

УДК 621.891

В. И. КРАВЦОВ¹, Я. В. КРАСИЛЬЧУК¹, А. Н. НЕДБАЙЛО²¹Национальный авиационный университет, Киев²Херсонский национальный технический университет, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ ТРИБОЛОГИИ

Показаны возможности метода численного решения дифференциальных уравнений высокого порядка в задачах трибологии. Метод основан на численном решении системы дифференциальных уравнений высокого порядка, описывающей пространственное нелинейное деформирование упругого элемента произвольной кривизны при произвольном векторе действующих статических или квазистатических нагрузжений как силового, так и гидравлического или инерционного характера. Для иллюстрации метода приведены примеры решения характерных трибологических задач, в частности деформирования опорной поверхности узла трения, деформирования шероховатостей поверхности и др. Описанные алгоритмы позволяют, в отличие от ранее известных, решать принципиально новые типы задач упругого деформирования элементов трибоспряжения, унифицировать типы конструкций, которые исследуются, эффективно переходить от одной расчетной схемы к другой в зависимости от физико-геометрических параметров и условий нагрузки, получать выходные данные в удобном для пользователя виде.

Ключевые слова: трение, численный метод, опорная поверхность, дифференциальные уравнения, пространственное деформирование, линии контакта, нелинейность.

Введение. Общеизвестно, что узлы трения являются слабым и в то же время ответственным звеном практически любой современной машины. Долговечность трущихся соединений лимитирует срок службы машин, а их безотказность определяет технико-экономическую эффективность, а иногда и безопасность эксплуатации машин [1]. Поэтому методам оценки фактического состояния деталей трущихся соединений и прогнозирования их ресурсных характеристик с целью предотвращения аварийных отказов ответственных узлов и механизмов традиционно в трибологии уделяется повышенное внимание. В настоящее время известны экспериментальные данные о периодических изменениях ряда физико-механических свойств поверхностных слоев при трении: микротвердости, плотности дислокаций, контактной жесткости, шероховатости, концентрации химических компонентов, остаточных напряжений и др. Несмотря на высокую научную ценность данных исследований, позволяющих глубже понять физические механизмы изнашивания, получить с их помощью математическое описание кинетики деградации материала поверхностного слоя пока не удалось [1].

Методы механики деформируемого тела являются мощным средством исследования проблем трибологии. Решения задач механики контактного взаимодействия с учетом таких специфических свойств фрикционного контакта, как поверхностная микро- и макроструктура, трение и адгезия, тепловыделение при трении и т. д., позволяют рассчитать напряжения и температуры в области контакта, а также в тонких поверхностных слоях, что очень важно с точки зрения прогнозирования характера их разрушения при трении (изнашивания). Знание

предельных допустимых значений напряжений, оптимальных величин коэффициента трения и других характеристик процессов трения и изнашивания позволяет также ставить обратные задачи механики контактного взаимодействия и разрушения, решения которых могут быть использованы для управления процессами трения и изнашивания различных трибосопряжений [2].

Перечисленные проблемы, возникающие при рассмотрении процессов контактирования твердых деформируемых тел, объясняют тот факт, что до развития современных численных методов, ориентированных на применение ЭВМ, решены были только отдельные частные задачи о контактировании тел правильной геометрической формы друг с другом или с полупространством. Такие решения признаны классическими и основаны иногда на столь существенных допущениях, реализовать которые не всегда удается даже в лабораторных условиях. Несомненным преимуществом классических решений является простота зависимостей для основных параметров контактного взаимодействия. Известны попытки аналитического решения задач о контактировании реальных деталей машин, однако все такие решения получены для частных, относительно простых случаев, причем решение каждой конкретной задачи сопряжено с большими, а порой и непреодолимыми трудностями математического характера [3]. Поэтому в инженерной практике распространение получила лишь малая часть аналитических решений, наиболее просто реализуемых [4].

Сжатые сроки разработки новых или исследования существующих машин и их высокий уровень технической сложности могут серьезно затруднить проведение физических испытаний. Такие физические эксперименты могут быть затруднены или невозможны в силу целого ряда причин. Образцы могут быть очень дороги или недоступны для испытаний. В таких случаях эти испытания проводятся на аналогах таких машин, например на макетах, или каких-нибудь других физических моделях этих устройств. В настоящее время наилучшим решением предполагается создание математической компьютерной модели испытываемого устройства.

Использование виртуальной компьютерной модели прототипа позволяет начать процесс испытаний и оптимизации конструкции еще не существующего продукта, на самых ранних стадиях его разработки. Фактически, требуется продолжить работу по информационным системам в области трибологии на новом уровне развития аппаратных, программных средств и систем коммуникации с учетом имеющегося опыта и проделанной работы специалистов.

При компьютерном моделировании процессов трения имеется общая проблема интерпретации результатов. Как известно, визуализация информации позволяет интенсифицировать процесс познания человека, подключив интуитивные способности исследователя. Это достигается с помощью специальных средств компьютерной графики. Применение технологии виртуально-интуитивного извлечения информации позволит при моделировании и эксперименте более эффективно выявлять новые трибологические эффекты и явления.

Кроме того, при использовании численных методов можно определить НДС при контактировании тел практически любых форм как при статическом, так и при динамическом нагружении. Можно моделировать сложные процессы деформирования и проскальзывания в различных точках области контакта. Быстрый рост производительности современных ЭВМ и возможностей программного обеспечения позволяет надеяться, что решение контактных задач практически для лю-

бых условий нагружения деталей любых форм будет осуществляться за приемлемое время, а программы их решения будут использоваться как составные части программных комплексов по расчету надежности деталей и узлов машин.

Анализ последних исследований и публикаций. В настоящее время достаточно хорошо разработаны итерационные методы решения нелинейных систем уравнений как некоторой сходящейся последовательности линейных задач. Сходящимся можно считать метод последовательных нагружений: нагрузка прикладывается не вся сразу, а по малым шагам. На каждом уровне нагружения с использованием итерационной процедуры определяется такое состояние объекта, при котором удовлетворены все уравнения и граничные условия. Фактически моделируется реальный процесс нагружения и найденное состояние на каждом шаге можно рассматривать как решение задачи при данном уровне нагрузки. Но для обеспечения сходимости шаги догружения должны быть достаточно малыми, поэтому трудоемкость решения сравнительно велика. Такой метод вполне оправдан, если необходимо знать НДС не только при максимальных нагрузках, но и на промежуточных этапах нагружения, и незаменим, когда результат зависит от истории нагружения.

Методами расчетов узлов трения занимаются многие научные школы. Подшипник скольжения (ПС) – это классический узел трения, требующий изучения с позиций различных научных направлений: механики жидкости и газа; исследований напряженно-деформированного состояния (НДС), усталостной долговечности, всего комплекса трибологических исследований. Активизировались эти исследования А. Г. Кузьменко [5], он положил начало многим направлениям исследования узлов ПС, развитие которых продолжается и сейчас. А. Г. Кузьменко построил методику приближенных расчетов давлений и напряжений в соединениях типа «вал-втулка» при сухом и граничном трении. Формулы для вычисления давлений были получены с использованием гипотезы обобщенного винклеровского основания, напряжения определялись методом тригонометрических рядов. Группой исследователей под руководством А. Г. Кузьменко развивались методики расчета НДС в деталях машин с применением метода конечных элементов (МКЭ). Причем большое внимание уделялось решению нелинейных задач. При появлении нелинейных составляющих в разрешающих уравнениях обычно организуют итерационные процедуры, представляющие собой рекуррентные последовательности линейных решений. Важно обеспечить сходимость таких процедур. Предпринимались попытки использовать итерационные процедуры, применяемые в теории пластичности и получившие названия «метод дополнительных напряжений» (МДН) и «метод дополнительных деформаций» (МДД). Опыт решения практических задач показал, что для различных типов нелинейных характеристик должны применяться различные схемы итерационных процедур.

Цель работы и постановка задачи. Первичной проблемой при изучении трения является контактирование соприкасающихся поверхностей. В понятие контактирования входит взаимодействие поверхностей, принадлежащих твердым телам, под действием относительного смещения и сжимающих сил с учетом их отклонения от идеальной формы и влияния среды (газы и смазочные материалы), присутствующей в зоне контакта [6]. Отклонениями от идеальной формы, которые считаются макроскопическими, являются неплоскостность, изверну-

тость, волнистость и т. п. Они обычно имеют масштаб, измеряемый в диапазоне $10^{-3} \div 10^{-4}$ м. Макроскопические неровности несут на себе микронеровности, измеряемые на уровне $10^{-5} \div 10^{-6}$ м. В свою очередь микронеровности имеют субшероховатость порядка молекулярных размеров. В основе представлений о фрикционном взаимодействии шероховатых поверхностей лежит понятие о площади соприкосновения трущихся тел. При случайном расположении шероховатостей на поверхностях контактирующих тел контактное сближение этих тел под действием внешней нагрузки лимитирует фактическая площадь соприкосновения, определяемая геометрией контактирующих поверхностей. В данной статье поставлена цель обобщить возможности метода вычислительной реализации математической модели упругого деформирования криволинейных пространственных элементов трибосопряжений и построение на их основе высокоточных динамических компьютерных моделей узлов трения машин и агрегатов, допускающих множественные контакты с изменяющимися в процессе трения геометрией опорных поверхностей и вектором действующих сил.

Метод решения. Для решения большого разнообразия трибологических задач предлагается метод, основанный на решении обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (до двадцати трех), которые могут описывать нелинейное пространственное деформирование упругого твердого тела, определять потерю устойчивости физического процесса, строить равновесные состояния после бифуркационной потери стойкости. При этом может быть приложен произвольный вектор статических или квазистатических сосредоточенных, распределенных или моментных нагрузок, которые как угодно могут быть расположены постоянно или дискретно в плоскости или в пространстве. Кроме того, действие этих сил может быть приложено или снято в процессе деформирования. В качестве результата могут быть получены характеристики напряженно-деформированного состояния микронеровностей, их влияние на процесс трения и изнашивание объекта. Геометрическая форма контактирующих поверхностей может быть задана или аналитически, или с помощью численной функции, которая определяется вычислительными методами.

Подробно метод описан в [7]. Кратко опишем предлагаемый метод. Математическая модель базируется на известных подходах Лагранжа и Эйлера, которые описывают равновесие и упругое деформирование упругого элемента, его внешнюю и внутреннюю геометрию. На основании этих предпосылок сформирована система разрешающих уравнений 18 порядка, которые в общем случае нелинейны, описывающие пространственное деформирование элемента. Методика численного решения системы уравнений основана на совместном использовании метода продолжения по параметру и метода Ньютона-Канторовича. Практическая реализация метода осуществляется в виде программ расчета на ПЭВМ. При этом время счета в зависимости от сложности задачи не превышает 2-5 мин. для ПЭВМ с оперативной памятью 4 Гб и частотой 2800 МГц. Для верификации метода проведен ряд экспериментов, показывающий высокое совпадение результатов численного расчета и эксперимента. Практическое использование вычислительного алгоритма установило ряд преимуществ по сравнению с известными средствами реализации других методов аналогичного назначения. К ним можно отнести высокую скорость сходимости численных решений в соединении с быстродействующими алгоритмами решения систем уравнений, которые позволяют решать принципиально новые задачи и значительно сокращать

время расчетов, а также повышать эффективность использования ЭВМ.

Для исследования опорных поверхностей трибоспряжений необходимо в первую очередь получить геометрию объекта в агрегатном или в локальном состоянии. Если считать, что в начальном состоянии исследуемый элемент находится в равновесии, то вследствие приложения нагрузок он деформируется, принимая пространственную форму продольной оси, которая значительно отличается от первичной. При этом как начальная, так и деформированная геометрия продольной оси элемента может значительно отличаться от предполагаемой окружности, то есть – это еще не эллипс, но уже и не окружность. Таким образом, опорную поверхность можно рассматривать как деформированное, геометрически нелинейное твердое тело. При этом геометрией поверхности может быть как окружность, так и некоторая другая форма кривой, например, эллипс с незначительным соотношением осей и т.п., которая возникла вследствие изнашивания поверхностей трения или обусловленная технологическими параметрами.

Изложение основного материала. Для численного исследования узлов трения с использованием предлагаемого метода могут рассматриваться следующие факторы:

1. Деформирование опорной поверхности узла трения (рис. 1).

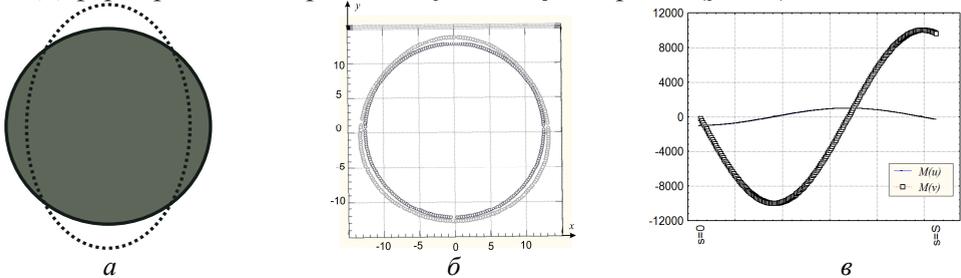


Рис. 1. Вид деформирования опорной поверхности (а), результат численного определения формы опорной поверхности (б), изгибающие моменты по длине опорной поверхности (в)

На рис. 1, а R – радиус опорной поверхности в ненагруженном состоянии; A – жесткость опорной поверхности. Следует отметить, что деформирование может рассматриваться как в плоскости, так и в пространстве, а деформирование опорной поверхности обычного плоского подшипника скольжения в общем случае также пространственно. Пространственность деформирования (в любом, даже радиально-упорном подшипнике, нагружаемом строго в одной плоскости, обязательно возникают объемные, т. е. пространственные деформации микронеровностей или даже опорных поверхностей).

2. Деформирование неровностей (шероховатостей). Для этого приведем иллюстрацию численного решения деформирования неровностей в соответствии с их геометрической характеристикой микрогеометрии согласно ГОСТ 2789-73. Здесь следует отметить, что возможно рассмотрение неровностей как в плоском (рис. 2, а), так и в пространственном напряженно-деформированном состоянии (рис. 2, б).

3. Нелинейность деформирования. В общем случае упругое деформирование элементов узла трения может иметь как линейный, так и нелинейный характер). На рис. 1, в показаны значения усилий в опорной поверхности, которые подчеркивают нелинейность деформирования.

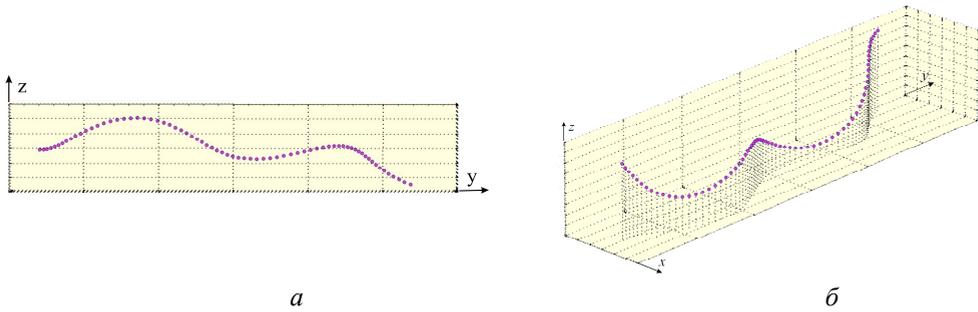


Рис. 2. Формы кривой шероховатости опорной поверхности на плоскости (а) и в пространстве (б)

4. Произвольную криволинейность рассматриваемого элемента (для опорной поверхности не всегда возможна интерпретация дискретного участка прямой, и даже часто, вначале рассматриваемый элемент как окружность, после деформирования принимает другую, чаще эллиптическую, форму). На рис. 3 показан пример численного решения (геометрия, рис. 3,а) опорной поверхности в виде эллипса. На рис. 3,б показаны усилия F по трем координатным осям в опорной поверхности в зависимости от скорости ее вращения (A – жесткость опорной поверхности; D – большой диаметр эллипса; l – длина опорной поверхности).

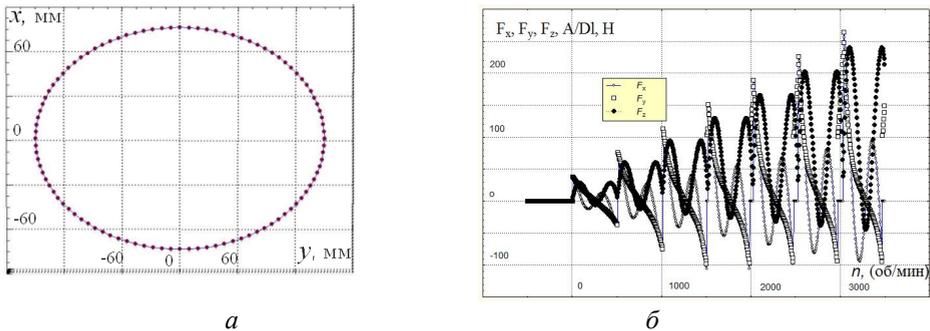


Рис. 3. Численное решение деформирования опорной поверхности в форме эллипса: геометрия (а) и усилия (б)

При этом первоначальная криволинейность (геометрия) рассматриваемого элемента может рассматриваться и как функционально заданная кривая, и как кривая произвольной разной кривизны. Изначальная кривизна при численном решении может задаваться набором чисел, полученным с помощью сканирования кривой и обработке ее специальными подпрограммами для получения необходимых пространственных координат.

5. Задание произвольного вектора нагрузок, действующих на рассматриваемый элемент как до, так и во время или после деформирования в любой временной или пространственной последовательности; при этом в качестве нагрузок могут быть механические силовые воздействия, гидростатические, температурные, деформационные и пр. Способы задания нагрузок показаны на рис. 4.

Могут задаваться и другие типы нагрузок (давление жидкости, температурные нагружения и т. д.). Например, покажем, как может задаваться нагрузка от течения смазочной жидкости. Для определения линейной нагрузки рассмотрим горизонтальные (боковые) P_{xT} и вертикальные (подъемные) P_{zT} составляющие, которые

действуют на элемент трибосопряжения. Они вычисляются по формулам:

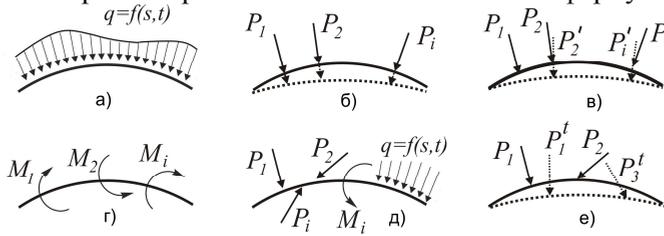


Рис. 4. Способы задания нагрузок на элементы трибосопряжения

$$P_{xT} = \frac{1}{2} C_v \frac{\gamma}{g} D u_x^2, \quad P_{zT} = \frac{1}{2} C_z \frac{\gamma}{g} D u_z^2, \quad (1)$$

где u_x – горизонтальная скорость течений; u_z – вертикальная скорость течений (принимается пропорциональной скорости u_x невозмущенного потока); γ – удельный вес жидкости; C_v – коэффициент скоростного сопротивления; C_z – коэффициент подъемной силы. Коэффициент C_v является функцией числа Рейнольдса, C_z – функцией параметра l/D , то есть функцией зазора между элементами трибосопряжения. В практических расчетах максимальный коэффициент подъемной силы (C_z) нужно принимать равным $C_z = 0,8$, а в интервале $0 \leq \frac{l}{D} \leq 1$ происходит несимметричное обтекание и неравномерное распределение давления, которое создает подъемную силу.

Необходимо отметить, что нагрузки при эволюции процесса трения могут как исчезать, так и добавляться, а также изменять свой характер и направление. Этот процесс реализуется программным методом изменением параметра нагружения.

6. Возможность рассмотрения опорной поверхности в несегментированном состоянии (полной окружности, дуги окружности, эллипса и т.п.).

7. Алгоритмичность вычислений (переход к решению задач с иными начальными условиями не вызывает временных и вычислительных затруднений).

Для достижения этих целей используются современные методы дифференциальной геометрии, векторной алгебры, численного анализа и вычислительной математики. Комплекс программ представляет собой наборы функционально связанных и стандартизированных программ и подпрограмм. При этом имеются два основных блока – пользовательский и отладочный: пользовательский предназначен для инженера-проектировщика и представляет собой «черный ящик», для его использования нет необходимости владеть знаниями в методике решения; в отладочном блоке разрабатываются новые задачи, он является гибкой системой, которая может неограниченно совершенствоваться.

Выводы. На основании современных методов численного анализа и аналитической геометрии разработаны методы и вычислительные алгоритмы численного исследования нелинейного пространственного деформирования элементов узлов трения, позволяющие численно решать нелинейные задачи трибологии в условиях динамического изменения геометрических свойств поверхностей контактирующих тел с эволюцией процесса нагружения. Созданы вычислительные алгоритмы, позволяющие, в отличие от ранее известных, решать принципиально новые типы задач упругого деформирования элементов трибосопряжения,

унифіцировать типи конструкцій, которые исследуются, ефективно переходить от одной расчетной схемы к другой в зависимости от физико-геометрических параметров и условий нагрузки, получать выходные данные в удобном для пользователя виде. Разработанный программируемый на уровне вычислительных подпрограмм унифицированный подход к конструированию компьютерных моделей процессов механического контакта в узлах трения, позволяющий оперативно (с использованием объектно-ориентированного подхода) создавать и модернизировать различные комбинации алгоритмов, применяемых для моделирования упругого контакта в трибоспряжении. Используя проведенные в статье методы исследования, разработчики триботехники могут создавать новые типы трибоспряжений с учетом сложностей их механики при нелинейном упругом пространственном деформировании опорных поверхностей и неровностей.

Список литературы

1. Ибатуллин И. Д. Кинетика усталостной повреждаемости и разрушения поверхностных слоев: [монография] / И. Д. Ибатуллин. – Самара : Изд-во СГТУ, 2008. – 387 с.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
3. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач и др. – К. : Наукова думка, 1989. – 232 с.
4. Колесников Ю. В. Механика контактного разрушения / Ю. В. Колесников, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1988. – 224 с.
5. Кузьменко А. Г. Развитие методов контактной трибомеханики : [монография] / А. Г. Кузьменко. – Хмельницкий : Изд-во ХНУ, 2010. – 270 с.
6. Трибология. Физические основы, механика и технические приложения / [И. И. Беркович, Д. Г. Громаковский; под ред. Д. Г. Громаковского]. – Самара : Изд-во СГТУ, 2000. – 268 с.
7. Кравцов В.И. Механика гибких морских конструкций / В.И. Кравцов. – К. : Наукова думка, 1999. – 132 с.

Стаття надійшла до редакції 02.01.2017

В. І. КРАВЦОВ, Я. В. КРАСИЛЬЧУК, О. М. НЕДБАЙЛО

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В ЗАДАЧАХ ТРИБОЛОГІЇ

Показано метод чисельного розв'язку диференційних рівнянь високого порядку і його можливості при розв'язанні задач трибології. Метод заснований на чисельному розв'язанні системи диференційних рівнянь високого порядку, він описує просторове нелінійне деформування пружного елемента довільної кривизни при довільному векторі статичних або квазістатичних навантажень силової, гідравлічної або інерційної дії. Для ілюстрації методу наведено приклади розв'язку типових трибологічних задач, зокрема деформування опорної поверхні вузла тертя, деформування шорсткостей поверхні тощо. Описані алгоритми дозволяють, на відміну від тих, які відомі раніше, розв'язувати принципово нові типи задач пружного деформування елементів трибоспряження, уніфікувати типи конструкцій, які досліджуються, ефективно переходити від однієї розрахункової схеми до іншої залежно від фізико-геометричних параметрів і умов навантаження, одержувати вихідні дані у зручному для користувача вигляді. Приклади розв'язків, які показані графічно, підтверджують достовірність і унікальність методу, описаного у статті. Метод реалізований за допомогою пакета прикладних комп'ютерних програм, які можна редагувати залежно від потреб користувача.

Ключові слова: тертя, чисельний метод, опорна поверхня, диференціальні рівняння, просторове деформування, лінії контакту, нелінійність.

V. I. KRAVTSOV, I. V. KRASILCHUK, A. N. NEDBAYLO

APPLICATION OF THE METHOD NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER IN PROBLEMS OF TRIBOLOGY

Shown method numerical solution of differential equations of high order and its capabilities in solving problems of tribology. The method is based on numerical solution of differential equations of high order, he describes the spatial nonlinear deformation of the elastic element of arbitrary curvature, for arbitrary vector a static or quasi-static loads of power, hydraulic or inertial actions acting on the element. The method is confirmed by many experiments. To illustrate the method, examples of solving typical tribological tasks, such as deformation of the thrust surfaces of the friction unit, deformation of the surface roughness etc. are Described the algorithms allow, in contrast to those known before, to fundamentally solve new types of problems of elastic deformation of the elements of trimeprazine, to unify the types of structures that are investigated, to effectively move from one design scheme to another depending on the physico-geometrical parameters and load conditions, to output data in a user-friendly form. Examples of solutions which are shown graphically confirm the authenticity and uniqueness of the method, which is described in the article. The method is implemented using the package of applied computer programs, which can be edited depending on the needs of the user.

References

1. Ibatullin I. D. Kinetika ustalostnoy povrezhdaemosti i razrusheniya poverhnostnykh sloev : [monografiya] / I. D. Ibatullin. – Samara: Izd-vo SGTU, 2008. – 387 s.
2. Goryacheva I. G. Mehanika frikcionnogo vzaimodeystviya / I. G. Goryacheva. – M.: Nauka, 2001. – 478 s.
3. Zadachi kontaktного vzaimodeystviya elementov konstrukciy / A. N. Podgornyy, P. P. Gontarovskiy, B. N. Kirkach i dr. – K. Naukova dumka, 1989. – 232 s.
4. Kolesnikov Yu. V. Mehanika kontaktного razrusheniya / Yu. V. Kolesnikov, E. M. Morozov. – M. : Nauka, 1988. – 224 s.
5. Kuzmenko A. G. Razvitie metodov kontaktной tribomehaniki : [monografiya] / A. G. Kuzmenko. – Hmelnickiy : Izd-vo HNU, 2010. – 270 s.
6. Tribologiya. Fizicheskie osnovy, mehanika i tehnicheckie prilozheniya / [I. I. Berkovich, D. G. Gromakovskiy; pod red. D. G. Gromakov-skogo]. – Samara : Izd-vo SGTU, 2000. – 268 s.
7. Kravcov V.I. Mehanika gibkih morskikh konstrukciy / V.I. Kravcov. – K. : Naukova dumka, 1999. – 132 s.

Кравцов Віктор Іванович – доктор техн. наук, професор, професор кафедри машинознавства Національного авіаційного університету. Напрямок наукової діяльності – нелінійна механіка у прикладних задачах машинознавства.

Красильчук Ярослав Володимирович – інженер-програміст. Напрямок наукової діяльності – програмування чисельних методів у нелінійній механіці.

Недбайло Олексій Миколайович – доцент Херсонського національного технічного університету, кафедра основ конструювання.