

# *Математика та механіка*

---

---

УДК 539.3

## **ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ НАГРІВАННЯ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА ОБМЕЖЕНЬ НА ТЕМПЕРАТУРУ СЕРЕДОВИЩА І ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ**

**Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б;  
e-mail: [dyrector@iapmm.lviv.ua](mailto:dyrector@iapmm.lviv.ua)*

*Сформульовано математичну постановку та розроблено алгоритм розв'язування одновимірних задач оптимального за швидкістю керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми. Визначено керування (температуру середовища, що оточує одну із граничних поверхонь або тепловий потік), яке за мінімальний час переводить тіло з початкового стану у кінцевий, що характеризується заданою середньо-інтегральною температурою. При цьому враховано обмеження як на функцію керування, так і на максимальне значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву.*

**Ключові слова:** *оптимальне керування, температурні напруження, обернена задача, пружнопластичний стан*

Технологічні процеси виготовлення та експлуатації елементів конструкцій часто передбачають їх термічну обробку. Підвищення продуктивності таких процесів та мінімізація енергетичних затрат тісно пов'язані з проблемою мінімізації часу нагрівання чи охолодження виробу на етапі термічної обробки [1-3]. Нерівномірний розподіл температури в тілі приводить до виникнення в ньому полів напружень, перевищення якими допустимих значень може зумовити появу і розвиток пластичних деформацій [4,5]. З метою забезпечення проектних функціональних властивостей елементів конструкцій при визначенні режимів їх найшвидшого нагрівання (охолодження) потрібно враховувати обмеження як на параметри теплового, так і напружено-деформованого станів [1-3,6,7]. Оскільки більшість таких процесів відбувається за умов інтенсивного теплового навантаження тіла та у широкому діапазоні тем-

ператур, то важливим є врахування залежності теплофізичних та механічних властивостей матеріалу від температури [5].

У цій роботі для випадку пружнопластичного деформування матеріалу сформульована математична постановка і на основі методу оберненої задачі термомеханіки [2,3] розроблено алгоритм числової побудови розв'язків задач оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми за обмежень на керування і максимальну величину накопиченої пластичної деформації зсуву.

### 1. Постановка задачі оптимізації.

Розглянемо вільне від зовнішнього силового навантаження ізотропне термочутливе тіло, яке займає деяку область  $V$  з границею  $\Sigma$ . Нехай зміна температури тіла відбувається внаслідок конвективного теплообміну з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Температурне поле тіла  $T(x, \tau_*)$ , коли в ньому відсутні внутрішні теплові джерела і можна знехтувати теплоутворенням від деформування, задовольняє рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda_* \operatorname{grad} T(x, \tau_*)) = c_V^* \frac{\partial T(x, \tau_*)}{\partial \tau_*}, \quad (1)$$

де  $\lambda_* = \lambda_*(T)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c_V^* = c_V^*(T)$  – питома об'ємна теплоємність;  $x$  – точка з області  $V$ ;  $\tau_*$  – час.

Вважатимемо, що можна керувати температурою середовища  $u(x, \tau_*)$ , яке оточує деяку частину граничної поверхні тіла  $\Sigma_u$ , тобто на частині граничної поверхні  $\Sigma_u$  теплообмін

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_u (T - u) = 0 \quad (x \in \Sigma_u) \quad (2)$$

є керований, а на решті  $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \Sigma_u$  – заданий

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_\theta (T - \theta) = 0 \quad (x \in \Sigma_0). \quad (3)$$

Тут  $\alpha_u, \alpha_\theta$  – коефіцієнти теплообміну на поверхнях  $\Sigma_u$  і  $\Sigma_0$  відповідно;  $\theta(x, \tau_*)$  – задана температура середовища, яке оточує частину граничної поверхні  $\Sigma_0$ ;  $n$  – зовнішня нормаль до поверхні  $\Sigma$ .

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування  $u(x, \tau_*)$ , яке задовольняючи умови

$$U_1(x, \tau_*) \leq u(x, \tau_*) \leq U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u) \quad (4)$$

$$\max_{x \in V} \Gamma_p \leq \Gamma_p^* \quad \left( \Gamma_p = \int_0^{\tau_*} \left( \mathcal{E}_{ij}^{(p)} \mathcal{E}_{ij}^{(p)} \right)^{1/2} d\tau_* \right) \quad (5)$$

за мінімальний час  $\tau_0 = \min \tau_*$  переведе тіло із початкового стану

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (x \in \bar{V}) \quad (6)$$

у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою

$$T_c(\tau_0) = \frac{1}{V_*} \int_V T(x, \tau_0) dV = T_* \quad (7)$$

Тут  $U_i(x, \tau_*)$  ( $i = 1, 2$ ) – відповідно нижня ( $i = 1$ ) та верхня ( $i = 2$ ) границі обмеження на функцію керування;  $\Gamma_p$  – накопичена пластична деформація зсуву;  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  – похідна за часом від компонент девіатора пластичних деформацій [5];  $\Gamma_p^*$  – гранично допустиме значення накопиченої пластичної деформації зсуву;  $T_0(x)$  – початкова температура тіла;  $V_*$  – об'єм області  $V$ ;  $T_*$  – задана середньоінтегральна температура;  $\bar{V} = V \cup \Sigma$ .

При побудові розв'язків сформульованих задач оптимізації припускається керованість розглядуваного процесу, тобто вважається, що функції  $U_i(x, \tau_*)$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Gamma_p^*$ ,  $T_0(x)$  та стала  $T_*$  задані так, що можливим є досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Зазначимо, що за функцію керування може бути вибраний також тепловий потік на поверхні  $\Sigma_u$ , оскільки з граничної умови третього роду (2) можна отримати граничну умову другого роду.

## 2. Алгоритм розв'язування задачі оптимізації.

Для побудови розв'язку сформульованої задачі оптимізації використаємо метод оберненої задачі термомеханіки [2, 3]. Згідно з ним оптимальне за швидкодією керування приймаємо рівним верхній межі гранично допустимого обмеження

$$u(x, \tau_*) = U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u, \tau_* \geq 0) \quad (8)$$

або таким, що забезпечує виконання рівності

$$\max_{x \in \bar{V}} \Gamma_p = \Gamma_p^* \quad (9)$$

Це означає, що найшвидше нагрівання тіла за обмежень (4) та (5) здійснюється по верхній межі одного із обмежень. Через це розв'язання задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням тіла здійснюємо поетапно.

*Етан 1.* На першому етапі припускаємо, що початковий розподіл температури  $T_0(x)$  задовольняє умову (5) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності за умови (8). Якщо в процесі нагрівання тіла за законом (8) умова (5) завжди виконується, то оптимальне за швидкодією керування визначаємо із умови (8) до моменту досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Оскільки задача теплопровідності (1)-(3), (6) є нелінійною, то її розв'язок визначаємо чисельно за допомогою методу скінченних елементів [8].

Пружнопластичне деформування тіла досліджуємо в межах теорії неізотермічного деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини [5]. Відповідно до цієї теорії за основну систему диференціальних рівнянь вибираємо рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10)$$

та рівняння сумісності Сен-Венана

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} + \varepsilon_{ik,jm} + \varepsilon_{jm,ik} = 0 \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3), \quad (11)$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти тензора напружень і повних деформацій.

Компоненти тензора напружень задовольняють однорідні граничні умови

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (12)$$

де  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні тіла у відповідній точці.

Визначальні фізичні рівняння, які пов'язують між собою компоненти тензора напружень і деформацій матимуть вигляд [5]

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} - \frac{s_{ij}}{2G^2} \frac{\partial G}{\partial T} dT + de_{ij}^{(p)} \quad (13)$$

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{d\Gamma_p}{S} s_{ij} = (F_S dS + F_T dT) s_{ij}$$

де  $F_S$  і  $F_T$  визначаємо на основі миттєвої термомеханічної поверхні  $\sigma = f(\varepsilon, T)$  [5]. Тут  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ ,  $e_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)}$  – відповідно компоненти девіатора повних і пластичних деформацій;  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  – компоненти тензора пластичних деформацій;  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$  – середнє видовження;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  – компоненти девіатора напружень;  $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  – середнє напруження;  $\delta_{ij}$  – дельта-символ Кронекера;  $G$  – модуль зсуву.

Оскільки сформульована вище задача термопластичності є нелінійною, то для її розв'язання використовуємо метод додаткових деформацій [5]. З цією метою, аналогічно до задачі теплопровідності, процес деформування елементів тіла розбиваємо на ряд малих етапів за часом. Інтегруючи співвідношення (13) вздовж усього шляху деформування і сумуючи прирости пластичних деформацій за етап, в кінці  $m$ -го етапу навантаження отримаємо залежності

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_0} \left( (1 + \nu_0) \sigma_{ij} - 3\nu_0 \sigma_0 \delta_{ij} \right) + \varepsilon_T \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^0 \quad (14)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{E(1 + \nu_0)}{E_0(1 + \nu)} \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^{(p)} + \left( 1 - \frac{E(1 + \nu_0)}{E_0(1 + \nu)} \right) \times \\ \times \left( \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij} \right) + \left( 1 - \frac{E(1 - 2\nu_0)}{E_0(1 - 2\nu)} \right) (\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \delta_{ij}$$

$\varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0)$  – теплова деформація;  $\varepsilon_T = \alpha_T (T)$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення;  $E_0, \nu_0$  – значення відповідно модуля Юнга  $E(T)$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu(T)$  при початковій температурі;  $\Delta_k e_{ij}^{(p)}$  – приріст компонент девіатора пластичних деформацій за етап.

Співвідношення (14) виражають узагальнений закон Гука для ізотропного однорідного тіла зі сталими параметрами пружності та додатковими деформаціями  $\varepsilon_{ij}^0$ , що враховують як пластичне деформування матеріалу, так і залежність механічних характеристик від температури [5].

Отже, розв'язання задачі термопластичності зведено до розв'язання на кожному етапі навантаження послідовності задач термопружності для однорідного ізотропного тіла з додатковими деформаціями, що залежать від напружено-деформованого стану і температури.

*Етап 2.* В момент часу  $\tau_* = \tau_k$ , коли порушується умова (5), здійснюємо перемикання керування (8) на керування, яке забезпечує виконання умови (9). Ця умова служить умовою спряження температурних режимів, визначених на першому та другому етапах керування, і використовується для визначення часу перемикання  $\tau_k$ . Отже, починаючи з моменту часу  $\tau_k$ , переходимо до розв'язання оберненої задачі термопластичності: за заданим допустимим обмеженням (9) визначаємо відповідну теплову дію – функцію керування  $u(x, \tau_*)$ .

Для визначення керування дискретний аналог відповідної задачі теплопровідності з невідомою тепер, крім температури, функцією  $u(x, \tau_*)$ , доповнюємо умовою (9), яка замикає цю систему рівнянь. Умову (9) записуємо через розподіл температури і додаткових деформацій на основі розв'язку задачі термопружності з додатковими деформаціями.

Невідомий в момент часу  $\tau_* = \tau_k$  розподіл пластичної деформації, а, отже, і керування, визначаємо методом послідовних наближень. За початкове наближення для розрахунку пластичних деформацій у мо-

мент часу  $\tau_* = \tau_k$  приймаємо розподіл пластичних деформацій у момент часу  $\tau_* = \tau_{k-1}$ . За формулами для  $\varepsilon_{ij}^0$  визначаємо початкове наближення додаткових деформацій і розв'язуємо розширену систему рівнянь (1)–(3), (6), (9), тобто визначаємо початкові наближення функції керування і температурного поля у тілі. За знайденим наближенням функції керування на основі розв'язку прямої задачі термопластичності визначаємо перше наближення розподілу пластичних деформацій  $\left(\varepsilon_{ij}^{(p)}\right)^{(k)}$ , а за формулами для  $\varepsilon_{ij}^0$  – перше наближення додаткових деформацій у момент часу  $\tau_* = \tau_k$ . У результаті розв'язання оберненої задачі за знайденим наближенням додаткових деформацій визначаємо нове наближення функції керування і температурного режиму. Процес послідовних наближень для моменту часу  $\tau_* = \tau_k$  продовжуємо до збігання з наперед заданою точністю двох послідовних наближень керування.

При досягненні функцією керування гранично допустимого значення здійснюємо перехід на перший етап алгоритму розв'язання задачі керування. З умови (8) визначаємо момент перемикання керування. Обчислення припиняємо при досягненні кінцевої мети нагрівання (7).

### 3. Числові результати.

Розглянуто реалізацію запропонованого алгоритму на прикладі оптимізації температурного режиму для довгого порожнистого циліндра, виготовленого із сталі EI-437 [5]. Приймали, що теплоізолюваний по внутрішній поверхні циліндр нагрівається через зовнішню поверхню тепловим потоком, який вибрано за функцію керування.

Величина  $\Gamma_p$  – міра накопиченої пластичної деформації в точці і компоненти девіатора пластичних деформацій  $e_{ij}^{(p)}$  взаємопов'язані. Зокрема, взаємозв'язок між їх приростами задається співвідношенням (13). Тому умова (15) задає також обмеження на величини  $e_{ij}^{(p)}$  і навпаки – обмеження на максимальне значення абсолютної величини однієї з компонент девіатора пластичних деформацій може бути виражене через обмеження (9) на  $\Gamma_p$ .

Відповідно до описаного вище алгоритму, побудову розв'язку задачі оптимізації здійснюємо поетапно.

На рисунках 1,2 наведено числові результати розв'язування задачі оптимізації для циліндра з внутрішнім безрозмірним радіусом  $k = R_1/R_2 = 0,5$ , де  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) – відповідно його внутрішній та зовнішній радіуси. Кривою 1 (суцільна лінія) на рис. 1 зображено поведінку в часі оптимального керування, коли  $\Gamma_p^* = 0,001$ ,  $T_* = 270^\circ\text{C}$  і  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,

а кривою 2 (суцільна лінія) – поведінку в часі максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, що відповідає знайденому керуванню. Тут  $\tau = \lambda_0 \tau_* / (c_V^0 R_2^2)$  – безрозмірний час;  $\lambda_0, c_V^0$  – значення коефіцієнта теплопровідності і питомої об’ємної теплоємності за початкової температури. Штрихова лінія 2 на рис. 1, яка продовжує суцільну, зображає поведінку в часі максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву у випадку, коли тепловий потік приймає гранично допустиме значення (штрихова лінія 1 на рис. 1) протягом усього процесу нагрівання і обмеження на інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву відсутнє.

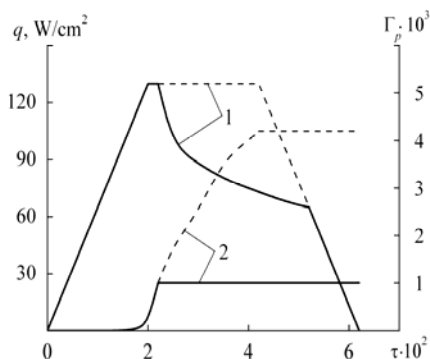


Рис.1. Поведінка за часом функції керування (лінія 1) та максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву (лінія 2) у циліндрі

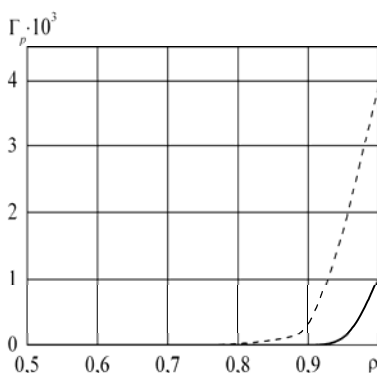


Рис.2. Розподіл за радіальною координатою інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву у циліндрі після зняття теплового навантаження

Розподіл за радіусом інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву після зняття теплового навантаження зображено на рис.2. Суцільна лінія відповідає режиму оптимального керування нагріванням

циліндра за наявності обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, а штрихова – режиму за відсутності цього обмеження. Як видно із рисунка, наявність обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву приводить також і до зменшення величини пластичної зони. Тут  $\rho = r/R_2$  – безрозмірна радіальна координата;  $r$  – радіальна координата.

Як показують дослідження, наявність обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву обмежує також і максимальне значення залишкових напружень, що дозволяє опосередковано керувати цією величиною.

Аналіз величин радіусів кривини траєкторій деформування максимально навантаженої точки циліндра, побудованих у двовимірному просторі Ільюшина [5], підтвердив правомірність використання для розрахунку напружено-деформованого стану циліндра визначальних співвідношень теорії процесів деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

### *Література*

1. Андреев Ю.Н. Оптимальное проектирование тепловых агрегатов / Ю.Н. Андреев. – М.: машиностроение, 1981. – 231 с.
2. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / В.М.Вигак. – Киев: Наукова думка, 1988. – 312 с.
3. Kushnir R.M. Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone / R.M.Kushnir, A.V.Yasinsky // J. Thermal Stresses. – 2010. – Vol.33. – P. 251-261.
4. Гудрамович В.С. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В.С.Гудрамович, А.Ф.Деменков. – К.: Наукова думка, 1991. – 176 с.
5. Шевченко Ю.Н. Термовязкопластичность / Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко. – К.: Наукова думка, 1987. – 263 с.
6. Ashida F. Control of transient thermoelastic displacement in a composite disk / F. Ashida, T.R. Tauchert // J. Thermal Stresses. – 2002. – Vol. 25. – P. 99-121.
7. Nyashin Y. Control of thermal stresses and strain / Y.Nyashin, V.Kiryukhin, F.Ziegler // J. Thermal Stresses. – 2000. – Vol. 23. – P. 309-326.
8. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О.Зенкевич, К.Морган. – М.: Мир, 1986. – 319 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.ф.-м.н., професором **Сулимом Г.Т.** (м. Львів)*



---

---

**OPTIMAL HEATING RATE IN THERMAL SENSITIVE BODIES  
BY RESTRICTIONS ON ENVIRONMENT TEMPERATURE  
AND ON PLASTIC STRAINS**

**R. M. Kushnir, A. V. Yasinsky**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova str., 3-b;  
e-mail: director@iapmm.lviv.ua*

*In this talk, the mathematical formulation and a solution algorithm for one-dimensional optimal speed-processing-control problem of heating thermo-sensitive bodies of the canonical shape is presented. A control function (the temperature of surrounding contacting with a part of the limiting surface, or the heat flux) is determined for transmitting the body from an initial thermal state into a required final one, which is characterized by an integral-average temperature, in the minimum time under constrains for both the control function and the maxim value of accumulated plastic shear-deformation.*

**Key words:** *optimal control, thermal stresses, inverse problem of thermo-mechanics, elasto-plastic state.*