

УДК 629.83

## ВІДХИЛЕННЯ РОТОРА ГІРОКОМПАСА НА РУХОМІЙ ОСНОВІ

К. Г. Левчук<sup>1</sup>, І. В. Цідило<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»; 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37;  
e-mail: [k.levchuk@kpi.ua](mailto:k.levchuk@kpi.ua)

<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
e-mail: [tm@nung.edu.ua](mailto:tm@nung.edu.ua)

Отримано математичну модель гірокомпаса на рухомій основі. Для інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь застосовано метод послідовних наближень Пікара-Пеано. Досліджено динаміку гірокомпаса до другого наближення. Відхилення гірокомпаса від заданого положення отримані методом усереднення.

**Ключові слова:** гірокомпас, метод Пікара-Пеано, відхилення рамок гіроскопа, метод усереднення.

**Вступ.** Гіроскопічний компас (ГК) – триступеневий гіроскоп, головна вісь якого відтворює просторове положення полуденної лінії, які використовують для керування курсом рухомого об'єкта, а також в артилерії, геодезії та для виконання маркшейдерських робіт. ГК обладнані всі військові кораблі та торпедні катера, підводні човни, морські торговельні, пасажирські, риболовецькі судна.

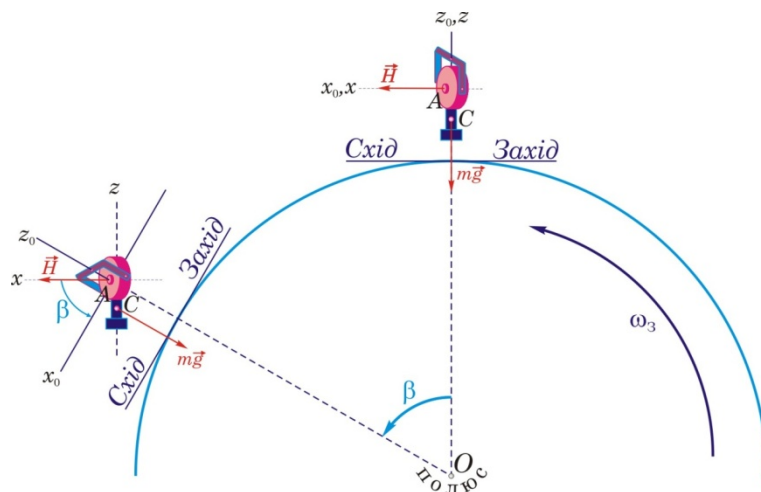


Рис.1. Принцип роботи гірокомпаса

На рис. 1 точка  $C$  – центр ваги ГК зміщений відносно точки підвішування  $A$  на відстань  $AC = l$ .

**Принцип роботи гірокомпаса.** ГК являє собою поєднання триступеневого гіроскопа з горизонтальним положенням головної осі й фізичного маятника. Маятник з'єднаний з гіроскопом так, що при відхиленні головної осі від площини горизонту виникає момент відносно горизонтальної осі підвісу ротора (рис. 1).

У цьому положенні гіроскоп можна вважати вільним (астатичним), оскільки момент сили ваги  $m\vec{g}$  відносно точки підвішування  $A$ , який називають маятниковим моментом, дорівнює нулю, так як лінія дії сили ваги  $m\vec{g}$  проходить через точку  $A$ ,  $Ax_0z_0$  – площина природного горизонту,  $\beta$  – кут, який складе головна вісь  $\vec{H}$  гірокомпаса з горизонтом, тобто підніметься над площиною горизонту  $Ax_0z_0$ . При цьому сила ваги  $m\vec{g}$ , спрямована завжди вздовж вискової лінії (вертикалі), створює маятниковий момент  $M_y = mgl \sin \beta$  відносно вертикальної осі  $Ay$ , під дією якого ГК починає здійснювати прецесійний рух навколо вертикальної осі  $Az_0$  у напрямку полюса  $O$ . В результаті прецесійного руху кут відхилення головної осі  $\vec{H}$  від площини меридіана  $Ay_0z_0$  буде зменшуватись: головна вісь ГК прискорено наближатися до меридіана, оскільки кут  $\beta$  підйому кінця осі гіроскопа неперервно збільшується, що приводить до збільшення маятникового моменту і, як наслідок, кутової швидкості прецесії ГК. Одночасно швидкість підйому головної осі ГК по мірі наближення до площини меридіана зменшується і перетворюється в нуль, коли вісь збігатиметься з площиною меридіана. В результаті його вісь устанеться у напрямі на північ. Отже, ротор ГК є одночасно гіроскопом і фізичним маятником, котрий може коливатись навколо осі  $Ay$  внутрішньої рамки карданового підвісу. На нерухомій відносно Землі основі плече цього маятника за допомогою сил ваги встановлюється по вертикалі, а перпендикулярна до нього вісь обертання ротора гіроскопа розміщується у горизонтальній площині. Після запуску ГК розпочинається “боротьба” між маятником і гіроскопом – кожний з них намагається виявити свої властивості: гіроскоп – зберегти положення головної осі незмінним у просторі, маятник – встановити своє плече вздовж вертикалі, що змінює своє положення у просторі внаслідок обертання Землі.

**Математична модель гірокомпаса на рухомій основі.** Розглянемо роботу ГК на кораблі. Корабель може здійснювати будь-які розвороти, але вісь ГК завжди буде вказувати напрям на північ. Щоб визначити положення поздовжньої осі корабля по відношенню до площини меридіана, в ГК, як і в гіромагнітному компасі, використовують горизонтальний диск з поділками, який закріплений на осі зовнішньої рамки кар-

данового підвісу ГК. У сучасних ГК замість диска встановлюють обертові трансформатори, котрі також дозволяють передавати показання ГК до різних споживачів.

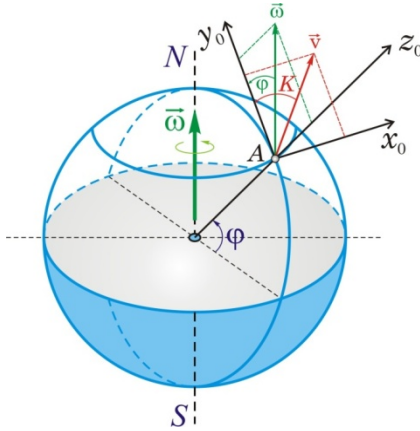


Рис.2. Нерухома система координат

У якості нерухомої системи координат прийемо земну систему  $Ax_0y_0z_0$ , орієнтовану географічно. Осі  $Ax_0$  і  $Ay_0$  розмістимо в площині горизонту: вісь  $Ax_0$  спрямуємо по дотичній до паралелі на схід, вісь  $Ay_0$  – по дотичній до меридіана на північ (рис.2). Запишемо проекції кутової швидкості повороту опорної системи координат на ці осі

$$\begin{aligned} \omega_{0x} &= -\frac{v \cos K}{R}; \\ \omega_{0y} &= \omega \cos \varphi + \frac{v \sin K}{R}; \\ \omega_{0z} &= \omega \sin \varphi + \frac{v \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі,  $R$  – радіус Землі,  $v$  – швидкість об'єкта,  $K$  – курс об'єкта.

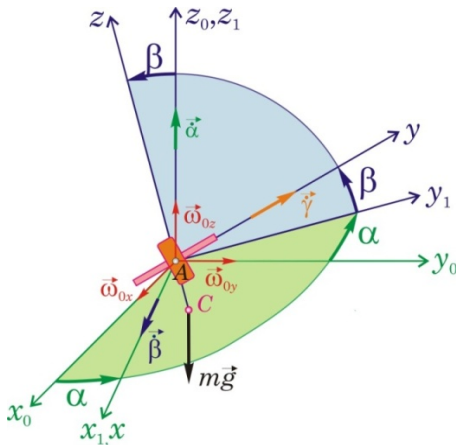


Рис.3. Рухома система координат

Положення рухомої системи координат будемо описувати за допомогою осей Резаля  $Axyz$  (рис. 2). Осі Резаля повернуті відносно опорної системи  $Ax_0y_0z_0$  на кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Головна вісь гіроскопа збігається з віссю  $Ay$ . Точка  $C$  характеризує положення центра мас системи “гіроскоп+маятник”.

Для отримання рівнянь руху ГК скористаємось системою рівнянь Лагранжа другого роду.

$$T = \frac{1}{2} [J_e (\omega_x^2 + \omega_z^2) + J_O \omega_y^2], \quad (2)$$

де  $J_e, J_O$  – екваторіальний і осьовий моменти інерції ГК,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекція суми кутових швидкостей абсолютного руху ротора

$\vec{\omega} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$  і опорної системи  $\vec{\omega}_0$  на осі системи координат, жорстко пов'язаних з ГК:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\beta} + \omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha; \\ \omega_y &= (-\omega_{0x} \sin \alpha + \omega_{0y} \cos \alpha) \cos \beta + (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \sin \beta + \dot{\gamma}; \\ \omega_z &= (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \sin \beta + (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \cos \beta,\end{aligned}\quad (3)$$

У випадку розігнаного ротора перше рівняння системи матиме вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = J_O \omega_y = H = \text{const}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0.$$

З урахуванням (3) після диференціювання виразу для кінетичної енергії (2) отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= J_e \omega_z \cos \beta + J_O \omega_y \sin \beta = J_e [(\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \cos^2 \beta + \\ &+ \frac{1}{2} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \sin 2\beta] + H \sin \beta; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= J_e [\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \dot{\beta} \sin 2\beta + \frac{1}{2} \dot{\alpha} (\omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha) \times \\ &\times \sin 2\beta + \dot{\beta} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \cos 2\beta] + H \dot{\beta} \cos \beta; \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= J_e \left[ -\dot{\beta} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) + \frac{1}{2} (\omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha) \times \right. \\ &\times (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \sin 2\beta - \left. \left( \frac{1}{2} (\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2) \sin 2\alpha - \omega_{0x} \omega_{0y} \cos 2\alpha \right) \cos^2 \beta \right] - \\ &- H (\omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha) \cos \beta; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= J_e \omega_x = J_e (\dot{\beta} + \omega_{0x} \cos \alpha + \omega_{0y} \sin \alpha); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= J_e [\ddot{\beta} - \dot{\alpha} (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha)]; \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= J_e \left[ -\frac{1}{2} ((\omega_{0z} + \dot{\alpha})^2 - (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha)^2) \sin 2\beta + \right. \\ &+ (\omega_{0z} + \dot{\alpha}) (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \cos 2\beta \left. \right] + \\ &+ H [(\omega_{0z} + \dot{\alpha}) \cos \beta + (\omega_{0x} \sin \alpha - \omega_{0y} \cos \alpha) \sin \beta].\end{aligned}\quad (4)$$

Оскільки  $Q_\alpha = M_{z_0}$ ,  $Q_\beta = M_x$  – моменти зовнішніх сил, якими для ГК є сили інерції  $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ , зумовлені прискоренням об'єкта  $\vec{a}$ , і вагою маятника  $m\vec{g}$ , спрямованою протилежно осі  $Az_0$  під час всього руху і прикладеною у точці  $C$  – центрі мас маятника. Так як момент сил визначається формулою

$$\vec{M}_A = \vec{AC} \times (\vec{\Phi} + m\vec{g}),$$

$$\begin{aligned} \text{то} \quad Q_\alpha &= M_{z_0} = m \left[ x_{0C} (g_{0y} - a_{0y}) - y_{0C} (g_{0x} - a_{0x}) \right]; \\ Q_\beta &= M_x = m \left[ y_C (g_z - a_z) - z_C (g_y - a_y) \right], \\ \text{де} \quad g_y &= -g \sin \beta; \quad g_z = -g \cos \beta; \quad g_{0x} = 0; \quad g_{0y} = 0; \\ a_y &= -a_{0x} \sin \alpha \cos \beta + a_{0y} \cos \alpha \cos \beta + a_{0z} \sin \beta; \\ a_z &= a_{0x} \sin \alpha \sin \beta - a_{0y} \cos \alpha \sin \beta + a_{0z} \cos \beta; \\ y_C &= 0; \quad z_C = -l; \quad x_{0C} = -l \sin \alpha \sin \beta; \quad y_{0C} = l \cos \alpha \sin \beta; \end{aligned}$$

Отже, узагальнені сили

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= ml \left[ a_{0x} \cos \alpha + a_{0y} \sin \alpha \right] \sin \beta; \\ Q_\beta &= ml \left[ (a_{0x} \sin \alpha - a_{0y} \cos \alpha) \cos \beta - (a_{0z} + g) \sin \beta \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді рівняння Лагранжа другого роду згідно (4) і (5) набувають вигляду

$$\begin{aligned} J_e \left[ \ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \left( \dot{\alpha} + \omega \sin \varphi + \frac{v}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi \right) \dot{\beta} \sin 2\beta - 2\dot{\beta} (\omega \cos \varphi \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha)) \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \left( \omega \sin \varphi + \frac{v}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi \right) (\omega \cos \varphi \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{v}{R} \cos (K + \alpha)) \sin 2\beta + \left( \frac{1}{2} \left( \left( \omega \cos \varphi + \frac{v}{R} \sin K \right)^2 - \left( \frac{v}{R} \cos K \right)^2 \right) \sin 2\alpha + \right. \\ \left. + \left( \omega \cos \varphi + \frac{v}{R} \sin K \right) \frac{v}{R} \cos K \cos 2\alpha \right) \cos^2 \beta \right] + H \left[ (\dot{\beta} + \omega \cos \varphi \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{v}{R} \cos (K + \alpha)) \cos \beta \right] = ml \left[ a_{0x} \cos \alpha + a_{0y} \sin \alpha \right] \sin \beta; \\ J_e \left[ \ddot{\beta} + \dot{\alpha} \left( \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha) \right) + \frac{1}{2} \left( \left( \omega \sin \varphi + \frac{v \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi + \dot{\alpha} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha) \right)^2 \right) \sin 2\beta \right] - H \left[ \left( \omega \sin \varphi + \frac{v \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi + \dot{\alpha} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \beta - \left( \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin (K + \alpha) \right) \sin \beta \right] = \\ = ml \left[ (a_{0x} \sin \alpha - a_{0y} \cos \alpha) \cos \beta - (a_{0z} + g) \sin \beta \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Отримані нелінійні диференціальні рівняння (6) є динамічними рівняннями руху гіроскопа.

Отже, виникає задача асимптотичного інтегрування рівнянь руху ротора ГК на рухомій основі. В гіроскопії такого типу задачі розв'язують методом усереднення [1,6] шляхом зведення до регулярно збуреним рівнянням, або ці ж рівняння зводять до сингулярно збуреним й застосовують метод О. М. Тихонова [8]. Для розв'язання даної задачі

застосуємо метод послідовних наближень Пікара-Пеано, бо як відомо [2, 6], рівняння складені для кожного наближення інтегруються в елементарних функціях і можуть бути використані для побудови асимптотичного розв'язку при довільних початкових умовах, при цьому досить малими параметрами будемо нехтувати.

Розглянемо рух ГК для початкових умов

$$\alpha(0) = \alpha_0; \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0; \quad \beta(0) = \beta_0; \quad \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0. \quad (7)$$

Рівняння (6) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} J_e \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + H \dot{\beta} \cos \beta &= Q_1(\alpha, \beta); \\ J_e \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta &= Q_2(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (9)$$

в яких праві частини рівнянь

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha, \beta) &= -J_e [(\dot{\alpha} + a) \dot{\beta} \sin 2\beta - 2\dot{\beta} c \cos^2 \beta] + \\ &+ J_e [0,5ad \sin 2\beta - (0,5(b^2 - k^2) \sin 2\alpha + bk \cos 2\alpha) \cos^2 \beta] - \\ &- Hd \cos \beta + ml [a_{0x} \cos \alpha + a_{0y} \sin \alpha] \sin \beta; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q_2(\alpha, \beta) &= -J_e \dot{\alpha} c - 0,5J_e ((a + \dot{\alpha})^2 - c^2) \sin 2\beta - \\ &- H(a \cos \beta - c \sin \beta) + ml [(a_{0x} \sin \alpha - a_{0y} \cos \alpha) \cos \beta - \\ &- (a_{0z} + g) \sin \beta]. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут позначено:  $a = \omega \sin \varphi + \frac{v}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi$ ;  $b = \omega \cos \varphi + \frac{v}{R} \sin K$ ;

$$c = \omega \cos \varphi \cos \alpha + \frac{v}{R} \sin(K + \alpha); \quad d = \omega \cos \varphi \sin \alpha - \frac{v}{R} \cos(K + \alpha);$$

$$k = \frac{v}{R} \cos K.$$

Побудуємо розв'язок системи диференціальних рівнянь (9) методом послідовних наближень. Шукатимемо розв'язок системи у формі рядів

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots; \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots$$

Підставимо ряди у систему рівнянь (9), розклавши тригонометричні функції у ряд Тейлора в околиці початкових кутів  $\alpha_0$  і  $\beta_0$ , заливши члени до другого порядку мализни, тоді

$$\begin{aligned} J_e (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 + \dots) (\cos^2 \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \cos 2\beta_0 - \dots) + \\ + H (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) (\cos \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) = \\ = Q_1(\alpha, \beta); \\ J_e (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) - H (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots) (\cos \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \\ - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) = Q_2(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (12)$$

де головний момент зовнішніх сил

$$\begin{aligned}
Q_1(\alpha, \beta) = & -J_e \left[ (a + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots)(\sin 2\beta_0 + \right. \\
& + 2(\beta_1 + \beta_2) \cos 2\beta_0 - 4\beta_1^2 \sin 2\beta_0 - \dots) - 2c(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dots) \times \\
& \times (\cos^2 \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \sin 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \cos 2\beta_0 - \dots) \left. \right] + \\
& + J_e \left[ 0,5ad (\sin 2\beta_0 + 2(\beta_1 + \beta_2) \cos 2\beta_0 - 4\beta_1^2 \sin 2\beta_0 - \dots) - \right. \\
& - (0,5(b^2 - k^2)(\sin 2\alpha_0 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2\alpha_0 - 4\alpha_1^2 \sin 2\alpha_0 - \dots) + \\
& + bk(\cos 2\alpha_0 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) \sin 2\alpha_0 - 4\alpha_1^2 \cos 2\alpha_0 + \dots)) (\cos^2 \beta_0 - \\
& \times (\beta_1 + \beta_2) \sin 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \cos 2\beta_0) \left. \right] - Hd (\cos \beta_0 - (\beta_1 + \beta_2) \times \\
& \times \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) + ml \left[ a_{0x} (\cos \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_0 - \right. \\
& - \alpha_1^2 \cos \alpha_0 + \dots) + a_{0y} (\sin \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_0 - \alpha_1^2 \sin \alpha_0 + \\
& + \dots) \left. \right] (\sin \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cos \beta_0 - \beta_1^2 \sin \beta_0 - \dots); \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(\alpha, \beta) = & -J_e (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)c - 0,5J_e \left( (a + \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots)^2 - c^2 \right) \times \\
& \times (\sin 2\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cos 2\beta_0 - 2\beta_1^2 \sin 2\beta_0 - \dots) - H \left[ a (\cos \beta_0 - \right. \\
& - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) - c (\sin \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cos \beta_0 - \\
& - \beta_1^2 \sin \beta_0 + \dots) \left. \right] + ml \left[ a_{0x} (\sin \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_0 - \alpha_1^2 \sin \alpha_0 + \right. \\
& + \dots) - a_{0y} (\cos \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_0 - \alpha_1^2 \cos \alpha_0 + \dots) \left. \right] (\cos \beta_0 - \\
& - (\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_0 - \beta_1^2 \cos \beta_0 + \dots) - ml (a_{0z} + g) (\sin \beta_0 + \\
& + (\beta_1 + \beta_2) \cos \beta_0 - \beta_1^2 \sin \beta_0 + \dots). \quad (14)
\end{aligned}$$

Тоді для першого наближення згідно (13) і (14) отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
J_e \ddot{\alpha}_1 \cos^2 \beta_0 + \dot{\beta}_1 \left[ H \cos \beta_0 - J_e (2c \cos^2 \beta_0 - a \sin 2\beta_0) \right] + \\
+ \alpha_1 \left[ J_e ((b^2 - k^2) \cos 2\alpha_0 + 2bk \sin 2\alpha_0) \cos^2 \beta_0 + ml \sin \beta_0 \times \right. \\
\times (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \left. \right] - \beta_1 \left[ Hd \sin \beta_0 + J_e (ad \cos 2\beta_0 + \right. \\
+ (0,5(b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - bk \cos 2\alpha_0) \sin 2\beta_0) + ml \cos \beta_0 \times \\
\times (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \left. \right] = 0; \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_e \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}_1 \left[ J_e (c + a \sin 2\beta_0) - H \cos \beta_0 \right] + \beta_1 \left[ -H (a \sin \beta_0 + \right. \\
+ c \cos \beta_0) + 0,5J_e (a^2 - c^2) \cos 2\beta_0 + ml \left( (a_{x0} \sin \alpha_0 - a_{y0} \cos \alpha_0) \times \right. \\
\times \sin \beta_0 + (a_{0z} + g) \cos \beta_0) \left. \right] - \alpha_1 ml (a_{x0} \cos \alpha_0 + a_{y0} \sin \alpha_0) \cos \beta_0 = 0,
\end{aligned}$$

характеристичне рівняння системи однорідних диференціальних рівнянь (15)

$$\begin{vmatrix} J_e \lambda^2 \cos^2 \beta_0 + A_1 & \lambda (H \cos \beta_0 - B_1) - B_2 \\ \lambda (A_2 - H \cos \beta_0) - A_3 & J_e \lambda^2 + B_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

де  $A_1 = J_e \left( (b^2 - k^2) \cos 2\alpha_0 + 2bk \sin 2\alpha_0 \right) \cos^2 \beta_0 + ml \sin \beta_0 \times$   
 $\times (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0)$ ;

$$A_2 = J_e (c + a \sin 2\beta_0); \quad A_3 = ml (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \cos \beta_0;$$

$$B_1 = J_e (2c \cos^2 \beta_0 - a \sin 2\beta_0);$$

$$B_2 = Hd \sin \beta_0 + J_e (ad \cos 2\beta_0 + (0,5(b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - bk \cos 2\alpha_0) \times$$

$$\times \sin 2\beta_0) + ml \cos \beta_0 (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0);$$

$$B_3 = -H (a \sin \beta_0 + c \cos \beta_0) + 0,5 J_e (a^2 - c^2) \cos 2\beta_0 +$$

$$+ ml \left( (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \sin \beta_0 + (a_{0z} + g) \cos \beta_0 \right).$$

Значимо, що коефіцієнти  $A_i, B_i$  ( $i=1,2,3$ ) стали величини, що визначаються початковими умовами, кутовою швидкістю Землі ( $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$  рад/с), радіусом Землі ( $R = 6300$  км), географічною широтою місця і швидкістю руху основи гірокомпаса. У випадку розігнаного ротора характеристичне рівняння (16) приймає вигляд

$$J_e^2 \lambda^4 \cos \beta_0 + H^2 \lambda^2 \cos \beta_0 - H^2 \lambda d \sin \beta_0 = 0. \quad (17)$$

Оскільки рівняння (16) зводиться до кубічного, дискримінант якого  $D = -J_e^2 H^4 \cos^2 \beta_0 (4H^2 \cos^4 \beta_0 + 27J_e^2 d^2 \sin^2 \beta_0) < 0$ , то характеристичне рівняння має один нульовий корінь  $\lambda_1 = 0$ ; один дійсний  $\lambda_2 = h > 0$  і два комплексно-спряжених корні  $\lambda_{3,4} = -p \pm i\omega_0$ .

Отже, розв'язок системи (15) для швидкості відхилення ротора гірокомпаса на рухомій основі у першому наближенні

$$\dot{\alpha}_1 = h C_{\alpha 1} e^{ht} + A_{\alpha 1} \omega_0 e^{-pt} \sin(\omega_0 t + \delta_{\alpha 1});$$

$$\dot{\beta}_1 = h C_{\beta 1} e^{ht} + A_{\beta 1} \omega_0 e^{-pt} \sin(\omega_0 t + \delta_{\beta 1}), \quad (18)$$

На зразок, нехай ротор гірокомпаса – однорідний сталевий циліндр радіусом  $r = 3$  см і висотою  $h = 2$  см. Маса такого ротора  $m = 0,46$  кг, вага  $mg = 4,5$  Н, момент інерції ротора ГК відносно осі симетрії  $J_O = 0,5mr^2 = 2,07 \cdot 10^{-4}$  кг·м<sup>2</sup>, а екваторіальний момент інерції

$$J_e = 0,25m \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right) = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2. \quad \text{При кутовій швидкості}$$

$\omega_y = 20000$  об/хв = 2094 рад/с кінетичний момент ГК  $H = 0,433$  Нм·с.

При початкових умовах  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  і курсі  $K = 30^\circ$  на широті  $\varphi = 60^\circ$ , швидкості судна  $v = 100$  км/год = 27,8 м/с:

$$a = 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}; \quad b = c = 4 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}; \quad k = -d = -4 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}.$$



Якщо центр мас нашого ГК зміщений від центра карданового підвісу на величину  $l = 0,1$  мм, а прискорення основи  $a_0 = 1$  м/с<sup>2</sup>, то

$$A_1 = 4,6 \cdot 10^{-5} \sin \beta_0 (\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0), \text{ Нм};$$

$$A_2 = 4,8 \cdot 10^{-9} - 8,3 \cdot 10^{-9} \sin 2\beta_0, \text{ Нм}\cdot\text{с};$$

$$A_3 = 4,6 \cdot 10^{-5} \cos \beta_0 (\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0) \text{ Нм};$$

$$B_1 = 9,6 \cdot 10^{-9} - 8,3 \cdot 10^{-9} \sin 2\beta_0, \text{ Нм}\cdot\text{с};$$

$$B_2 = 1,73 \cdot 10^{-6} \sin \beta_0 + 4,6 \cdot 10^{-5} (\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0) \cos \beta_0, \text{ Нм};$$

$$B_3 = \left[ (4,6(\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0) - 3) \sin \beta_0 + (10,8 - 1,73) \cos \beta_0 \right] \cdot 10^{-5}, \text{ Нм}.$$

Тоді характеристичне рівняння при заданих початкових умовах

$$14 \cdot 10^{-8} \lambda^4 + 1,88 \lambda^2 = 0$$

має наступні корні  $\lambda_{1,2} = 0$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm 3640i$  ( $\omega_0 = 3640$  рад/с – циклічна частота власних (нутаційних) коливань ротора ГК, що відповідає частоті 580 Гц). Знайденим кореням відповідає загальний розв’язок по куту повороту зовнішньої рамки й кутова швидкість її відхилення

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_{\alpha 0} + C_{\alpha 1} t + A_{\alpha 1} \sin(3640t + \delta_{\alpha 1}); \\ \dot{\alpha}_1 &= C_{\alpha 1} + 3640 A_{\alpha 1} \cos(3640t + \delta_{\alpha 1}), \end{aligned} \quad (19)$$

після підстановки котрих у будь-яке рівняння системи (15), знаходимо кутову швидкість і кут відхилення внутрішньої рамки ГК

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= 3640 A_{\beta 1} \sin(3640t + \delta_{\beta 1}); \\ \beta_1 &= C_{\beta 0} - A_{\beta 1} \cos(3640t + \delta_{\beta 1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Для довільних початкових умов по кутам відхилення рамок розраховуємо сталі інтегрування:  $C_{\alpha 0} = -2,75 \cdot 10^{-4} \dot{\beta}_0$ ;  $C_{\beta 0} = 2,75 \cdot 10^{-4} \dot{\alpha}_0$

$C_{\alpha 1} = 0$ ;  $A_{\alpha 1} = 2,75 \cdot 10^{-4} \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2}$  – амплітуда;  $\delta_{\alpha 1} = \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0}$  – зсув

фаз. Тоді рівності (19) і (20) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2,75 \cdot 10^{-4} \left[ \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \sin \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right) - \dot{\beta}_0 \right]; \\ \dot{\alpha}_1 &= \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \cos \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right); \\ \beta_1 &= 2,75 \cdot 10^{-4} \left[ \dot{\alpha}_0 - \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \cos \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right) \right]; \\ \dot{\beta}_1 &= \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2} \sin \left( 3640t + \arctg \frac{\dot{\beta}_0}{\dot{\alpha}_0} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

З аналізу рівнянь (21) можна зробити висновок, що якщо основа ГК рухома, то її рух не породжує відхилень рамок ротора гіроскопа.

Щоб зменшити амплітуду нутаційних коливань ГК необхідно забезпечити на початку руху якомога менші кутові швидкості рамок карданового підвісу.

Зазначимо також, що з одного боку для зменшення відхилення ГК необхідно забезпечувати якомога більшу кутову швидкість головної осі ГК, а з другого – необхідно враховувати одне з основних обмежень, пов'язаних з межами міцності матеріалу ротора внаслідок виникнення при обертанні відцентрових сил інерції. Вибрана для нашого ГК кутова швидкість зумовлює швидкість точок на обводі ротора 130 м/с (майже 470 км/год) і як наслідок ці точки відчувають «перенавантаження» близько 13400g.

Для запису система (9) у другому наближенні знову скористаємось виразами (13) і (14)

$$\begin{aligned}
 & J_e \ddot{\alpha}_2 \cos^2 \beta_0 - B_1 \dot{\beta}_2 + H \dot{\beta}_2 \cos \beta_0 + A_1 \alpha_2 + 2J_e \alpha_2 b k \sin 2\alpha_0 \times \\
 & \times \cos^2 \beta_0 - (H \sin \beta_0 + J_e a \cos 2\beta_0) d \beta_2 = \\
 & = J_e (\ddot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 - \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 - 2c \dot{\beta}_1 \beta_1 - 2ad \beta_1^2) \sin 2\beta_0 - 2a J_e \dot{\beta}_1 \beta_1 \cos 2\beta_0 + \\
 & + H \beta_1 (\dot{\beta}_1 \sin \beta_0 + d \beta_1 \cos 2\beta_0) + J_e [(b^2 - k^2)(\beta_1^2 \sin 2\alpha_0 \cos 2\beta_0 + \\
 & + \alpha_1 \beta_1 \cos 2\alpha_0 \sin 2\beta_0 + 2\alpha_1^2 \sin 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0) - 2bk(\beta_1^2 \cos 2\alpha_0 \times \\
 & \times \cos 2\beta_0 - \alpha_1 \beta_1 \sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0 + 2\alpha_1^2 \cos 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0)] - \\
 & - ml \beta_1 [\alpha_1 (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) + \beta_1 (a_{0x} \cos \alpha_0 - a_{0y} \sin \alpha_0)]; \\
 & J_e \ddot{\beta}_2 + (J_e c - H \cos \beta_0) \dot{\alpha}_2 + B_3 \beta_2 - ml \alpha_2 (a_{0x} \cos \alpha_0 - \\
 & - a_{0y} \sin \alpha_0) \cos \beta_0 = H \beta_1 [\beta_1 (a \cos \beta_0 - c \sin \beta_0) - \dot{\alpha}_1 \sin \beta_0] + \\
 & + J_e [(a^2 - c^2) \beta_1^2 \sin 2\beta_0 - a \dot{\alpha}_1 \beta_1 \cos 2\beta_0 - 0,5 \dot{\alpha}_1^2 \sin 2\beta_0] - \\
 & - ml [(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \cos \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 (a_{0x} \cos \alpha_0 + \\
 & + a_{0y} \sin \alpha_0) \sin \beta_0 - (a_{0z} + g) \beta_1^2 \sin \beta_0].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Як видно із системи рівнянь (22), (23) друге наближення  $\dot{\alpha}_2$ ,  $\dot{\beta}_2$  визначається першим за допомогою членів, що стоять у правих частинах цих рівнянь. Зауважимо, що їхня стала складова може викликати втрату стійкості ГК. Для її знаходження виконаємо операцію усереднення, враховуючи розв'язок (21)

$$\begin{aligned}
 \langle \ddot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \rangle &= 0; \quad \langle \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \rangle = 0; \quad \langle \dot{\beta}_1 \beta_1 \rangle = 0; \quad \langle \alpha_1^2 \rangle = \frac{J_e^2}{2H^2} (3\dot{\beta}_0^2 + \dot{\alpha}_0^2); \\
 \langle \dot{\alpha}_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2); \quad \langle \alpha_1 \beta_1 \rangle = -\frac{J_e^2}{H^2} \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0; \\
 \langle \dot{\alpha}_1 \beta_1 \rangle &= -\frac{J_e}{2H} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2); \quad \langle \beta_1^2 \rangle = \frac{J_e^2}{2H^2} (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2).
 \end{aligned}$$

тоді матимемо

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{J_e^2} (H \cos \beta_0 - B_1) \langle \dot{\beta}_2 \rangle &= \frac{1}{2} (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) [Hd \cos 2\beta_0 - \\ &- 2J_e ad \sin 2\beta_0 + J_e ((b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - 2bk \cos 2\alpha_0) \cos 2\beta_0] - \\ &+ \frac{1}{2} (3\dot{\beta}_0^2 + \dot{\alpha}_0^2) [2J_e ((b^2 - k^2) \sin 2\alpha_0 - 2bk \cos 2\alpha_0) \cos^2 \beta_0 - \\ &- ml (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \sin \beta_0] - \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 [J_e ((b^2 - k^2) \cos 2\alpha_0 + \\ &+ 2bk \sin 2\alpha_0) \sin 2\beta_0 + ml (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \cos \beta_0]. \\ (J_e c - H \cos \beta_0) \langle \dot{\alpha}_2 \rangle &= -0,25 J_e (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \sin 2\beta_0 + \\ &+ \frac{J_e^2}{2H^2} (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) [H (a \cos \beta_0 - c \sin \beta_0) - J_e (a^2 - c^2) \times \\ &\times \sin 2\beta_0 + ml (a_{0z} + g) \sin \beta_0] + \frac{J_e}{2H} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) (H \sin \beta_0 + \\ &+ J_e a \cos 2\beta_0) - \frac{J_e^2}{H^2} ml [(\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \times \\ &\times \cos \beta_0 - \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \sin \beta_0], \end{aligned}$$

або після підстановки чисельних значень

$$\begin{aligned} \langle \dot{\beta}_2 \rangle &= \left[ 0,15 (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \frac{\cos 2\beta_0}{\cos \beta_0} + 4 (3\dot{\beta}_0^2 + \dot{\alpha}_0^2) (a_{0x} \cos \alpha_0 + \right. \\ &\left. + a_{0y} \sin \alpha_0) \operatorname{tg} \beta_0 - 8\dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \right] \cdot 10^{-12}; \\ \langle \dot{\alpha}_2 \rangle &= \left[ 1,38 (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \sin \beta_0 + 1,37 (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \operatorname{tg} \beta_0 - 8,7 \cdot 10^{-8} \times \right. \\ &\times (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) [3 + (43,35 + 4,6a_{0z}) \operatorname{tg} \beta_0] + 8 \cdot 10^{-8} [(\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) \times \\ &\times (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) - \dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \cos \alpha_0 + a_{0y} \sin \alpha_0) \operatorname{tg} \beta_0] \left. \right] \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

З чисельної оцінки видно, що середня швидкість відхилення зовнішньої рамки від заданого напрямку в інерціальному просторі значно перевищує швидкість відхилення внутрішньої.

Перша складова в  $\langle \dot{\alpha}_2 \rangle$  була отримана в 1955 році Магнусом [7], а – друга викликана рухом основи, яка має такий самий порядок і може як зменшувати, так і збільшувати похибку вимірювального приладу.

Однак, якщо забезпечити нульове початкове положення осі внутрішньої рамки  $\beta_0 = 0$ , то

$$\begin{aligned} \langle \dot{\beta}_2 \rangle &= \left[ 0,15 (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) - 8\dot{\alpha}_0 \dot{\beta}_0 (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \right] \cdot 10^{-12}; \\ \langle \dot{\alpha}_2 \rangle &= \left[ -2,6 (3\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) + 0,8 (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) (a_{0x} \sin \alpha_0 - a_{0y} \cos \alpha_0) \right] \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

додаткова швидкість, викликана рухом основи ГК, досить мала.

У другому наближенні ми отримали неоднорідне диференціальне рівняння руху, значення якої визначається першим наближенням (21), тобто має сталу складову і гармоніки з частотами  $\omega_0$  і  $2\omega_0$ , а характеристичне рівняння системи рівнянь (22), (23) таке

$$\begin{vmatrix} J_e \lambda^2 \cos^2 \beta_0 + A_1 + & \lambda (H \cos \beta_0 - B_1) - \\ + 2J_e b k \sin 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0 & -d (H \sin \beta_0 + J_e a \cos 2\beta_0) \\ (J_e c - H \cos \beta_0) \lambda - & J_e \lambda^2 + B_3 \\ -ml (a_{0x} \cos \alpha_0 - a_{0y} \sin \alpha_0) \cos \beta_0 & \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

Для вибраних чисельних значень характеристичне рівняння (24)

$$14 \cdot 10^{-8} \lambda^4 + 1,88 \lambda^2 - 2 \cdot 10^{-4} \lambda + 2 \cdot 10^{-8} = 0$$

має наступні корні  $\lambda_{1,2} = \pm 677i$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm 3600i$ . Цим корням відповідає загальний розв'язок по куту повороту зовнішньої рамки й кутова швидкість її відхилення з частотами  $\omega_1 = 677$  рад/с і  $\omega_2 = 3600$  рад/с.

**Висновок.** Таким чином, рух основи ГК не викликає помітних відхилень його внутрішньої рамки, але може призвести до втрати стійкості внаслідок наявності основних і комбінаційних резонансів. Знайдені в першому і другому наближеннях межі динамічної нестійкості у випадку рухомої основи ГК. Представлені рівняння руху ГК методом послідовних наближень Пікара-Пеано. Межі динамічної нестійкості по обом кутам знайдені методом усереднення за допомогою другої теореми Боголюбова [1, 3]. Наведено практичний приклад знаходження комбінаційних частот коливань ГК.

### Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник / М.А.Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Журавлев В.Ф. Прикладные методы теории колебаний/ В.Ф.Журавлев, Д.М.Климов. – М.: Наука, 1988. – 327 с.
3. Якубович В.А. Параметрический резонанс в линейных системах / В.А.Якубович, В.М.Старжинский. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
4. Кошляков В. Н. Аналитические методы в динамике твердого тела / В.Н.Кошляко. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
5. Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д. Динамически настраиваемые гироскопы: Теория и конструкция / Д.С.Пельпор, В.А.Матвеев, В.Д.Арсеньев. – М.: Машиностроение, 1988. – 264 с.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н.Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
7. Новиков Л.З. Механика динамически настраиваемых гироскопов / Л.З.Новиков, М.Ю.Шаталов. – М.: Наука, 1985. – 245 с.
8. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н.Тихонов, А.Я.Арсенин. – М.: Наука, 1986.

9. Kotera T. Notes of approximate solution of systems with parametric excitation / T.Kotera // Strojnický casopis. – 1980. – № 31. – P. 251-267.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 24.12.2012 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів),*

## DEVIATION ROTOR GYROCOMPASS MOVABLE BASIS

**K. Levchuk<sup>1</sup>, I. Tsidylo<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*"Kyiv Polytechnic Institute"; 03056, Kyiv, Prospect Peremogy, 37;*

*e-mail: [k.levchuk@kpi.ua](mailto:k.levchuk@kpi.ua)*

<sup>2</sup>*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;*

*e-mail: [tm@nung.edu.ua](mailto:tm@nung.edu.ua)*

*There is obtained a mathematical model gyrocompass on the moving basis. Nonlinear differential equations integrated of the method successive approximations Picard-Peano. The dynamics gyrocompass investigated to the second approximation. Gyrocompass deviation from the desired position obtained averaging.*

**Keywords:** *gyrocompass, Picard-Peano method, the deviation of the gyroscope frame, the method of averaging.*