

УДК 621.891

DOI: 10.18372/0370-2197.1(82).13491

В. И. КРАВЦОВ

*Национальный авиационный университет, Киев*

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННО ДЕФОРМИРУЕМЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ ПРИ ВЯЗКОМ ТРЕНИИ

*На примере деформирования цилиндрической пружины представлена методика исследования ее упругого пространственного деформирования при одновременной оптимизации ее физико-геометрических параметров. Для этого коротко рассматривается математическая модель, которая описывает равновесие и упругое деформирование пространственно искривленного элемента, его внешнюю и внутреннюю геометрию. Представлен метод оптимизации параметров по условию деформативности при наличии разных нелинейных ограничений-неравенств на внутренние усилия, перемещения и геометрические характеристики продольной оси с использованием методов оптимального управления и нелинейного программирования. Приведены примеры результатов численных расчетов по определению характеристик напряженно-деформированного состояния цилиндрической пружины и оптимизации ее параметров.*

**Ключевые слова:** упругий элемент; деформирование; дифференциальные уравнения; оптимальное проектирование; целевая функция; численное решение.

**Введение.** Развитие самолетостроения связано с непрерывной борьбой за снижение веса конструкции. Снижения веса конструкции можно добиться рациональным выбором материалов и силовых схем, применением рациональных технологических процессов, а также за счет уточнения нагрузок, действующих на конструкцию.

Упругие элементы (УЭ) нашли широкое применение в авиационной, ракетно-космической технике в датчиках и приборах измерения давления различных сред, в пилотажно-навигационных приборах и системах, в приборах парашютной автоматики, в топливно-регулирующих системах двигателей, средствах жизнеобеспечения и деятельности экипажа и наземного метрологического контроля бортовой техники. Рост требований к точности воспроизведения характеристик (УЭ) (с допустимым отклонением от заданной в несколько микрон), потребовали разработки более точных и алгоритмичных методов решения задач, что без использования вычислительной техники вообще не представляется возможным.

**Постановка проблемы.** Упругие элементы в зависимости от назначения могут принимать самые разнообразные формы. Обычно в исследованиях рассматривается какой-то конкретный тип упругого элемента: плоская круговая спираль, цилиндрическая пружина, коническая пружина и т.п. Для унификации процесса в данной статье рассмотрим метод расчета фасонной витой пружины как универсального пространственно изогнутого упругого элемента, частные случаи конструкции которого могут представлять любой тип пружин. Винтовые пружины обычно навиваются из проволоки в виде пространственной спирали. Витки равномерно сближаются по мере того, как возрастает нагрузка, и возвращаются в исходное положение при ее снятии. Если есть необходимость в переменной жесткости, тогда пружины выполняются из прутка различного диаметра (на определенных участках), или в форме бочонка (некоторые витки уже). В этом случае, когда пружина будет получать нагрузку, первыми будут сближаться

ся витки меньшего диаметра (толщины). Варьирование параметров пружины (оптимизация) в зависимости от пространственной конфигурации (изменение жесткости по длине осевой линии, изменение жесткости в сечении, изменение радиусов кривизны, работа в условиях вязкой жидкости и пр.) позволяет задать требуемые технологические характеристики кривой нагружения.

**Анализ последних исследований и публикаций.** К настоящему времени указанные исследования не получили необходимого развития из-за отсутствия достоверных математических моделей, которые довольно просто и эффективно реализуются в виде алгоритмов и программ для численного решения данных задач. Существующие современные математические модели исследования напряженно-деформированного состояния упругих элементов [1] позволяют находить необходимые параметры напряженно-деформированного состояния при заранее заданных физико-геометрических свойствах конструкции, но для них оптимизации используется, как правило, метод подбора. Обобщая литературу, посвященную этой проблеме, можно сделать вывод, что в основном решаются аналитически локальные задачи. Учет вязкого трения в конструкции, являющейся сложной пространственной конструкцией возможен только при решении задач численными методами.

**Цель работы и постановка задачи.** Расчет пространственно изогнутого гибкого стержня будем осуществлять по методике, описанной в [2]. . Опишем кратко предлагаемый метод численного расчета, математическая модель которого базируется на известных подходах Лагранжа и Эйлера, которые описывают равновесие и упругое деформирование упругого элемента, его внешнюю и внутреннюю геометрию. Вводится естественный трехгранник  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{\tau}$  – с единичными ортами главной нормали и касательной; подвижный трехгранник  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  (рис. 1). Считая, что  $\bar{F}$ ,  $\bar{M}$  – векторы внутренних усилий и моментов;  $p$ ,  $q$ ,  $r$  – кривизны относительно орт подвижного трехгранника;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты независимой переменной  $s$ , сформирована система разрешающих уравнений, описывающая деформирование витого элемента, которую можно представить в виде

$$\vec{X} = \vec{f}(X, s, \lambda), \quad (1)$$

где  $\vec{X}$  – вектор состояния ( $m=18$ ),  $\vec{f}$  – вектор-функция правых частей системы уравнений;  $\lambda$  – параметр интенсивности возмущения (нагружения), штрихом обозначена производная по  $s$ , являющейся аналогом длины элемента. Параметр  $\lambda$  отображает количественные характеристики задачи.

Сформулированная таким образом в области  $0 \leq s \leq S$  изменения  $s$  система разрешающих уравнений (1) имеет общий восемнадцатый порядок. Методика решения поставленной задачи основана на совместном использовании метода продолжения по параметру и метода Ньютона-Канторовича. Стоит добавить, что при численном решении системы уравнений помимо определения напряженно-деформированного состояния можно исследовать элементы и на устойчивость. Это проявляется через вырождение матрицы Якоби при решении методом Рунге-Кутты.

С помощью этой методики возможно исследование упругой кривой любой пространственной геометрии, при этом ее деформирование может быть неограниченно в пределах упругости. Для задания геометрии осевой линии необходимо знать ее функцию и

производные кривизны относительно глобальных осей [3]. Опишем задание этой кривой для использования ее параметров в системе разрешающих уравнений.

Рассмотрим вопросы геометрии. Пусть осевая линия формируется навивкой прямой с углом подъема  $\alpha$  на поверхность, образованную вращением дуги окружности радиуса  $R$  относительно оси  $z$ . Расстояние от центра вращаемой окружности до оси  $z$  составляет  $R - a$ ;  $2a$  - наибольший диаметр поверхности вращения, на которую навивается кривая;  $2h$  - ее высота. Обозначим угол между осью  $x$  и лучом, проходящим через начало координат и проекцию точки осевой линии на плоскость  $(xy)$ , буквой  $\varphi$ . Тогда уравнение осевой линии можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= \left[ \sqrt{R^2 - (h - s \sin \alpha)^2} - R + a \right] \cos \varphi \\ y &= \left[ \sqrt{R^2 - (h - s \sin \alpha)^2} - R + a \right] \sin \varphi \\ z &= s \sin \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Для вычисления значения угла  $\varphi$  в зависимости от текущего значения координаты  $s$  выпишем выражение для квадрата элемента осевой линии

$$(ds)^2 = b^2(d\varphi)^2 + (db)^2 + (dz)^2, \quad (3)$$

где

$$b = \sqrt{R^2 - (h - z)^2} - R + a. \quad (4)$$

Из (3) следует

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{b} \sqrt{(ds)^2 - (db)^2 - \sin^2 \alpha (ds)^2}, \\ \varphi &= \int_0^s \frac{1}{b} \sqrt{\frac{R^2 \cos^2 \alpha - (h - s_1 \sin \alpha)^2}{R^2 - (h - s_1 \sin \alpha)^2}} ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя соотношения (2)-(5), можно подсчитать параметры кривизны в недеформированном состоянии  $p^*, q^*$  осевой линии:

$$p^* = 0, \quad q^* = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \quad (6)$$

Кручение  $z^*$  подсчитывается по формуле

$$z^* = \frac{1}{(q_0)^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}, \quad \text{где}$$

$$x' = \frac{dx}{ds} = b' \cos \varphi - b \sin \varphi \cdot \varphi',$$

$$x'' = \frac{d^2x}{ds^2} = b'' \cos \varphi - 2b' \sin \varphi \cdot \varphi' - b \cos \varphi (\varphi')^2 - b \sin \varphi \varphi'',$$

$$\begin{aligned} x''' = \frac{d^3x}{ds^3} &= b''' \cos \varphi - 3b'' \sin \varphi \cdot \varphi' - 3b' \sin \varphi (\varphi')^2 - 3b' \sin \varphi \varphi'' - b \cos \varphi \varphi' \varphi''' + \\ &+ b \sin \varphi \cdot (\varphi')^3 - b \sin \varphi \cdot \varphi''', \end{aligned}$$

$$y = \frac{dy}{ds} = b' \sin \varphi + b \cos \varphi \cdot \varphi',$$

$$y'' = \frac{d^2y}{ds^2} = b'' \sin \varphi + 2b' \cos \varphi \cdot \varphi' - b \sin \varphi (\varphi')^2 + b \cos \varphi \varphi'', \quad (7)$$

$$y''' = \frac{d^3y}{ds^3} = b''' \sin \varphi + 3b'' \cos \varphi \cdot \varphi' - 3b' \sin \varphi (\varphi')^2 + 3b' \sin \varphi \varphi \varphi'' - b \cos \varphi \varphi'' - \\ + 3b \sin \varphi \varphi' \varphi''' - b \cos \varphi \cdot (\varphi')^3 + b \cos \varphi \varphi''',$$

$$z' = \frac{dz}{ds} = \sin \alpha, \quad z'' = 0, \quad z''' = 0.$$

Обозначив

$$C = \sqrt{\frac{R^2 \cos^2 \alpha - (h - s \cdot \sin \alpha)^2}{R^2 - (h - s \cdot \sin \alpha)}} \quad (8)$$

и взяв по ней производные  $C'$  и  $C''$  определим следующее:

$$\varphi = \int_0^s \frac{C}{b} ds, \quad \varphi' = \frac{C}{b}, \quad \varphi'' = \frac{1}{b^2} (bC' - Cb'), \quad \varphi''' = -\frac{2b'}{b^3} (bc' - cb') \quad (9)$$

Равенства (2)-(9) полностью определяют геометрию упругого элемента в недеформированном состоянии и позволяют сформулировать систему разрешающих уравнений (1). Для постановки краевых уравнений рассмотрим условия опирания элемента на концах. Будем считать, что концы закреплены и его нагружение осуществляется за счет поступательного перемещения конца  $s = S$ . Тогда, при  $s = 0$  имеем уравнения

$$x = \sqrt{R^2 - h^2} - R + a, \quad y = 0, \quad z = 0, \\ \tau_x = \frac{h \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - h^2}}, \quad \tau_z = \sin \alpha, \quad n_x + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad (10)$$

Аналогично запишем соответствующие уравнения на конце  $s = S$  ( $S$  - полная длина элемента)

$$x = \left[ \sqrt{R^2 - (h - s \cdot \sin \alpha)} - R + a \right] \cos \varphi, \\ y = \left[ \sqrt{R^2 - (h - s \cdot \sin \alpha)} - R + a \right] \sin \varphi, \\ z = \sin \alpha \cdot S + \lambda, \quad (11)$$

$$\tau_x = \frac{dx}{ds} \Big|_{s=S}, \quad \tau_z = \sin \alpha, \quad \left| n_x + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|_{s=S} = 0.$$

Здесь параметр  $\lambda$  характеризует величину перемещения вдоль оси  $z$  конца  $s = S$ . При  $\lambda > 0$  элемент оказывается растянутым, при  $\lambda < 0$  - сжатым.

Таким образом, можно задать произвольную пространственную или плоскую геометрию упругого элемента и путем его нагружения параметром  $\lambda$  исследовать его деформирование, получив при этом все необходимые характери-

стики напряженно-деформированного состояния на любом этапе нагружения. Следует отметить, что параметром  $\lambda$  может быть как статическое, так и квазистатическое или динамическое нагружение на любом отрезке упругой кривой произвольным в пространстве.

Для примера определим влияние вязкой среды при работе цилиндрической пружины. Каждый виток пружины при деформировании испытывает сопротивление среды, в которой она находится.

При движения пружины в вязкой среде с небольшими скоростями сила сопротивления пропорциональна скорости движения

$$F_{mp}^* = -rV \quad (12)$$

при этом коэффициент  $r$  зависит от вязкости среды и площади соприкосновения поверхности  $A$  тела с жидкостью

$$r \sim \eta A \quad (13)$$

где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения жидкости (динамическая вязкость жидкости).

Дж. Стокс эмпирически установил, что сила сопротивления вязкой жидкости равна  $F = -6\pi\eta r$ . Подставляя это значение как составляющую параметра нагружения  $\lambda$  можно определить влияние вязкого трения на деформирование пружинного элемента.

Учитывая большое количество параметров упругого элемента, которые могут определяться по данной методике, стоит вопрос оптимизации технологических свойств изделия. В задаче оптимального проектирования управляющими функциями можно выбрать, например, переменную жесткость по длине элемента. При этом ограничение накладываются как на управляющие функции, так и на их производные по длине. В этом случае уравнения состояния (разрешающие уравнения), описывающие пространственное деформирование объекта, дополняются следующим уравнением:

$$\frac{dk}{ds} = w, \quad (14)$$

где  $k$  – некоторая геометрическая характеристика оси или поперечного сечения;  $w$  – управляющая функция. Систему уравнений состояния представим в виде

$$\frac{dx}{ds} = f(x(s), w(s)), \quad s_0 \leq s \leq s \quad (15)$$

с краевыми условиями

$$g[x(s_0)] = g_0; \quad (16)$$

$$h[x\{s_s\}] = h_s \quad (17)$$

Задача об определении оптимального закона изменения  $w(s)$  может быть сформулированная как задача оптимального управления с геометрическими и фазовыми ограничениями: нужно найти функцию  $w(s) = w(s)_{\text{опт}}$ , которые минимизирует (18), удовлетворяет уравнением стана с краевыми условиями, ограничением на прочность и геометрическим ограничением.

Подробно метод решения изложен в [4]. Количество краевых условий на левом крае ( $s = s_0$ )  $m = 9$ , количество краевых условий на правом крае ( $s = s_s$ )  $k = 6$ ;  $w(s)$  – вектор-функция жесткостных и геометрических характеристик, которые определяются из условия минимума функционала

$$\Phi = \int_{s_0}^{s_g} V[x(s), w(s)ds], \quad (18)$$

где в зависимости от требований к оптимальному проекту имеется в виду масса или перемещения характерных точек объекта;  $x(s)$  – вектор состояния размерностью  $n$ . Прочностные или геометрические ограничения такие:

$$w_1 \leq w(s) \leq w_2; \quad (19)$$

Задача по определению оптимального закона изменения  $w(s)$  может быть сформулирована как задача оптимального управления с геометрическими и фазовыми ограничениями: необходимо найти функцию  $w(s) = w(s)_{\text{опт}}$ , которая минимизирует (18), удовлетворяет уравнением состояния с краевыми условиями, ограничением на прочность и геометрическим ограничением.

Задача оптимизации сформулирована как задача Лагранжа с параллелепипедными и фазовыми ограничениями-неравенствами. Для ее решения вовлечен прямой метод. Подробно метод решения изложено в [5].

**Результаты исследования и их анализ.** Примером численного решения поставленной задачи было деформирование в вязкой среде цилиндрической пружины переменной жесткости. Для иллюстрации численного исследования с помощью описанного метода были приняты следующие физико-механические свойства цилиндрической пружины:

$$R = 0,15 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; G_1 = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2;$$

$$G_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 = 7,8 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$I_x = 3126 \cdot 10^{11} \text{ м}^4; I_z = 7342 \cdot 10^{11} \text{ м}^4; I_p = 4525 \cdot 10^{11} \text{ м}^4,$$

где  $R$  – радиус спирали;  $E$  – модуль упругости;  $G$  – модуль упругости при кручении;  $I_x, I_y$  – моменты инерции;  $I_p$  – полярный момент инерции.

Как известно, кривая нагружения цилиндрической пружины – прямая линия; при сжатии же пружины переменной жесткости кривая нагружения имеет нелинейный характер (рис. 1).

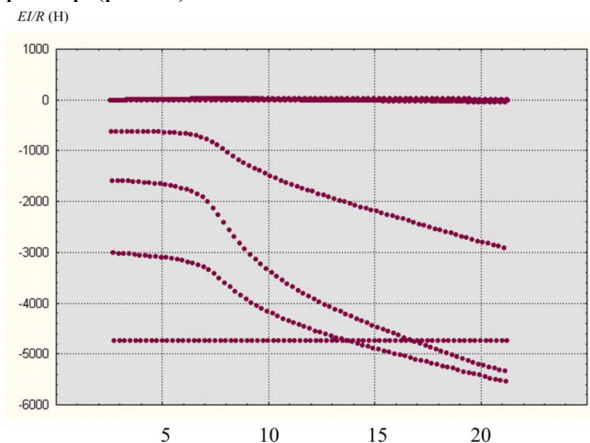


Рис. 1. Значения крутящих моментов в безразмерных величинах в пружине переменной жесткости

На рис. 1 по горизонтальной оси показано количество шагов итерации при численном решении. Заметно, что после 7 шага начинают работать витки пружины

жины с большей жесткостью. Нелинейность обусловлена тем, что вначале сжимаются витки с меньшей жесткостью, а затем начинают работать витки с большей жесткостью. Таким образом, варьируя физико-геометрическими параметрами пружины можно определить заданную из технологических соображений конфигурацию кривой нагружения.

На рис. 2 кривая мелким пунктиром показывает изменение внутреннего крутящего момента в отдельно взятом сечении пружины при ее постоянной жесткости по длине в идеальной жидкости. Крупным пунктиром показано изменение крутящего момента той же пружины в условиях вязкого трения.

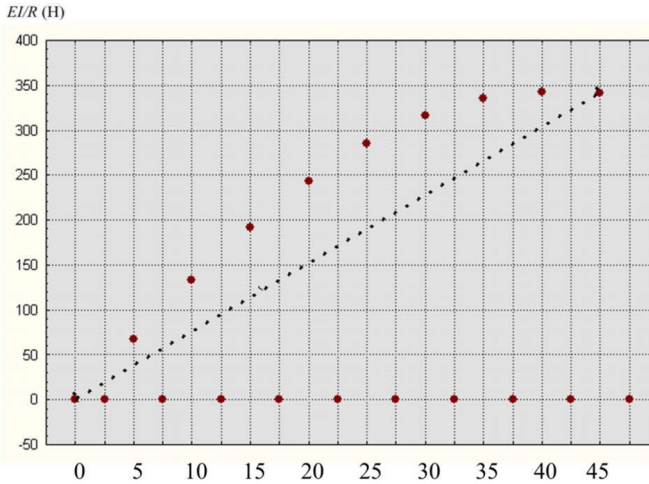


Рис. 2. Крутящие моменты в произвольном витке пружины в условиях вязкого трения

На рис.3 показано значение внутреннего крутящего момента в безразмерных величинах на одном шаге во всех витках пружины до потери устойчивости и после.

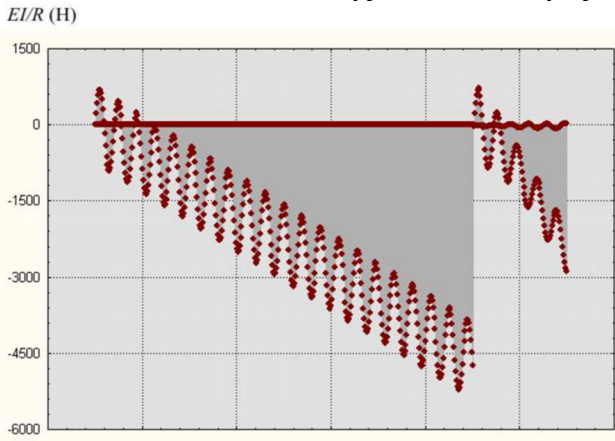


Рис. 3. Крутящие моменты на одном шаге во всех витках пружины до потери устойчивости и после.

Заметен знакопеременный скачок при потере устойчивости и явное уменьшение значения крутящего момента по его абсолютной величине, а значит, будет иметь место и потеря несущей способности пружины.

На рис. 4 показана оптимальная кривая нагружения, по которой определялись жесткости пружины.

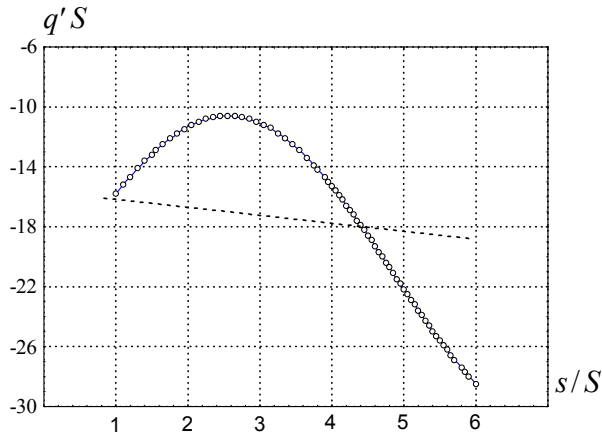


Рис.4. Оптимальная кривая нагружения

Возможность варьирования параметрами упругих элементов позволяет задавать необходимые ее свойства для осуществления тех или иных технологических процессов.

**Выводы.** Разработанный метод численного исследования пространственного деформирования упругих элементов с учетом вязкого трения и оптимизации физико-геометрических параметров может быть эффективным при создании новых типов упругих элементов авиационной техники. Применяя предложенный метод, можно получать в удобном для пользователя виде необходимые параметры напряженно-деформированного состояния. При внезапном приложении нагрузки или ее снятии, потере устойчивости, изменении жесткости и т.п. можно прекратить решение и после уточнения изменяемых параметров задачи возобновить его снова, начиная с прерванного шага интегрирования. Простота использования, наглядность, скорость получения результатов делают метод удобным и эффективным для использования при прочностных расчетах стального каната.

#### Список литературы

1. Светлицкий В. А., Нарайкин О. С. Упругие элементы машин/ Светлицкий В. А. — М.: Машиностроение, 1989. — 264 с.
2. Кравцов В.И. Механика гибких морских конструкций / В.И. Кравцов. — Киев: Наукова думка, 1999. — 132с.
3. Кравцов В.И. Метод численного исследования пространственного деформирования стального каната с учетом межвиткового трения/ Проблемы тертя та зношування, №3— 2016, с. 25-34.
4. Кравцов В.И. Оптимизация параметров гибкой оболочки при ограничении по нелинейной устойчивости/ Вестник Херс.ГТУ № 1, 1997, — с. 22-23.
5. Кравцов В.І, Защепкіна Н.М., Недбайло О.М. Математична модель вибору оптимальних параметрів гнучких деформованих елементів/ Вісник технологічного університету Поділля, Хмельницький 2001 №5 (36).С.73–79.

Стаття надійшла до редакції 28.02.2019.

**Кравцов Віктор Іванович** - доктор техн. наук, професор, професор кафедри машинознавства Національного авіаційного університету. Напряма наукової діяльності - нелінійна механіка у прикладних задачах машинознавства.



V. I. KRAVTSOV

### OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF SPATIALLY DEFORMABLE ELASTIC ELEMENTS OF AVIATION TECHNOLOGY UNDER VISCOUS FRICTION

Using the example of deforming a cylindrical spring, a technique is presented for studying its elastic spatial deformation while simultaneously optimizing its physical and geometric parameters. The importance of the accuracy of determining the parameters of the stress-strain state of elastic elements for aeronautical engineering is shown. We briefly consider a mathematical model that describes the equilibrium and elastic deformation of a spatially curved elastic element, its external and internal geometry. The methods of vector algebra and analytic geometry are used. A system of eighteenth-order ordinary differential equations was compiled, the solution of which is based on the joint application of the parameter continuation method together with the Newton-Kantorovich method. The method of optimization of parameters according to the condition of deformations in the presence of different nonlinear inequality constraints on internal forces, displacements and geometric characteristics of the longitudinal axis using the methods of optimal control and nonlinear programming is presented. Examples of the results of numerical calculations to determine the characteristics of the stress-strain state of a cylindrical spring and the optimization of its parameters are given. At the same time, a spring with variable stiffness along the length, which operates in a viscous fluid under the action of a compressive force, was investigated. The results of the numerical solution emphasize the effectiveness and reliability of the proposed methodology.

**Keywords:** elastic element; deformation; differential equations; optimal design; objective function; numerical solution.

#### References

1. Svetlytskyi V. A., Naraikyn O. S. Upruhye elementy mashyn/ Svetlytskyi V. A. — М.: Mashynostroeny, 1989. —264 s.
2. Kravtsov V.Y. Mekhanyka hybkykh morskykh konstruktsiy / V.Y. Kravtsov. - Kyev: Naukova dumka, 1999. – 132s.
3. Kravtsov V.I. Metod chyslennoho yssledovanyia prostranstvennoho deformyrovanyia stalnoho kanata s uchetom mezhvytkovoho trenyia/ Problemy tertia ta znoshuvannia, №3-2016, s. 25-34.
4. Kravtsov V.Y. Optymyzatsyia parametrov hybkoï obolochky pry ohranychenyy po nelyneinoï ustoichyvosty/ Vestnyk Khers.HTU № 1, 1997, - s. 22-23.
5. Kravtsov V.I, Zashchepkina N.M., Nedbailo O.M. Matematychna model vyboru optymalnykh parametriv hnuchkykh deformovanykh elementiv/ Visnyk tekhnolohichnoho universytetu Podillia, Khmelnytskyi 2001 №5 (36).S/73- 79.

B. I. КРАВЦОВ

### ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ПРОСТОРОВО ДЕФОРМІВНИХ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ АВІАЦІЙНОЇ ТЕХНІКИ ПРИ В'ЯЗКОМУ ТЕРТІ

На прикладі деформування циліндричної пружини представлено методику дослідження її пружного просторового деформування при одночасній оптимізації її фізико-геометричних параметрів. Для цього коротко розглядається математична модель, що описує рівновагу й пружне деформування просторово скривленого елемента, його зовнішню й внутрішню геометрію. Представлено метод оптимізації параметрів за умовою деформативності при наявності різних нелінійних обмежень-нерівностей на внутрішні зусилля, переміщення й геометричні характеристики поздовжньої осі з використанням методів оптимального управління і нелінійного програмування. Наведено приклади результатів чисельних розрахунків по визначенню характеристик напружено-деформованого стану циліндричної пружини і оптимізації її параметрів.

**Ключові слова:** пружний елемент; деформування; диференційні рівняння; оптимальне проектування; цільова функція; чисельний розв'язок.