УДК 515.12

НЕПЕРЕРВНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ ДОБУТКІВ ГІПЕРПРОСТОРІВ ВКЛЮЧЕННЯ ТА ЄМНОСТЕЙ

О. Я. Микицей, О. Р. Никифорчин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: oxana39@i.ua, oleh.nyk@gmail.com

Побудовано симетричні варіанти тензорних добутків нормованих регулярних неадитивних мір і доведено їх неперервність.

Ключові слова: *тензорний добуток, ємність.*

Відомо [1], що нормовані ємності (нормовані регулярні неадитивні міри) на довільному компакті (тобто компактному гаусдорфовому просторі) X утворюють компакт MX щодо слабкої* топології. Конструкція простору нормованих ємностей MX продовжується до функтора ємностей M у категорії компактів, який є функторіальною частиною монади ємностей [1]. Останній факт дозволяє означити тензорний добуток [1] довільних ємностей $c_1 \in MX$, $c_2 \in MY$. Наведемо без обґрунтування його остаточний вигляд: $c_1 \otimes c_2 = c \in M(X \times Y)$, де $F \subset X \times Y$ – замкнена, $c(F) \geq \alpha \in I = [0;1]$, якщо і тільки якщо існує замкнена $H \subset X$, для якої $c_1(H) \geq \alpha$, і для кожного $x \in H$ маємо $c_2(pr_2(H \cap (\{x\} \times Y))) \geq \alpha$. Саме зв'язком з монадою для неперервного функтора M пояснюється неперервність операції $\otimes$, її асоціативність (тобто для $c_1 \in MX$, $c_2 \in MY$, $c_3 \in MZ$ маємо $(c_1 \otimes c_2) \otimes c_3 = c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3)$ з точністю до ототожнення $(X\times Y)\times Z$ та $X\times(Y\times Z)$) та стійкість щодо переходу до спряжених ємностей. Нагадаємо, що ємність $\widetilde{c} = \varkappa X(c) \in MX$, спряжена до ємності $c \in MX$, визначається рівністю $\widetilde{c}(F) = 1 - c(\mathrm{X} \setminus F)$, і сукупність $\varkappa$ всіх відображень $\varkappa X : MX \to MX$ є автоізоморфізмом монади ємностей. Звідси випливає, що $\widetilde{c}_1 \otimes \widetilde{c}_2 = \widetilde{c_1 \otimes c_2}$ для всіх $c_1 \in MX$, $c_2 \in MY$.

Оскільки нормована ємність c на компакті X може моделювати гру з простором результатів X з погляду одного учасника, то тензорний добуток ємностей $c_1 \in MX$ та $c_2 \in MY X$ відповідає послідовному проведенню двох ігор в умовах невизначеності, причому на початку другої відомий результат першої. Цим пояснюється несиметричність (некомутативність) тензорного добутку, тобто невиконання рівності $(c_2 \otimes c_1) = Mp(c_1 \otimes c_2)$, де $p : X \times Y \to Y \times X$ – перестановка координат,

$Mp: M(X \times Y) \to M(Y \times X)$ – відповідна дія на неадитивні міри. Дійсно, добуток $c_2 \otimes c_1$ описує проведення першої гри, коли відомий результат другої.

Надалі $\odot: I \times I \to I$ та $\oplus: I \times I \to I$ – неперервні і відповідні одна одній трикутна норма і трикутна конорма, тобто операція $\odot$ асоціативна, комутативна, монотонна по обох аргументах, і 1 є її двосторонньою одиницею, а $\oplus$ визначається рівністю $\alpha\oplus\beta=1-(1-\alpha)\odot(1-\beta)$ для всіх $\alpha, \beta \in I$. Тоді $\odot$ можна розуміти як нечітку кон'юнкцію, а $\oplus$ – як нечітку диз'юнкцію.

Ми пропонуємо ввести симетричний добуток $\boxtimes: MX \times MY \to M(X \times Y)$ за формулою: $(c_1 \boxtimes c_2)(F) = \sup\{c_1(A) \odot c_2(B) | A \subset X, B \subset Y, A \times B \subset F\}$ для кожної замкненої $F \subset X \times Y$ та ємностей $c_1 \in MX$, $c_2 \in MY$. Теоретико-ігровий зміст цієї операції стане темою окремої публікації. Скажемо тільки, що вона описує паралельне і незалежне проведення двох ігор. Очевидно, що результат є ємністю, ця операція асоціативна і комутативна, але вже не визначається монадою, тому необхідна окрема перевірка її неперервності, яка є основним завданням даної статті.

Нагадаємо [1], що компактна гаусдорфова топологія на MX визначається передбазою з усіх множин вигляду $O_+(U, \alpha) = \{c \in MX | c(U) > \alpha\}$ та $O_-(F, \alpha) = \{c \in MX | c(F) < \alpha\}$, де $U \subset X$ – відкриті, $F \subset X$ – замкнені, $\alpha \in I$.

Теорема 1. *Відображення симетричного множення* $\boxtimes: MX \times MY \to M(X \times Y)$ *неперервне.*

Доведення. Потрібно довести відкритість у топології добутку на $MX \times MY$ прообразів під дією $\boxtimes$. Спершу покажемо відкритість прообразу $O_1 = \boxtimes^{-1}(O_+(U, \alpha)) \subset MX \times MY$, де $U \subset X \times Y$ – відкрита множина.

Нехай $(m_1, m_2) \in O_1$, тобто $(m_1 \boxtimes m_2)(U) > \alpha$, і існує така замкнена множина $H \subset X \times Y$, що $H \subset U$ і $(m_1 \boxtimes m_2)(H) > \alpha$, звідки існують такі замкнені $F \subset X$, $G \subset Y$, $F \times G \subset H \subset U$, що $m_1(F) \odot m_2(G) > \alpha$.

За неперервністю $\odot$ можемо вважати $m_1(F) > \beta$, $m_2(G) > \gamma$, де $\beta \odot \gamma > \alpha$.

Можна обрати відкриті околи OF, OG відповідних множин так, що $\overline{OF} \times \overline{OG} \subset U$. Тоді $m_1(OF) > \beta$, $m_2(OG) > \gamma$, звідки $m_1 \in O_+(OF, \beta)$, $m_2(OG) \in O_+(OG, \gamma)$.

Для всіх $m_1' \in O_+(OF, \beta)$, $m_2' \in O_+(OG, \gamma)$ маємо $m_1' \boxtimes m_2'\left(\overline{OF} \times \overline{OG}\right) \geq m_1'\left(\overline{OF}\right) \odot m_2'\left(\overline{OG}\right) > \beta \odot \gamma > \alpha$. Отже, $(m_1 \boxtimes m_2)(U) > \alpha$, тобто $O_1 \supset O_+(OF, \beta) \times O_+(OG, \gamma) \ni (m_1, m_2)$, чим доведено відкритість O_1.

Тепер розглянемо $O_2 = \boxtimes^{-1}(O_-(H, \alpha)) \subset MX \times MY$, де $H \subset X \times Y$ – замкнена множина.

Нехай $(m_1, m_2) \in O_2$, тобто $(m_1 \boxtimes m_2)(H) < \alpha$. Це означає, що для всіх замкнених $F \subset X$, $G \subset Y$, таких, що $F \times G \subset H$, виконано $m_1(F) \odot m_2(G) < \alpha' < \alpha$.

Як відомо, множини $\exp X$ та $\exp Y$ непорожніх замкнених підмножин відповідно компактів X та Y з топологіями Вієторіса [2] теж є компактами.

Розглянемо $W = \{(F, G) \subset \exp X \times \exp Y \mid F \times G \subset H\}$. Неважко перевірити, що ця множина замкнена в $\exp X \times \exp Y$ з топологією добутку, тому є компактною.

Нехай $m_1(F) < \beta$, $m_2(G) < \gamma$, де $\beta \odot \gamma > \alpha'$. Можна вибрати відкриті околи OF, OG відповідних множин так, що $m_1\left(\overline{OF}\right) < \beta$, $m_2\left(\overline{OG}\right) < \gamma$, тоді $m_1\left(\overline{OF}\right) \odot m_2\left(\overline{OG}\right) < \alpha'$.

Тоді для кожної пари $(F, G) \in W$ маємо відкритий окіл $\langle OF \rangle \times \langle OG \rangle$ у $\exp X \times \exp Y$. Всі такі околи утворюють відкрите покриття компакта W, з якого можна обрати скінченне підпокриття, тобто $W \subset OW = \bigcup\{\langle OF_i \rangle \times \langle OG_i \rangle \mid i =, \dots, n\}$. Зафіксуємо відповідні $\beta_i > m_1\left(\overline{OF_i}\right) < \beta$, $\gamma_i > m_2\left(\overline{OG_i}\right)$, $\beta_i \odot \gamma_i < \alpha'$.

Це означає, що для кожних замкнених $F' \subset X$, $G' \subset Y$, таких, що $F \times G \subset H$, виконано $F' \subset OF_i$, $G' \subset OG_i$, $m_1(F') \leq m_1\left(\overline{OF_i}\right) < \beta_i$, $m_2(G') \leq m_2\left(\overline{OG_i}\right) < \gamma_i$, для одного з $i = 1, \dots, n$. Залишається покласти $Om_1 = \bigcap_{i=1}^n O_{-1}\left(\overline{OF_i}, \beta_i\right)$, $Om_2 = \bigcap_{i=1}^n O_{-1}\left(\overline{OG_i}, \gamma_i\right)$, і помітити, що для кожних $m_1' \in Om_1$, $m_2' \in Om_2$, і замкнених $F' \subset X$, $G' \subset Y$, $F' \times G' \subset H$, маємо $m_1'(F') \odot m_2'(G') \leq m_1'\left(\overline{OF_i}\right) \odot m_2'\left(\overline{OG_i}\right) < \beta_i \odot \gamma_i > \alpha'$ для деякого $i = 1, \dots, n$ тому $(m_1' \boxtimes m_2')(H) \leq \alpha' < \alpha$.

Це означає, що $O_2 \supset Om_1 \times Om_2 \ni (m_1, m_2)$, і прообраз O_2 теж є відкритим. □

Зауважимо, що автоматично отримано коректність, асоціативність, комутативність та неперервність двоїстої операції симетричного додавання $c_1 \boxplus c_2 = \widetilde{\widetilde{c}_1 \boxtimes \widetilde{c}_2}$, яку можна означити і безпосередньо через операцію $\oplus$: для ємностей $c_1 \in MX$ та $c_2 \in MY$ і кожної замкненої $F \subset X \times Y$ величина $(c_1 \boxplus c_2)(F)$ рівна точній нижній грані $c_1(A) \oplus c_2(B)$ для всіх таких замкнених $A \subset X$, $B \subset Y$, що $F \subset (A \times Y) \bigcup (X \times B)$. Трактування операції $\boxplus$ з погляду нечіткої теорії ігор теж заслуговує окремої публікації.

Література

1. Заричный М.М. Функтор емкостей в категории компактов / М.М.Заричный, О.Р.Никифорчин // Мат. Сборник. – 2008. – 199(2). – С. 3-26.
2. Teleiko A. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces / A.Teleiko, M.Zarichnyi. – VNTL Publishers, Lviv, 1999. – (Math. Studies Monograph Series, vol. 5).

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.****,*
д.ф.-м.н., професором ***Лопушанським О.В*** *(м. Львів)*

CONTINUITY OF SYMMETRIC FACTORS OF HYPERSPACES OF INCLUSION AND CAPACITIES

Oksana Mykytsey, Oleg Nykyforchyn
Precarpathian National University named by Vasil Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko st., 57;
e-mail: oxana39@i.ua, oleh.nyk@gmail.com

Symmetric variants of tensor products of normed regular non-additive measures was constructed, and their continuity has been proved.

Key words: *tensor product, capacity.*