УДК 51(075.8)

ТУРНІРИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ТА НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

І. В. Федак

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника; 76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: Fedak_ivan @ rambler.ru

Розв'язана одна із задач Леонарда Ейлера.

Ключові слова: *турніри, проблеми, Ейлер.*

Важливими формами позакласної роботи з учнями є предметні олімпіади, конкурси та турніри.

На державному рівні турніри юних математиків започатковані у 1998 році і з кожним роком набували все більшої популярності серед учнів та творчо працюючих учителів математики.

В Івано-Франківській області аналогічні турніри проводяться з 2005 року на базі Обласного ліцею-інтернату для обдарованих дітей з сільської місцевості. Переможцем першого турніру стала команда Надвірнянського ліцею, а потім 5 років підряд тріумфували команди Фізико-технічного ліцею при Івано-Франківському національному технічному університеті нафти і газу. На сьомому турнірі їх гегемонію вдалося перервати команді «Париська Сорбонна» Парищенської ЗОШ І-ІІІ ступенів Надвірнянської районної ради, капітан якої став абсолютним переможцем обласного турніру в особистій першості.

Саме ця команда представляла Івано-Франківську область на XIV Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, який проходив 24-29 жовтня 2011 року у Львові. І вперше за чотирнадцять років проведення Всеукраїнських турнірів юних математиків сільська команда стала одним з переможців, а Чіх Володимир став першим лауреатом спеціального призу імені професора Лейфури В.М. як абсолютний переможець турніру в особистій першості, випередивши за набраними балами найближчого переслідувача майже вдвічі.

У процесі підготовки команди до турніру вдалося розв'язати проблему, яка була сформульована Ейлером понад 250 років тому, але досі залишалася невирішеною:

Доведіть, що існує така трійка натуральних чисел a, b, c, що кожне з чисел $a+b+c$, $ab+bc+ca$, $a^2+b^2+c^2$ та abc є точним квадратом. Дослідіть питання щодо скінченності чи нескінченності множини всіх таких трійок (числа однієї трійки не можуть бути отримані множенням відповідних чисел іншої трійки на те саме число).

Наводимо розв'язання даної задачі.

1. Неважко переконатися, що умову задовольняє трійка чисел:

$$a=136=8\cdot 17,\quad b=153=9\cdot 17,\ c=72=8\cdot 9.$$

При цьому отримуємо

$$a+b+c=19^2,\quad ab+bc+ca=204^2,\quad a^2+b^2+c^2=217^2,\quad abc=1224^2.$$

Зрозуміло, що розв'язками є також трійки чисел:

$$a=136n^2,\quad b=153n^2,\quad c=72n^2,\quad n\in \mathrm{N}.$$

Але їх отримуємо з початкової трійки множенням відповідних чисел на n^2.

2. Для знаходження інших трійок покладемо

$$a=x(x+y),\ \ b=y(x+y),\ \ c=xy,\quad x,y\in \mathrm{N}.$$

Тоді

$$abc=\left(xy\left(x+y\right)\right)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2=\left(x^2+xy+y^2\right)^2,$$

$$ab+bc+ca=2xy\left(x+y\right)^2,$$

$$a+b+c=x^2+3xy+y^2.$$

Таким чином, для розв'язування задачі достатньо знайти такі натуральні числа x,y, щоб точними квадратами були значення виразів $2xy$ та $x^2+3xy+y^2$.

Зокрема, числа $x=8,\ y=9,$ які відповідають знайденому вище розв'язку, цю вимогу задовольняють.

3. Нехай для взаємно простих натуральних чисел x,y виконуються рівності

$$2xy=r^2,\ \ x^2+3xy+y^2=t^2,\qquad r,t\in \mathrm{N}.$$

Позначимо

$$|x-y|=q,\ \ x+y=s$$

і покладемо

$$X=2r^2t^2>x,\ \ Y=q^2s^2>y.$$

Оскільки

$$2XY=\left(2qrst\right)^2,$$

$$X^2+3XY+Y^2=\left(X+Y+q^2r^2\right)^2,$$

то пара натуральних чисел X,Y також є розв'язком задачі.

4. Покажемо, що числа X,Y взаємно прості. Справді, з рівності $2xy=r^2$ і взаємної простоти чисел x,y випливає, що числа x,y різної парності, а отже, числа q,s непарні. Крім того, справджуються рівності:

$$q^2+2r^2=s^2,\ \ 2s^2+r^2=2t^2,\ \ q^2+4t^2=5s^2.$$

Припустивши, що X, Y не є взаємно простими, з цих рівностей для кожного з можливих при цьому чотирьох випадків:

$$НСД(q,r) \vdots p, \; НСД(s,r) \vdots p, \; НСД(q,t) \vdots p, \; НСД(s,t) \vdots p,$$

де p – просте число, отримаємо, що числа q, s одночасно діляться на p. Тоді числа x, y теж діляться на p, що суперечить умові про їх взаємну простоту.

Таким чином, пара X, Y не може бути отримана з жодної іншої пари множенням на те саме число.

5. Нехай тепер

$$x_1 = 8, \quad y_1 = 9,$$

$$x_{n+1} = 4x_n y_n \left(x_n^2 + 3x_n y_n + y_n^2\right),$$

$$y_{n+1} = \left(x_n - y_n\right)^2 \left(x_n + y_n\right)^2, \quad n \in \mathrm{N}.$$

З доведеного випливає, що трійки чисел

$$a_n = x_n\left(x_n + y_n\right), \quad b_n = y_n\left(x_n + y_n\right), \quad c_n = x_n y_n$$

є розв'язками задачі для кожного натурального n. При цьому жодну з цих трійок не можна отримати множенням чисел іншої трійки на те саме число.

6. *Висновок.* Існує нескінченна кількість трійок натуральних чисел $a, b, c,$ визначених вказаною вище рекурентною послідовністю, таких, що кожне з чисел $a+b+c,$ $ab+bc+ca,$ $a^2+b^2+c^2$ та abc є точним квадратом. При цьому числа жодної трійки не є добутками відповідних чисел іншої трійки на те саме число.

7. Додатково були знайдені всі пари взаємно простих чисел $x, y,$ для яких вираз $x^2+3xy+y^2$ є точним квадратом. Для цього ми розглядали рівність

$$x^2 + 3xy + y^2 = n^2$$

як квадратне рівняння відносно x з натуральними $y, n.$ Для раціональності його коренів дискримінант такого рівняння має бути точним квадратом, тобто маємо

$$9y^2 - 4\left(y^2 - n^2\right) = m^2 \Leftrightarrow 5y^2 = (m-2n)(m+2n).$$

Пари взаємно простих чисел x, y отримуємо лише за умови, що хоч один множник у правій частині останньої рівності не має дільників числа $y.$ З врахуванням цієї умови отримали чотири набори пар чисел $x, y,$ залежних від натурального параметра k:

1) $y = 2k+1, \; x = k^2 - 2k, \; k \ge 3,$

$$x^2 + 3xy + y^2 = \left(k^2 + k - 1\right)^2;$$

2) $x = 8k, \; y = 4k^2 - 12k + 5, \; k \ge 3,$

$$x^2+3xy+y^2=\left(4k^2-5\right)^2,\ k\neq 5l;$$

3) $$y=2k+1,\ x=5k^2+2k,$$
$$x^2+3xy+y^2=\left(5k^2+5k+1\right)^2;$$

4) $$x=8k,\ y=20k^2-12k+1,$$
$$x^2+3xy+y^2=\left(20k^2-1\right)^2.$$

Зокрема, у випадку 4) при $k=1$ отримуємо пару $x_1=8,\ y_1=9,$ а у випадку 3) при $k=\frac{1}{2}\left(17^2-1\right)$ матимемо

$$x_2=2\cdot\left(2\cdot8\cdot9\right)\left(8^2+3\cdot8\cdot9+9^2\right)=2\cdot12^2\cdot19^2,\quad y_2=\left(8-9\right)^2\left(8+9\right)^2=17^2.$$

Проте виявити серед них хоч одну пару чисел $x, y,$ відмінну від елементів знайденої вище послідовності пар $x_n, y_n,$ для якої $2xy$ також є точним квадратом, так і не вдалося.

Стаття надійшла до редакційної колегії 03.12.2012 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,
академіком НАН України ***Перестюком М.О.*** *(м. Київ),*
к.ф.-м.н., доцентом ***Гургулою С.І.***

ON TOURNAMENTS OF YUNG MATHEMATICIANS AND UNSOLVED MATHEMATICAL PROBLEMS

I. V. Fedak
Precarpathian National University by V. Stefanyc;
76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

One Leonard Euler problem has solved.
Key words: *tournaments, problems, Euler.*