэтому полученные уравнения удобно символически обобщать на случай контакта i -й и k -й проволок. Это дает следующий комплекс синтезирующих уравнений.

Основное уравнение контакта

$$\delta_{ik}^2 = \left(\frac{\delta_i + \delta_k}{2} \right) = \Phi_{ik}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{ik} &= x_{ik}^2 + r_i^2 + r_k^2 - 2r_i r_k \cos \varepsilon_{ik}; \\ x_{ik} &= r_i \operatorname{tg} \alpha_k \sin \varepsilon_{ik} = r_k \operatorname{tg} \alpha_i \sin \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (13)$$

В целях силового анализа контакта необходимо знать радиус r_{12} , на котором расположена линия контакта s_{12} и ее угол наклона α_{12} .

Кроме того, нас интересует направление контактной силы не только в системе координат x, y, z , но и в поперечном сечении проволок. Это направление может быть определено углами γ_{12} и γ_{21} , которые образует отрезок ab с направлениями осей n_1 и n_2 , являющимися продолжением полярных радиусов в этих точках.

Результаты исследования и их анализ. Для иллюстрации численного исследования с помощью описанного метода были приняты следующие физико-механические свойства витка каната:

$$R = 0,15 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^6 \text{ кЗ/см}^2 = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; G = 8 \cdot 10^5 \text{ кЗ/см}^2 = 7,8 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$I_x = 3126 \cdot 10^{11} \text{ м}^4; I_y = 7342 \cdot 10^{11} \text{ м}^4; I_p = 4525 \cdot 10^{11} \text{ м}^4,$$

где R – радиус спирали; E – модуль упругости; G – модуль упругости при кручении; I_x, I_y – моменты инерции; I_p – полярный момент инерции. При этом осуществлялись два вида нагружения: сосредоточенной силой, приложенной к сво-

бодному концу жестко закрепленного одним концом каната вдоль его осевой линии без пространственного изгиба; приложением моментной нагрузки к свободному концу висящего каната. Исследовано четыре шага нагружения (от нуля до некоторого значения) без учета межвиткового трения (левая часть рисунка) и с учетом межвиткового трения (правая часть рисунка). Анализ рис. 3 показывает, что превалирующее усилие в витках по длине спирали (F_v) с учетом межвиткового трения значительно ниже, чем при расчете спирали без учета межвиткового трения. На рис. 4 показан тот же процесс на двух отдельно взятых шагах нагружения с иллюстрацией характера распределения внутренних усилий на всех витках спирали.

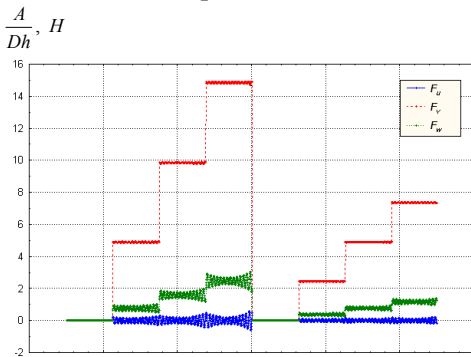


Рис. 3. Усилия в спирали по ее длине без учета трения (слева) и с учетом трения (справа) на 4-х шагах итерационного процесса

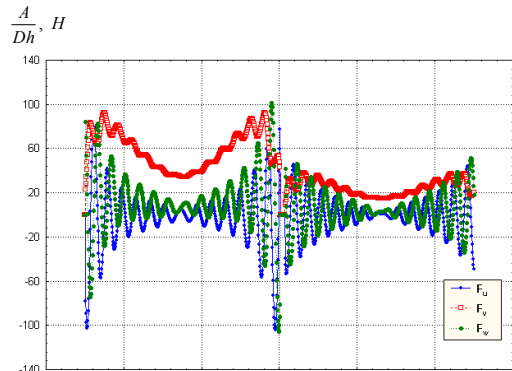
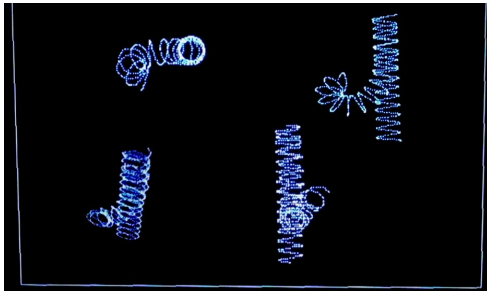


Рис.4. Усилия в отдельных витках спирали без учета трения (слева) и с учетом трения (справа)

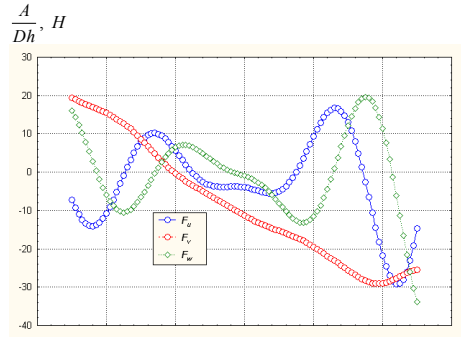
Размерности усилий на графиках показаны в безразмерных величинах как функции жесткости поперечного сечения витка спирали $A=EI$, диаметра витка D и высоты спирали h . При этом, силы трения в контактах витков спирали в режиме сухого трения (закон Кулона), направленные вдоль боковых поверхностей, находящихся в контактах сопряженных витков, рассчитывались по формуле $f_i^T = kf_i$. Здесь k – коэффициент трения в контактах витков. Следует отметить, что коэффициенты трения можно определять двумя путями. Первый – это электротензометрирование, при котором необходимо измерять (выделять) деформативную часть из общего перемещения элемента (проволоки) при нагружении каната. Этот путь требует весьма утонченных опытов. Второй – на основе анализа агрегатных деформаций, жесткостных характеристик и несущей способности канатов.

При численном расчете принимался коэффициент трения для материалов сталь-сталь равным $k=0,15$.

Возможности предлагаемого метода позволяют осуществлять алгоритмичный переход при любом изменении условий от одной задачи к другой без значительной перестройки вычислительных операций. Расчет может производиться в реальном режиме времени с отображением результатов на экране монитора. Например, на фотографии экрана монитора (рис. 5, а) показаны формы спирали в ненагруженном и нагруженном состояниях в проекциях на координатные плоскости, а также в аксонометрии (слева внизу).



а



б

Рис. 5. Визуалізація процесу деформування витка каната на екрані монітора (а) і характер внутрішніх зусиль в одному произвольно взятому витке, возникающих при этом (б)

При этом, помимо визуализации процесса деформирования, можно отслеживать в реальном времени и значения внутренних силовых факторов (рис.5, б). Анализ изменений внутренних усилий по длине одного витка (рис.5, б) свидетельствует о значительной нелинейности процесса, и понятие превалирующего усилия (в отличие от рис. 3 и рис. 4) уже отсутствует.

Выводы. Разработанный метод численного исследования пространственного деформирования стального каната с учетом межвиткового трения может быть эффективным при создании новых типов канатов. Экспериментальная проверка метода показала его эффективность и возможность решения большого класса задач в трибологии. Применяя предложенный метод, можно получать в удобном для пользователя виде необходимые параметры напряженно-деформированного состояния. При внезапном приложении нагрузки или ее снятии, потере устойчивости, изменении жесткости и т.п. можно прекратить решение и после уточнения изменяемых параметров задачи возобновить его снова, начиная с прерванного шага интегрирования. Простота использования, наглядность, скорость получения результатов делают метод удобным и эффективным для использования при прочностных расчетах стального каната.

Список литературы

1. Глушко М.Ф. Стальные подъемные канаты / М.Ф. Глушко. – Одесса: Астропринт, 2013. – 327 с.
2. Малиновский, В.А. Стальные канаты. Ч. 1: Некоторые вопросы технологии, расчета и проектирования / В.А. Малиновский. - Одесса: Астропринт, 2001. – 188 с.
3. Мамаев, Л.М. Исследование влияния оболочек покрытия на напряженное состояние кабелей управления / Л.М. Мамаев, А.М. Кабаков, А.И. Пабат // Вісн. СевНТУ. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – 2012. – Вип. 133/2012. – С. 379 – 384.
4. Чаюн, И.М. Несущая способность подъемных канатов и лент: монография / И.М. Чаюн. – Одесса: Астропринт, 2003. – 233 с.
5. Кравцов В.И. Механика гибких морских конструкций / В.И. Кравцов. – Киев: Наукова думка, 1999. – 132с.

V. I. KRAVTSOV

METHOD OF NUMERICAL STUDY OF THE SPATIAL DEFORMATION OF A STEEL ROPE WITH A GIVEN INTER-TURN FRICTION

Investigated the spatial deformation of the steel rope with the account of friction between the turns. Steel ropes in the aggregate as are a flexible design with a complex geometrical structure, therefore, used a mathematical model based on the numerical solution of system of non-linear differential equations describing the elastic deformation of the flexible spatially curved rods. The solution of equations based on joint application a method of continuation on a parameter, and the method of Newton-Kantorovich. Application of the method described allows to investigate the spatial deformation of the steel rope with consideration of friction, as a functionally specified loading with an arbitrary vector of magnitude and direction for every coil of wire rope. In this case the output parameters of the task can be numeric and graphic values of all internal forces and bending moments as in a state of aggregation of the rope, and in its separate branches. Presented numerical results showing the capabilities of the method.

Keywords: friction, numerical method, steel rope, differential equations, spatial deformation, the spiral, the coefficient of friction, the line of contact.

V. I. КРАВЦОВ

МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВОГО ДЕФОРМУВАННЯ СТАЛЕВОГО КАНАТА З УРАХУВАННЯМ МЕЖВИТКОВОГО ТЕРТЯ

Досліджено просторове деформування сталевий канат з урахуванням тертя між витками. При цьому використовувалася математична модель, що заснована на чисельному розв'язанні системи нелінійних рівнянь методом продовження по параметру. Метод дозволяє враховувати тертя як функціонально задане навантаження з довільним вектором напрямку на будь-якому витку сталевий канату. Наведено результати чисельного розрахунку, що показують можливості методу.

Ключові слова: тертя, чисельний метод, сталевий канат, диференціальні рівняння, просторове деформування, спіраль, коефіцієнт тертя, лінії контакту.

Кравцов Віктор Іванович – доктор техн. наук, професор, професор кафедри машинознавства Національного авіаційного університету. Напрям наукової діяльності – нелінійна механіка у прикладних задачах машинознавства.