

УДК 517.53

ЗРОСТАННЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ В ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТИПІВ

Т. Я. Глова

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я.С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б;
e-mail: hlova_taras@ukr.net*

Нехай $A \in (-\infty, +\infty)$. Встановлено необхідну і достатню умову на невід'ємну зростаючу до $+\infty$ послідовність (λ_n) , за якої існує опукла зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функція Φ така, що для кожного абсолютно збіжного у півплощині $\text{Res} < A$ ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$, виконується рівність

$$\lim_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \text{Res} = \sigma\}}{\Phi(\sigma)} = \lim_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}}{\Phi(\sigma)}.$$

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, узагальнений тип

1. Вступ

Нехай N_0 – множина невід'ємних цілих чисел, Λ – клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)_{n \in N_0}$, $A \in (-\infty, +\infty]$, а Ω_A – клас опуклих на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що $\Phi(\sigma) \rightarrow +\infty$ і $\Phi'_+(\sigma) \rightarrow +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$.

Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ через $\Delta_A(\lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \text{Res} < A\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it. \quad (1)$$

Максимум модуля і максимальний член ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ вигляду (1) визначимо для всіх $\sigma < A$ відповідно за рівностями

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| : \text{Res} = \sigma\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \in N_0\}.$$

Якщо $\Phi \in \Omega_A$ і $F \in \Delta_A$, то першу з величин

$$T_\Phi(F) = \lim_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}, \quad t_\Phi(F) = \lim_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}$$

називатимемо Φ -типом ряду F . Поняття Φ -типу є узагальненням класичного поняття типу абсолютно збіжного в X ряду Діріхле (див. [1, 2]).

В роботах [3, 4] розглядалась задача про встановлення умов виконання рівності $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, яка дозволяє виразити Φ -тип ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ вигляду (1) через послідовність (a_n) його коефіцієнтів. Найзагальнішим результатом у цьому напрямі є наступна теорема ([4]).

Теорема А. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\lambda \in \Lambda$, а $\Phi \in \Omega_A$. Для того, щоб $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall B > 0: \quad \ln n_\lambda(B\Phi'_+(\sigma)) = o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \uparrow A, \quad (2)$$

де $n_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$ – лічильна функція послідовності λ .

Нехай $\lambda \in \Lambda$ – довільна послідовність. Розглянемо довільну неперервну зростаючу на $[0, +\infty)$ функцію l таку, що $\ln n \leq l(\lambda_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, і нехай $\varphi(x) = l(x^2)$, $x \geq 0$. Функція φ є неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[0, +\infty)$, а тому для деякої $\Phi \in \Omega_{+\infty}$ маємо $\Phi'(x) = \varphi^{-1}(x)$, $x \geq x_0$. Тоді для кожного $B > 0$ отримуємо $\ln n_\lambda(B\Phi'(x)) \leq l(B\Phi'(x)) \leq l((\Phi'(x))^2) = \varphi(\Phi'(x)) = x = o(\Phi(x))$, $x \rightarrow +\infty$, тобто виконується умова (2) (з $A = +\infty$). Звідси і з теореми А випливає наступне твердження.

Теорема В. *Нехай $A = +\infty$. Тоді для довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$ існує функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що для кожного ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$.*

У даній роботі покажемо, що у випадку $A < +\infty$ теорема В не є правильною. Більше того, у цьому випадку вкажемо необхідну і достатню умову на послідовність $\lambda \in \Lambda$, за якої існує функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що для кожного ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай $A \in (0, +\infty)$, а $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб існувала функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що для кожного ряду Діріхле $F \in \Delta_A(\lambda)$ виконується рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$, необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \quad (3)$$

Теорема 1 є безпосереднім наслідком з теореми А і наступного твердження.

Теорема 2. Нехай $A \in (0, +\infty)$, а $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб існувала функція $\Phi \in \Omega_A$ така, що виконується умова (2), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (3).

2. Допоміжні результати

Насамперед доведемо декілька лем, які будуть потрібні для доведення теореми 2.

Лема 1. Нехай $A \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, $x_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) : \Phi'_+(x) > 0\}$, $t_0 = \inf\{\Phi(x) : x \in (x_0, A)\}$ і

$$\alpha(t) = \Phi'_+(\Phi^{-1}(t)), \quad t > t_0. \quad (4)$$

Тоді функція α є додатною неспадною неперервною справа на $(t_0, +\infty)$ і для довільного фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} \quad (5)$$

збігається (розбігається) тоді і лише тоді, коли $A < +\infty$ ($A = +\infty$).

Доведення. Оскільки $\Phi'_+(x) > 0$ на $(x_0, +\infty)$, то функція Φ зростає на $(x_0, +\infty)$. Крім того, Φ неперервна на $(-\infty, A)$. Отже, обернена функція Φ^{-1} визначена на інтервалі $(t_0, +\infty)$ і є на ньому неперервною зростаючою функцією. Звідси випливає, що α – додатна неспадна неперервна справа на $(t_0, +\infty)$ функція.

Якщо $t_1 > t_0$ і $x_1 = \Phi^{-1}(t_1)$, то за (4) маємо

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} = \int_{x_1}^A \frac{d\Phi(x)}{\alpha(\Phi(x))} = \int_{x_1}^A \frac{\Phi'_+(x) dx}{\Phi'_+(x)} = \int_{x_1}^A dx = A - x_1,$$

а тому інтеграл (5) збігається (розбігається) тоді і лише тоді, коли $A < +\infty$ ($A = +\infty$). Ω

Зауваження 1. Лема 1 залишиться правильною, якщо в ній Φ'_+ замінити на Φ'_- , а відносно функції α стверджувати, що вона є неперервною зліва, а не справа.

Лема 2. Нехай $A \in (0, +\infty]$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, а α – додатна неспадна неперервна справа на $(t_0, +\infty)$ функція така, що для деякого фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл (5) збігається у випадку $A < +\infty$ і розбігається у випадку $A = +\infty$. Тоді існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої виконується рівність (4).

Доведення. Для всіх $t > t_0$ покладемо

$$\beta(t) = A - \int_t^{+\infty} \frac{dy}{\alpha(y)}, \quad \text{якщо } A < +\infty; \quad \beta(t) = \int_t^+ \frac{dy}{\alpha(y)}, \quad \text{якщо } A = +\infty.$$

Тоді функція β є неперервною зростаючою до A на $(t_0, +\infty)$, причому

$$\beta'_+(t) = \frac{1}{\alpha(t)}, \quad t > t_0.$$

Тому для всіх $x \in (x_0, A)$, де $x_0 = \inf\{\beta(t) : t > t_0\}$, визначена обернена функція $\Phi(x) = \beta^{-1}(x)$. Ця функція зростає до $+\infty$ на (x_0, A) і для неї маємо

$$\Phi'_+(x) = \frac{1}{\beta'_+(\Phi(x))} = \alpha(\Phi(x)), \quad x \in (x_0, A), \quad (6)$$

звідки легко отримуємо (4). Крім того, з (6) випливає, що функція Φ'_+ є зростаючою до $+\infty$ на (x_0, A) . Отже, якщо $x_0 = -\infty$, то $\Phi \in \Omega_A$. Якщо ж $x_0 > -\infty$, то, скориставшись опуклістю функції Φ на (x_0, A) , маємо $t_0 = \Phi(x_0 + 0) > -\infty$, а тому функцію Φ можна до визначити до функції з класу Ω_A , поклавши, наприклад, $\Phi(x) = t_0$ для всіх $x \leq x_0$. Ω

Зауваження 2. Якщо в лемі 2 вважати функцію α неперервною зліва, а не справа, то можна стверджувати, що існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої замість (4) виконується рівність $\alpha(t) = \Phi'_-(\Phi^{-1}(t))$, $t > t_0$.

Лема 3. Нехай α – додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція, для якої

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty. \quad (7)$$

Тоді існує додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція β така, що $\beta(t) = o(\alpha(t))$, якщо $t \rightarrow +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} < +\infty$.

Лема 3 є добре відомою. Зокрема, як зауважив В. Бергвайлер [5], для її доведення досить покласти $\beta(t) = \sup\{\alpha(y)\sqrt{\gamma(y)} : y \in [a, t]\}$, $t \geq a$, де

$$\gamma(y) = \int_y^{+\infty} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad y \geq a.$$

Тоді, очевидно, β є додатною неспадною на $[a, +\infty)$ функцією. Оскільки $\gamma(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow +\infty$, то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує $y_0 \geq a$ таке, що $\gamma(y) \leq \varepsilon$ для всіх $y \geq y_0$. Тому для всіх $t \geq y_0$ маємо

$$\beta(t) \leq \max\{\alpha(y_0)\gamma(a), \alpha(t)\varepsilon\},$$

звідки отримуємо

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \leq \varepsilon.$$

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає співвідношення $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$. Крім того,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} \leq \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)\sqrt{\gamma(t)}} = -\int_a^{+\infty} \frac{d\gamma(t)}{\sqrt{\gamma(t)}} = \int_0^{\gamma(a)} \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty.$$

Лема 4. Нехай α – додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція, для якої виконується (7). Тоді існує неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функція γ така, що $\gamma(a) = a$, $\gamma(t) = o(t)$, якщо $t \rightarrow +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(\gamma(t))} < +\infty$.

Доведення. Згідно з лемою 3, для функції α існує додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція β така, що $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$, і $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(t)} < +\infty$. Для всіх $t \geq a$ покладемо

$$\eta(t) = \int_a^t \frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)} d\tau + a.$$

Функція η є неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[a, +\infty)$, причому $\eta(a) = a$ і $t = o(\eta(t))$, $t \rightarrow +\infty$. Нехай $\gamma = \eta^{-1}$. Тоді $\gamma(a) = a$, γ – неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функція і $\gamma(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Крім того,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(\gamma(t))} = \int_a^{+\infty} \frac{d\eta(y)}{\alpha(y)} = \int_a^{+\infty} \frac{dy}{\beta(y)} < +\infty.$$

Лему доведено. Ω

Безпосереднім наслідком з лем 3 і 4 є таке твердження.

Лема 5. Нехай α – додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція, що задовольняє (7). Тоді існують додатна неспадна на $[a, +\infty)$ функція β , для якої $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$, і неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функція γ , для якої $\gamma(a) = a$ і $\gamma(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$, такі, що $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\beta(\gamma(t))} < +\infty$.

3. Доведення теореми 2

Достатність. Припустимо, що виконується умова (3), і нехай α – неперервна зростаюча на $[0, +\infty)$ функція така, що $\alpha(\ln n) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то

$$\ln n_\lambda(t) = \ln(n+1) \leq \ln n + 1 = \alpha^{-1}(\lambda_n) + 1 \leq \alpha^{-1}(t) + 1.$$

Отже, $\ln n_\lambda(t) \leq \alpha^{-1}(t) + 1$, $t \geq \lambda_1$.

Далі зауважимо, що з умови (3) випливає умова (7) (з $a=0$), оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y\alpha(\ln y)} = \int_1^{+\infty} \frac{d \ln y}{\alpha(\ln y)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)}.$$

За лемою 5 існують додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція β , для якої $\beta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$, і неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ , для якої $\gamma(0) = 0$ і $\gamma(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$, такі, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\beta(\gamma(t))} < +\infty$. Нехай $\delta(t) = \beta(t+0)$, $t \geq 0$. Функція δ , як і функція β , є додатною неспадною на $[0, +\infty)$, причому $\delta(t) = o(\alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$. Крім того, функція β є неперервною справа на $[0, +\infty)$. Згідно з лемою 2, існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої $\delta(\gamma(t)) = \Phi'_+(\Phi^{-1}(t))$, $t > 0$. Функція Φ і буде шуканою. Справді, для кожного $C > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(C), A)$ маємо

$$\begin{aligned} \ln n_\lambda(C\Phi'_+(\sigma)) &= \ln n_\lambda(C\delta(\gamma(\Phi(\sigma)))) \leq \ln n_\lambda(\alpha(\gamma(\Phi(\sigma)))) \leq \\ &\leq \alpha^{-1}(\alpha(\gamma(\Phi(\sigma)))) + 1 = \gamma(\Phi(\sigma)) + 1, \end{aligned}$$

звідки випливає (2).

Необхідність. Припустимо, що існує функція $\Phi \in \Omega_A$, для якої виконується умова (2). Тоді, зокрема,

$$\ln n_\lambda(\Phi'_+(\sigma)) \leq \Phi(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, A).$$

Покладемо $x_0 = \inf\{x \in (-\infty, A) : \Phi'_-(x) > 0\}$,

$$t_0 = \inf\{\Phi(x) : x \in (x_0, A)\} \text{ і } \alpha(t) = \Phi'_-(\Phi^{-1}(t)), \quad t > t_0.$$

Тоді (див. зауваження 1) функція α є додатною неспадною неперервною зліва на $(t_0, +\infty)$ і для фіксованого $t_1 > t_0$ інтеграл (5) збігається.

Нехай n_0 – найменше натуральне число, для якого правильні нерівності $\ln(n-1) \geq t_1$ і $\lambda_n \geq \Phi'_+(\sigma_0)$. Якщо $n \geq n_0$, а $\sigma \in [\sigma_0, A)$ таке, що $\Phi'_-(\sigma) \leq \lambda_n \leq \Phi'_+(\sigma)$, то

$$\alpha(\ln n) \leq \alpha(\ln n_\lambda(\lambda_n)) \leq \alpha(\ln n_\lambda(\Phi'_+(\sigma))) \leq \alpha(\Phi(\sigma)) = \Phi'_-(\sigma) \leq \lambda_n,$$

а тому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\alpha(\ln n)} \leq \int_{n_0-1}^{+\infty} \frac{dy}{y\alpha(\ln y)} = \int_{\ln(n_0-1)}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} \leq \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty,$$

звідки випливає (3). Теорему доведено.

Література

1. Леонт'єв А.Ф. Ряди експонент / А.Ф.Леонт'єв. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле / М.М.Шеремета. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.
3. Шеремета М.Н. О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле / М.Н.Шеремета // Мат. заметки. – 2003. – Т.73, №3. – С. 437-443.
4. Hlova T.Ya. Generalized types of the growth of Dirichlet series / T.Ya.Hlova, P.V.Filevych // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V. 7, № 2. – P. 13-27.
5. Bergweiler W. A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros / W.Bergweiler // J. d'Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 121-129.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.02.2016 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Заблоцьким М.В. (м. Львів)

**THE GROWTH OF DIRICHLET SERIES
ABSOLUTELY CONVERGENT IN A HALF-PLANE
IN TERMS OF GENERALIZED TYPES**

T. Ya. Hlova

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics;
79060, Lviv, Naukova str., 3-b; e-mail: hlova_taras@ukr.net*

Let $A \in (-\infty, +\infty)$. We establish a necessary and sufficient condition on a nonnegative sequence (λ_n) , increasing to $+\infty$, under which there exists a function Φ , convex and increasing to $+\infty$ on $(-\infty, A)$, such that for every Dirichlet series of the form $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$, absolutely convergent in the half-plane $\text{Res} < A$, we have

$$\lim_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \sup\{|F(s)| : \text{Res} = \sigma\}}{\Phi(\sigma)} = \lim_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \max\{|a_n| e^{s\lambda_n} : n \geq 0\}}{\Phi(\sigma)}.$$

Key words: *Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, generalized type.*