УДК 517.98

ПРО ОПЕРАЦІЮ КРОСКОРЕЛЯЦІЇ ГІПЕРФУНКЦІЇ ТА ДІЙСНОЇ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

М. І. Патра, С. В. Шарин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
тел. +380 (342) 59-60-50; e-mail: patra-m@mail.ru, sharynsir@yahoo.com

У статті розглянуто операцію кроскореляції гіперфункції з компактним носієм на додатній півосі та дійсної аналітичної функції. Крім цього, доведено деякі властивості цієї операції та наведено приклади.

Ключові слова: *гіперфункція з компактним носієм, дійсна аналітична функція.*

Теорія гіперфункцій – це ще один із способів узагальнення поняття функції. Гіперфункції були введені японським вченим М. Сато у 1958 р. Їх можна розуміти як своєрідне узагальнення поняття граничних значень комплексних аналітичних функцій та розширення розподілів Шварца.

Теорія гіперфункцій отримала широке застосування у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також в аксіоматичній квантовій теорії поля, при вивченні аналітичних властивостей S-матриць і інтегралів Фейнмана [3].

Нехай Ω – відкрита множина на дійсній осі $\mathbb{R}$. Гіперфункції на Ω визначають як елементи фактор-простору $B(\Omega):=O(B\setminus\Omega)/O(V)$, де V – відкрита множина в комплексній площині $\mathbb{C}$, що містить Ω як відносно замкнену множину, $O(V)$ і $O(B\setminus\Omega)$ – векторні простори всіх голоморфних функцій на V і $B\setminus\Omega$ відповідно. Інтуїтивно гіперфункція $f\in B(\Omega)$ – це різниця граничних значень деякої голоморфної функції $F(z)$, визначеної поза Ω. Гіперфункцію, представлену за допомогою аналітичної функції $F\in O(B\setminus\Omega)$, позначають $f(x)=[F(z)]_{z=x}$.

Нехай $B_c(\Omega)$ – простір гіперфункцій з компактними носіями. Відомо [1,2], що простір гіперфункцій з компактними носіями з точністю до топологічного ізоморфізму є спряженим до простору $A(\Omega)$ всіх дійсних аналітичних функцій на Ω. При цьому для довільних $f\in B_c(\Omega)$, $\varphi\in A(\Omega)$, канонічний білінійний функціонал задають формулою

$$\langle f,\varphi\rangle=-\oint_{\Gamma}F(z)\varphi(z)\,dz\,, \qquad (1)$$

де Γ – замкнений контур в перетині області визначення функції F і аналітичного продовження функції φ, який оточує носій f один раз в додатному напрямку.

Позначимо через $B_c(\mathbb{R}_+)$ простір всіх гіперфункцій з компактними носіями в додатній півосі $\mathbb{R}_+) := [0;+\infty)$.

Для довільних $f \in B_c(\mathbb{R}_+)$ і $\varphi \in A(\mathbb{R}_+)$ за допомогою канонічного білінійного функціоналу $\langle f, \varphi \rangle$ визначимо операцію кроскореляції наступним чином:

$$(f * \varphi)(t) := -\oint_\Gamma F(z)\varphi(z+t)\,dz, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Властивості кроскореляції.

Лема. Кроскореляція гіперфункції та дійсної аналітичної функції є нескінченно диференційовною функцією, причому

$$(f * \varphi)^{(n)}(t) = \left(f * \varphi^n\right)(t).$$

Доведення. Із властивостей диференціювання інтеграла, залежного від параметра, випливає:

$$(f * \varphi)^{(n)}(t) = \frac{d}{dt^n}\left(-\oint_\Gamma F(z)\varphi(z+t)dz\right) = -\oint_\Gamma \frac{d}{dt^n}\left(F(z)\varphi(z+t)\right)dz =$$

$$= -\oint_\Gamma F(z)\varphi^n(z+t)dz = \left(f * \varphi^n\right)(t).$$

Зауважимо також, що з визначення канонічного білінійного функціоналу (1) очевидним є той факт, що

$$(f * \varphi)(0) = -\oint_\Gamma F(z)\varphi(z)dz = \langle f, \varphi \rangle.$$

Теорема. Для довільних $f \in B_c(\mathbb{R}_+)$ і $\varphi \in A(\mathbb{R}_+)$ маємо $(f * \varphi) \in A(\mathbb{R}_+)$.

Доведення. За теоремою Прінгшейма [2, теорема 2.1] нескінченно диференційовна функція φ належить простору $A(\mathbb{R}_+)$ тоді і тільки тоді, коли для кожної компактної множини $K \subset \mathbb{R}_+$ існують такі константи $h > 0$ і $C > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\sup_{x \in K}\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \le Ch^n n!.$$

Для кожної компактної множини $K \subset \mathbb{R}_+$ з властивостей криволінійного інтеграла отримуємо:

$$\sup_{t \in K}\left|(f * \varphi)^{(n)}(t)\right| = \sup_{t \in K}\left|-\oint_\Gamma F(z)\varphi^{(n)}(z+t)dz\right| = \sup_{t \in K}\left|\left(f * \varphi^{(n)}\right)(t)\right|.$$

Оскільки Γ – гладка крива, то для неї можна вказати таке параметричне представлення $z = z(l) = x(l) + iy(l)$, $a \le l \le b$, що $z(l)$ має неперервну і відмінну від нуля на $[a,b]$ похідну. Оскільки Γ – замкнений контур, то $z(a)=x(b)$. З властивостей інтеграла від функції комплексної змінної отримуємо:

$$\sup_{t\in K}\left|(f*\varphi)^{(n)}(t)\right|=\sup_{t\in K}\left|\int_a^b F(z(l))\varphi^{(n)}(z(l)+t)z'(l)dl\right|\le$$

$$\le\sup_{t\in K}\int_a^b\left|F(z(l))\right|\cdot\left|\varphi^{(n)}(z(l)+t)\right|\cdot\left|z'(l)\right|dl\le\sup_{t\in K}\sup_{z\in\Gamma}\left|\varphi^{(n)}(z+t)\right|\cdot\int_a^b\left|F(z(l))\right|\cdot\left|z'(l)\right|dl.$$

Зауважимо, що

$$\int_a^b\left|F(z(l))\right|\cdot\left|z'(l)\right|dl\le\sup_{z\in\Gamma}\left|F(z)\right|\cdot\int_a^b\left|z'(l)\right|dl=\mu(\Gamma)\sup_{z\in\Gamma}\left|F(z)\right|<\infty,$$

де $\mu(\Gamma)$ – довжина кривої Γ. Крім того, з принципу максимуму модуля аналітичної функції випливає, що існує така точка $z_0\in\Gamma$, що $\sup_{t\in K}\sup_{z\in\Gamma}\left|\varphi^{(n)}(z+t)\right|=\sup_{t\in K}\left|\varphi^{(n)}(z_0+t)\right|$. Але функцію $\mathbb{R}_+\ni t\to\left|\varphi^{(n)}(z_0+t)\right|$ ми можемо розуміти як звуження аналітичної функції $\mathbb{C}\ni z\to\left|\varphi^{(n)}(z_0+z)\right|$, тому $\left|\varphi^{(n)}(z_0+t)\right|$ є дійсною аналітичною функцією. Таким чином, ми отримали оцінку:

$$\sup_{t\in K}\left|(f*\varphi)^{(n)}(t)\right|\le\mu(\Gamma)\sup_{z\in\Gamma}\left|F(z)\right|Ch^n n!=C_1h^n n!,$$

де $C_1:=\mu(\Gamma)\sup_{z\in\Gamma}\left|F(z)\right|C$, що і доводить, що $(f*\varphi)(t)\in A(\mathbb{R}_+)$.

Приклад 1. Нехай $\delta(x)$ – узагальнена функція Дірака. Відомо, що $\delta(x)=-\dfrac{1}{2\pi i}\left[\dfrac{1}{z}\right]_{z=x}$. Обчислимо кроскореляцію

$$(f*\varphi)(t)=-\oint_\Gamma\left(-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\right)\varphi(z+t)dz.$$

Для підінтегральної функції точка $z=0$ – простий полюс. Тому

$$(\delta*\varphi)(t)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\varphi(z+t)}{z}\cdot z\right)=\varphi(t).$$

Приклад 2. Відомо, що $\delta^n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\left[\dfrac{1}{z^{n+1}}\right]_{z=x}$. Тому

$$(\delta^n*\varphi)(t)=-\oint_\Gamma\left(-\frac{(-1)^n}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\right)\varphi(z+t)dz.$$

Для підінтегральної функції точка $z=0$ – полюс кратності $n+1$. Використовуючи теорію лишків та її застосування до обчислення інтегралів, маємо:

$$(\delta^n*\varphi)(t)=(-1)^n\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz^n}\frac{\varphi(z+t)}{z^{n+1}}\cdot z^{n+1}\right)=(-1)^n\varphi^n(t).$$

Література

1. Sato M. Theory of Hyperfunctions / M.Sato // Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo, 1959-1960.
2. Komatsu H. An Introduction to the Theory of Generalized Functions / H.Komatsu. – Department of Mathematics Science University of Tokyo, 2000.
3. Sato M. Lecture Notes in Physics, № 39, Springer, 13, 1975.

Стаття надійшла до редакційної колегії 15.10.2012 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.**, д.ф.-м.н., професором **Лопушанським О.В** (м. Львів)*

CROSS-CORRELATION OF HYPERFUNCTION AND REAL-ANALYTIC FUNCTION

M. I. Patra, S. V. Sharyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
ph. +380 (342) 59-60-50; e-mail: patra-m@mail.ru, sharynsir@yahoo.com

We introduce an operation of cross-correlation of a hyperfunction with compact support in the real positive semiaxis and real-analytic function. Some properties of this operation as well as examples are considered.

Key words: *hyperfunction with compact support, real-analytic function.*