УДК 517.95+511.2

ЗАДАЧА З ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

І. Р. Тимків
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

У циліндричній області досліджено задачу з двоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для параболічної системи рівняннь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв’язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

Ключові слова: *двоточкові умови, параболічна система, малий знаменник, міра Лебега.*

1. Вступ. Задачі з двоточковими та багатоточковими умовами для еволюційних рівнянь та систем рівнянь вивчались у різних аспектах багатьма авторами (див., наприклад, [1-9] та бібліографію в них). Зокрема, у роботі [1] встановлено класи коректної розв’язності в безмежному шарі двоточкової задачі для безтипної системи першого порядку, а в праці [2] за допомогою диференціально-символьного методу [10], досліджено задачу з двоточковими умовами для системи рівнянь другого порядку за часом та нескінченного порядку за просторовими змінними.

Дослідження розв’язності в обмежених областях двоточкових задач для одного класу гіперболічних систем другого порядку здійснено у роботах [4, 5], а багатоточкових задач для безтипних та параболічних систем високого порядку – у працях [5-7]. Ці задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв’язність пов’язана з проблемою малих знаменників, для оцінок знизу яких використано метричний підхід [8].

У даній статті встановлено коректність задачі з локальними двоточковими умовами для системи лінійних параболічних рівнянь другого порядку і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів системи і для майже всіх чисел t_2, які є значеннями другого вузла інтерполяції.

Надалі використовуватимемо такі позначення: Q – обмежена однозв’язна область в R^p з гладкою межею ∂Q; $x=(x_1,\ldots,x_p)\in Q$;

$D=\{(t,x): t\in(0,T), x\in Q\}$; $\Gamma=[0,T]\times\partial Q$; $C^{j,\rho}$, $\rho\in(0,1)$, – клас функцій, визначених і неперервних разом із похідними j-го порядку в області $\overline{Q}$, j-ті похідні яких задовольняють в $\overline{Q}$ умову Гельдера з показником ρ; $A^{j,\rho}$ – клас замкнених областей з $\overline{Q}$, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межевих поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\rho}$. Нижче у роботі фігурує диференціальний вираз $L=-\sum\limits_{i,j=1}^{p}\partial/\partial x_i\left(p_{i,j}(x)\partial/\partial x_j\right)+q(x)$, де $p_{i,j}(x)=p_{j,i}(x)$, $i,j\in\{1,\ldots,p\}$, $q(x)\ge 0$. Якщо $\partial Q\in A^{2n,\rho}$, $p_{i,j}\in C^{2n-1,\rho}$, $q\in C^{2n-2,\rho}$, то задача

$$L\,X(x)=\lambda\,X(x),\quad X(x)|_{\partial Q}=0$$

має повну ортонормовану в $L_2(\overline{Q})$ систему власних функцій $\{X_k(x), k\in\mathrm{N}\}$ і нескінченну множину додатних власних значень $\{\lambda_k, k\in\mathrm{N}\}$, причому $X_k\in C^{2n}(\overline{Q})$, $k\in\mathrm{N}$, і виконуються оцінки [11, 12]

$$C_1 k^{2/p}\le\lambda_k\le C_2 k^{2/p},\quad 0<C_1<C_2,\quad k\in\mathrm{N}, \tag{1}$$

$$\max_{x\in\overline{G}}\left|\frac{\partial X_k^{|s|}(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|\le C_3\lambda_k^{p/4+|s|/2},\quad C_3>0,\quad |s|\in\{0,1,\ldots,2n\},\quad k\in\mathrm{N}.$$

Нехай $mes_{\mathrm{R}^n}A$ – міра Лебега вимірної множини $A\subset\mathrm{R}^n$; $C(4;2)$ – множина всіх цілочислових наборів $\omega=(i_1,i_2)$, таких, що $1\le i_1<i_2\le 4$; $\prec$ – бінарне відношення введене на множині $C(4;2)$ за правилом $\omega=(i_1,i_2)\prec(j_1,j_2)=\sigma$, якщо перша відмінна від нуля серед різниць j_1-i_1, j_2-i_2 є додатною; i – уявна одиниця; $\overline{E}^b_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, $b\in\mathrm{N}$, – простір вектор-функцій, одержаний поповненням простору скінченних сум $\vec{\varphi}=\sum\vec{\varphi}_k X_k(x)$, $\vec{\varphi}_k=col(\varphi_k^1,\varphi_k^2)\in\mathrm{C}^2$, $k\in\mathrm{N}$, за нормою

$$\left\|\vec{\varphi};\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi_k\|w_k^2(\alpha,\beta)},\quad \|\varphi_k\|=|\varphi_k^1|^2+|\varphi_k^2|^2,\quad w_k(\alpha;\beta)=\lambda_k^{\alpha}e^{\beta\lambda_k^b};$$

$C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ – простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x)=\sum\vec{u}_k(t)X_k(x)$, $\vec{u}_k(t)=col(u_k^1(t),u_k^2(t))\in C^n[0,T]$, $k\in\mathrm{N}$, таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ $\partial^j\vec{u}(t,\cdot)/\partial t^j\in\overline{E}^b_{\alpha,\beta}$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$ і є неперервними за $t \in [0,T]$ в нормі цього простору; норму в $C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ задаємо рівністю

$$\left\|\vec{u};C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)\right\| = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^j \vec{u}(t,\cdot)}{\partial t^j};\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right\|.$$

2. Формулювання задачі. В області D розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t},L\right)\vec{u}(t,x) \equiv \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} a^1_{11}(L) & a^1_{12}(L) \\ a^1_{21}(L) & a^1_{22}(L)\end{pmatrix}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \begin{pmatrix} a^0_{11}(L) & a^0_{12}(L) \\ a^0_{21}(L) & a^0_{22}(L)\end{pmatrix}\vec{u} = \vec{0}, \quad (2)$$

$$\vec{u}(t_1,x) = \vec{\varphi}_1(x), \quad \vec{u}(t_2,x) = \vec{\varphi}_2(x), \quad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \quad (3)$$

$$L^m\vec{u}(t,x)|_\Gamma = \vec{0}, \quad m \in \{0,1,\ldots,2b-1\}, \quad (4)$$

де $\vec{u}(t,x) = col(u^1(t,x),u^2(t,x))$, $a^r_{mj}(L) = \sum\limits_{q=0}^{(2-r)b} a^{r,q}_{mj}L^q$, $a^{r,q}_{mj} \in \mathrm{C}$, $m,j \in \{1,2\}$, $r \in \{0,1\}$, $L^m\vec{u} = L(L^{m-1}\vec{u})$, $L^0\vec{u} = \vec{u}$, $m \in \{1,\ldots,2b-1\}$, $\vec{\varphi}_q(x) = col(\varphi^1_q(x),\varphi^2_q(x))$, $q \in \{1,2\}$.

Будемо вважати, що для системи (2) виконуються умови:
$B_1)$ рівняння

$$\det\|W(\mu,\lambda_k)\| = 0 \quad (5)$$

має попарно різні корені $\mu_1(k),\ldots,\mu_4(k)$, які задовольняють нерівності

$$Re\mu_q(k) \le -\delta_1\lambda_k^b, \quad q \in \{1,\ldots,4\}, \quad \delta_1 > 0; \quad (6)$$

$B_2)$ для кожного $q \in \{1,\ldots,4\}$ вектори $\vec{h}_{q,k} = col\left(h^1_{q,k},h^2_{q,k}\right)$, координати яких визначаються рівностями

$$h^1_{q,k} = \mu_q^2(k) + \sum_{r=0}^{b} a^{1,r}_{22}\lambda_k^r\mu_q(k) + \sum_{r=0}^{2b} a^{0,r}_{22}\lambda_k^r,$$

$$h^2_{q,k}(k) = -\sum_{r=0}^{b} a^{1,r}_{21}\lambda_k^r\mu_q(k) - \sum_{r=0}^{2b} a^{0,r}_{12}\lambda_k^r, \quad (7)$$

є ненульовими. Легко перевірити, що вектор $\vec{h}_{q,k}$ – це перший стовпець матриці, приєднаної до матриці $W(\mu_q(k),\lambda_k)$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, цей вектор є розв'язком системи алгебричних рівнянь

$$W(\mu_q(k),\lambda_k)\vec{h} = \vec{0}, \quad q \in \{1,\ldots,4\}.$$

3. Єдиність розв'язку задачі. Розв'язок задачі (2)-(4) з простору $C^2\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\vec{u}_k(t)X_k(x). \qquad (8)$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t), k\in \mathrm{N}$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^2\vec{u}_k(t)}{dt^2}+\begin{pmatrix} a_{11}^1(\lambda_k) & a_{12}^1(\lambda_k) \\ a_{21}^1(\lambda_k) & a_{22}^1(\lambda_k)\end{pmatrix}\frac{d\vec{u}_k(t)}{dt}+\begin{pmatrix} a_{11}^0(\lambda_k) & a_{12}^0(\lambda_k) \\ a_{21}^0(\lambda_k) & a_{22}^0(\lambda_k)\end{pmatrix}\vec{u}_k(t)=\vec{0}, \qquad (9)$$

$$\vec{u}_k(t_1)=\vec{\varphi}_{1k} \quad \vec{u}(t_2)=\vec{\varphi}_{2k}, \qquad (10)$$

де $\vec{\varphi}_{jk}=col(\varphi_{jk}^1,\varphi_{jk}^2)$, $k\in \mathrm{N}$, – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x)$ за системою $\{X_k(x), k\in \mathrm{N}\}$, $j\in\{1,2\}$.

Для кожного $k\in \mathrm{N}$ розв'язок задачі (9), (10) зображується формулою

$$\vec{u}_k(t)=\sum_{q=1}^{4}C_q(\lambda_k)\vec{h}_{q,k}e^{\mu_q(k)t}, \qquad (11)$$

де сталі $C_q(\lambda_k)$, $q\in\{1,\dots,4\}$, знаходимо із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{4}C_q(\lambda_k)h_{q,k}^r e^{\mu_q(k)t_j}=\varphi_{jk}^r, \quad j\in\{1,2\}, \quad r\in\{1,2\}. \qquad (12)$$

Визначник $\Delta(k)$, $k\in \mathrm{N}$, системи (12) співпадає з характеристичним визначником задачі (9), (10) і має такий вигляд:

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix} h_{1,k}^1 e^{\mu_1(k)t_1} & h_{2,k}^1 e^{\mu_2(k)t_1} & h_{3,k}^1 e^{\mu_3(k)t_1} & h_{4,k}^1 e^{\mu_4(k)t_1} \\ h_{1,k}^2 e^{\mu_1(k)t_1} & h_{2,k}^2 e^{\mu_2(k)t_1} & h_{3,k}^2 e^{\mu_3(k)t_1} & h_{4,k}^2 e^{\mu_4(k)t_1} \\ h_{1,k}^1 e^{\mu_1(k)t_2} & h_{2,k}^1 e^{\mu_2(k)t_2} & h_{3,k}^1 e^{\mu_3(k)t_2} & h_{4,k}^1 e^{\mu_4(k)t_2} \\ h_{1,k}^2 e^{\mu_1(k)t_2} & h_{2,k}^2 e^{\mu_2(k)t_2} & h_{3,k}^2 e^{\mu_3(k)t_2} & h_{4,k}^2 e^{\mu_4(k)t_2}\end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Теорема 1. *Нехай для системи* (2) *виконуються умови* $B_1)$, $B_2)$. *Для єдиності розв'язку задачі* (2) – (4) *у просторі* $C^2\left([0,T];\overline{E}_{\alpha,\beta}^b\right)$, $\alpha,\beta\in \mathrm{R}$, *необхідно і досить, щоб справджувалась умова*

$$\forall k\in \mathrm{N} \quad \Delta(k)\neq 0. \qquad (14)$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [5].

Наведемо приклади задач, які демонструють виконання або порушення умови (14).

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+\begin{pmatrix} a_1(L)+a_2(L) & 0 \\ a_5(L) & a_3(L)+a_4(L)\end{pmatrix}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+$$

$$+\begin{pmatrix} a_1(L)a_2(L) & 0 \\ a_5(L)a_1(L) & a_3(L)a_4(L)\end{pmatrix}\vec{u}=\vec{0}, \quad (t,x)\in D, \qquad (15)$$

де $a_q(L)=\sum_{r=0}^{b} a_q^r L^r$, $Re a_q^b>0$, $q\in\{1,\dots,4\}$. Припустимо, що для системи (15) виконуються умови

$$\forall k\in \mathrm{N} \quad a_{5,k}\neq 0,\quad a_{q,k}\neq a_{r,k},\quad q,r\in\{1,\dots,4\},\quad q\neq r, \tag{16}$$

де $a_{q,k}=\sum_{r=0}^{b} a_q^r \lambda_k^r$, $q\in\{1,\dots,5\}$. У цьому випадку легко обчислити, що корені рівняння (5) мають вигляд $\mu_q(k)=-a_{q,k}$, $q\in\{1,\dots,4\}$, а вектори $\vec{h}_{q,k}=col(h_{q,k}^1,h_{q,k}^2)$ визначаються формулами

$$h_{q,k}^1=(a_{3,k}-a_{q,k})(a_{4,k}-a_{q,k}),\quad h_{q,k}^2=a_{5,k}(a_{1,k}-a_{q,k}),\quad q\in\{1,\dots,4\}.$$

Із нерівностей (16) випливає, що для системи (15) умови $B_1)$ та $B_2)$ виконуються.

Для задачі (3), (4), (15) при $t_1=0$, а $t_2=T$, визначник (13) є таким:

$$\Delta(k)=-(a_{5,k})^2\prod_{l=1}^{2}\prod_{q=1}^{2}(a_{2+l,k}-a_{q,k})^{3-q}e^{-(a_{2,k}+a_{4,k})T}\times$$
$$\left(e^{(a_{2,k}-a_{1,k})T}-1\right)\left(e^{(a_{4,k}-a_{3,k})T}-1\right). \tag{17}$$

Таким чином, для визначника (17) умова (14) виконується тоді і тільки тоді, коли справджуються нерівності

$$\forall k\in \mathrm{N},\quad \forall m_q\in \mathrm{Z},\quad \sum_{r=0}^{b}(a_{1+q}^r-a_q^r)\lambda_k^r\neq 2\pi i m_q/T,\quad q\in\{1,3\}. \tag{18}$$

Зокрема, якщо у системі (15) $p=b=1$, $L=-\partial^2/\partial x^2$, $a_1(L)=(1+i)\partial^2/\partial x^2$, $a_2(L)=(1-i)\partial^2/\partial x^2$, $a_3(L)=(2+i)\partial^2/\partial x^2$, $a_4(L)=(2-i)\partial^2/\partial x^2$, $a_5(L)=\partial^2/\partial x^2$, то

$$\Delta(k)=-5(1+2i)k^{16}e^{(-3-2i)Tk^2}(e^{2iTk^2}-1)^2.$$

Оскільки $|\Delta(k)|=20\sqrt{5}k^{16}e^{-3Tk^2}\sin^2(Tk^2)$, то умова (14) виконуєтьсяється тоді і тільки тоді, коли число T/π є ірраціональним.

4. Існування розв’язку задачі. Надалі вважатимемо, що справджується умова (14). Тоді для кожного $k\in\mathrm{N}$ існує єдиний розв'язок $\vec{u}_k(t)$ задачі (9), (10), який зображується формулою

$$\vec{u}_k(t)=\sum_{j,q=1}^{4}\frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)}e^{\mu_q(k)t}\psi_{j,k}\vec{h}_{q,k}, \tag{19}$$

де $(\psi_{1,k},\dots,\psi_{4,k})=(\varphi_{1,k}^1,\varphi_{1,k}^2,\varphi_{2,k}^1,\varphi_{2,k}^2)$, $\Delta_{jq}(k)$, $j,q\in\{1,\dots,4\}$, – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та

q-го стовпця визначника $\Delta(k)$. Із формул (19) випливає формальне зображення розв’язку задачі (2)-(4) у вигляді ряду Фур’є

$$\vec{u}(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j,q=1}^{4}\frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)}e^{\mu_q(k)t}\psi_{j,k}\vec{h}_{q,k}X_k(x). \tag{20}$$

Збіжність ряду (20), взагалі, пов’язана з проблемою малих знаменників, оскільки величина $\Delta(k)$, будучи відмінною від нуля, може набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної кількості чисел $k\in\mathrm{N}$. Це може спричинити розбіжність ряду (20) у шкалі просторів $C^2\left([0,T];\overline{E}^{b}_{\alpha,\beta}\right)$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (14) *і нехай для системи* (2) *справджуються умови* $B_1)$ *і* $B_2)$, *та існують сталі* $\gamma\in\mathrm{R}$ *і* $\nu\in\mathrm{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $k\in\mathrm{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)|\geq w_k(-\gamma;-\nu). \tag{21}$$

Якщо $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2\in\overline{E}^{b}_{\alpha_0,\beta_0}$, *де* $\alpha_0=\alpha+\gamma+10b$, $\beta_0=\beta+\nu-\delta_1(2t_1+t_2)$, *то в просторі* $C^2\left([0,T];\overline{E}^{b}_{\alpha,\beta}\right)$ *існує єдиний розв’язок задачі* (2)-(4), *який зображується рядом* (20) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2$.

Доведення. Встановимо оцінки зверху для коренів рівняння (5). Для цього зауважимо, що рівняння (5) має вигляд

$$\mu^4+R_{1k}\mu^3+R_{2k}\mu^2+R_{3k}\mu+R_{4k}=0, \tag{22}$$

коефіцієнти якого визначаються формулами

$$R_{1k}=\sum_{q=0}^{b}\left(a_{1,1}^{1,q}+a_{2,2}^{1,q}\right)\lambda_k^q,\ R_{2k}=\sum_{q=0}^{2b}\left(a_{1,1}^{2,q}+a_{2,2}^{2,q}\right)\lambda_k^q+\sum_{l,j=0}^{b}\left(a_{1,2}^{1,l}a_{2,2}^{1,j}-a_{1,2}^{1,l}a_{2,1}^{1,j}\right)\lambda_k^{l+j},$$

$$R_{3k}=\sum_{q=0}^{b}\sum_{j=0}^{2b}\left(a_{2,2}^{1,q}a_{1,1}^{2,j}+a_{1,1}^{1,q}a_{2,2}^{2,j}-a_{1,2}^{1,q}a_{2,1}^{2,j}-a_{2,1}^{1,q}a_{1,2}^{2,j}\right)\lambda_k^{q+j},$$

$$R_{4k}=\sum_{q,j=0}^{2b}\left(a_{1,1}^{2,q}a_{2,2}^{2,j}-a_{1,2}^{2,q}a_{2,1}^{2,j}\right)\lambda_k^{q+j}. \tag{23}$$

Зрозуміло, що $|R_{qk}|\leq C_4\lambda_k^{qb}$, $q\in\{1,\ldots,4\}$. Тоді згідно з [13, с. 102], для коренів $\mu_q(k)$ рівняння (22) випливають оцінки

$$|\mu_q(\lambda_k)|\leq 2\max_{j\in\{1,\ldots,4\}}(R_{jk})^{1/j}\leq C_5\lambda_k^b,\quad q\in\{1,\ldots,4\}. \tag{24}$$

Із формул (7) на підставі оцінок (24) для компонент векторів $\vec{h}_{q,k}$ одержуємо

$$|h_{q,k}^r|\leq C_6\lambda_k^{2b},\quad r\in\{1,2\},\quad q\in\{1,\ldots,4\}. \tag{25}$$

На підставі нерівностей (6) встановлюємо, що для кожного $t>0$ виконуються оцінки

$$\left|e^{Re\mu_q(k)t}\right| \le C_7 w_k(0;-\delta_1 t), \quad q\in\{1,\ldots,4\}. \tag{26}$$

З огляду на (13), (25) і (26) отримуємо

$$|\Delta_{j,q}(k)| \le C_8 w_k(6b;-\delta_1(2t_1+t_2)), \quad j,q\in\{1,\ldots,4\}. \tag{27}$$

Із формули (19) на підставі оцінок (21), (24)-(27) встановлюємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r\vec{u}_k(t)}{dt^r}\right| \le C_9 w_k(\gamma+(8+r)b;\nu-\delta_1(2t_1+t_2))\sqrt{\sum_{j=1}^{2}(|\varphi_{jk}^1|^2+|\varphi_{jk}^2|^2)},$$

де $r\in\{0,1,2\}$. Отже

$$\left\|\vec{u};C^2\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)\right\| = \sum_{r=0}^{2}\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{d^r\vec{u}_k(t)}{dt^r}\right|^2 w_k^2(\alpha;\beta)\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_{10}\sum_{j=1}^{2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_{jk}^1|^2+|\varphi_{jk}^2|^2)w_k^2(\alpha+\gamma+10b;\beta+\nu-\delta_1(2t_1+t_2))\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= C_{10}\sum_{j=1}^{2}\left\|\vec{\varphi}_j;\overline{E}^b_{\alpha_0,\beta_0}\right\|. \tag{28}$$

Із (28) випливає твердження теореми.

Наведемо приклади двоточкових задач, для яких виконується нерівність (21). Для цього використаємо наступне твердження.

Лема 1. *Для довільних фіксованих* $\rho_q\in\mathrm{C}$, $q\in\{0,1,\ldots,n\}$, $\rho_n\ne 0$, *нерівність*

$$\left|\sum_{q=0}^{n}\rho_q\lambda_k^q\right| > \frac{|\rho_n|}{2}\lambda_k^n,$$

виконується для всіх $k\in\mathrm{N}$, $k>(2\Theta+1)^{p/2}/(C_2)^{p/2}$, $\Theta=\max_{q\in\{1,\ldots,n\}}\left|\frac{\rho_{n-q}}{\rho_n}\right|$.

Доведення. Оскільки $\rho_n\ne 0$, тоді очевидно, що

$$\left|\sum_{q=0}^{n}\rho_q\lambda_k^q\right| = |\rho_n|\lambda_k^n\left|1+\sum_{q=1}^{n}\frac{\rho_{n-q}}{\rho_n\lambda_k^q}\right| \ge |\rho_n|\lambda_k^n\left|1-\left|\sum_{q=1}^{n}\frac{\rho_{n-q}}{\rho_n\lambda_k^q}\right|\right|. \tag{29}$$

На підставі оцінок (1) і нерівностей

$$\left|\sum_{q=1}^{n}\frac{\rho_{n-q}}{\rho_n\lambda_k^q}\right| \le \Theta\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^q} \le \Theta\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^q} = \frac{\Theta}{\lambda_k-1} < \frac{1}{2}, \text{ при } \lambda_k>2\Theta+1,$$

із (29) отримуємо твердження леми.

Твердження 1. *Нехай для коефіцієнтів системи* (15) *справджуються умови* (16) *та нерівності*

$$0 < Re a_1^b < \ldots < Re a_4^b < \delta_2, \quad a_5^b \neq 0. \tag{30}$$

Для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k *оцінка* (21) *виконується при* $\gamma > -7b$, $\nu = 2(\delta_2 - \eta)T$, *де* $0 < \eta < \max\limits_{q \in \{1,3\}} (Re a_{1+q}^b - Re a_q^b)$.

Доведення. На підставі леми 1 та нерівностей (16), (30), отримуємо, що існує таке число $K_2 > 0$, що для всіх $k \in \mathrm{N}$, $k > K_2$ виконується оцінка

$$|a_{5,k}|^2 \prod_{l=1}^{2}\prod_{q=1}^{2} |a_{2+l,k} - a_{q,k}|^{3-q} = \left|\sum_{r=0}^{b} a_5^r \lambda_k^r\right| \prod_{l=1}^{2}\prod_{q=1}^{2} \left|\sum_{r=0}^{b} (a_{2+l}^r - a_q^r)\lambda_k^r\right|^{3-q} \geq C_{11}\lambda_k^{7b}. \tag{31}$$

Із оцінок (30) випливає, що існує таке число $K_3 > 0$, що нерівності

$$Re(a_{1+q,k} - a_{q,k}) \geq \eta \lambda_k^b, \quad q \in \{1,3\} \tag{32}$$

виконуються для всіх натуральних $k > K_3$. Оскільки для довільного $z \in \mathrm{C}$ такого, що $Re z \geq \zeta > 0$, справджується нерівність $|e^z - 1| \geq e^{\zeta} - 1$, то на підставі оцінок (32) отримуємо

$$\left|e^{(a_{1+q,k} - a_{q,k})T} - 1\right| \geq |e^{\eta T \lambda_k^b} - 1|, \quad q \in \{1,3\}.$$

Враховуючи (30), (31), і те, що $e^{\zeta} - 1 \geq 1/(2\zeta)$ для всіх $\zeta > 1$, із формули (17) встановлюємо, що нерівність

$$|\Delta(k)| \geq C_{12}\lambda_k^{7b} e^{-(Re a_{2,k} + Re a_{2,k})T} (e^{\eta T \lambda_k^b} - 1)^2 \geq \lambda_k^{7b - \varepsilon_1} e^{-2(\delta_2 - \eta)T}, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

справджується для всіх $k \in \mathrm{N}$, $k > \max\{K_2, K_3\}$. З отриманої оцінки випливає доведення твердження.

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} a_1(L) + a_2(L) & a_6(L) \\ a_5(L) & a_3(L) + a_4(L) \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_1(L) a_2(L) & a_6(L) a_2(L) \\ a_5(L) a_1(L) & a_3(L) a_4(L) + a_5(L) a_6(L) \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}, \qquad (t,x) \in D, \tag{33}$$

де $a_q(L) = \sum\limits_{r=0}^{b} a_q^r L^r$, $Re a_q^b > 0$, $q \in \{1,\ldots,4\}$. Припустимо, що $a_{q,k} = \sum\limits_{r=0}^{b} a_q^r \lambda_k^r$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, справджують умову (16), і $a_{q,k} \neq 0$, $q \in \{5,6\}$, $\forall k \in \mathrm{N}$. Для цієї сисмеми $\mu_q(k) = -a_{q,k}$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, а вектори $\vec{h}_{q,k} = col(h_{q,k}^1, h_{q,k}^2)$ визначаються формулами

$$h^1_{q,k} = (a_{3,k} - a_{q,k})(a_{4,k} - a_{q,k}) + a_{5,k}a_{6,k}, \quad h^2_{q,k} = a_{5,k}(a_{1,k} - a_{q,k}), \quad (34)$$

Оскільки для довільного натурального k $h^1_{q,k} = \mu_q^2(k) + (a_{3,k} + a_{4,k})\mu_q(k) + a_{3,k}a_{4,k} + a_{5,k}a_{6,k} \neq 0$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, то для системи (33) справджуються умови $B_1)$ та $B_2)$.

Твердження 2. *Нехай для коефіцієнтів системи* (33) *справджуються умови* (30) *та нерівності*

$$a_6^b \neq 0, \quad (a_3^b - a_1^b)(a_4^b - a_1^b) \neq -a_5^b a_6^b. \quad (35)$$

Тоді для задачі (3), (4), (33) *нерівність* (21) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathrm{N}$ *при* $\gamma > -8b$, $\nu = 2\delta_2(t_1 + t_2)$.

Доведення. Розкриваючи визначник $\Delta(k)$ за мінорами перших двох рядків отримуємо

$$\Delta(k) = \sum_{\omega=(i_1,i_2)\in C(4,2)} (-1)^{3+i_1+i_2} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) e^{-(a_{i_1,k}+a_{i_2,k})t_1-(a_{j_1,k}+a_{j_2,k})t_2}, \quad (36)$$

де набір $\sigma(\omega)$ – однозначно визначається за набором $\omega = (i_1, i_2) \in C(4,2)$, умовою $\omega \cap \sigma(\omega) = \varnothing$. Із формули (36) отримуємо

$$|\Delta(k)| \geq e^{-Re(a_{3,k}+a_{4,k})t_1 - Re(a_{1,k}+a_{2,k})t_1} \Bigg| |h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)| -$$

$$- \left| \sum_{\omega\in C(4,2)\setminus\omega_0} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) e^{(a_{3,k}+a_{4,k}-a_{i_1,k}-a_{i_2,k})t_1+(a_{1,k}+a_{2,k}-a_{j_1,k}-a_{j_2,k})t_2} \right|, (37)$$

де $\omega_0 = \{3,4\}$, $\sigma_0 = \{1,2\}$. Із формул (34) на підставі леми 1 та нерівностей (30), (35) отримуємо

$$|h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)| = |(a_{5,k})^3 a_{6,k}(a_{1,k} - a_{2,k})(a_{3,k} - a_{4,k})| \times$$

$$|((a_{3,k} - a_{1,k})(a_{4,k} - a_{1,k}) + a_{5,k}a_{6,k})| \geq C_{13}\lambda_k^{8b}. \quad (38)$$

На підставі оцінок (30) випливає, що для довільних наборів $\omega, \sigma \in C(4,2)$, $\omega \neq \omega_0$, $\sigma \neq \sigma_0$, виконується умова

$$\lim_{k\mapsto\infty} e^{(a_{3,k}+a_{4,k}-a_{i_1,k}-a_{i_2,k})t_1+(a_{1,k}+a_{2,k}-a_{j_1,k}-a_{j_2,k})t_2} = 0.$$

Звідси, діснанемо, що $\exists K_4 > 0$ таке, що для всіх $k \in \mathrm{N}$, $k > K_4$ виконується оцінка

$$\left| \sum_{\omega\in C(4,2)\setminus\omega_0} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) e^{(a_{3,k}+a_{4,k}-a_{i_1,k}-a_{i_2,k})t_1+(a_{1,k}+a_{2,k}-a_{j_1,k}-a_{j_2,k})t_2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} |h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)|.$$

Отже на підставі оцінок (30), (37) та (38) отримуємо

$$|\Delta(k)| \geq e^{-Re(a_{3,k}+a_{4,k})t_1 - Re(a_{1,k}+a_{2,k})t_1} |h_{\omega_0}(k) h_{\sigma_0}(k)| \geq \lambda_k^{8b-\varepsilon_2} e^{-2\delta_2(t_1+t_2)\lambda_k^b},$$

де $\varepsilon_2 > 0$. Твердження доведено.

Зауваження 1. Оцінки отримані в тверженнях 1, 2 означають, що для деяких двоточкових задач для систем параболічних рівнянь другого порядку відсутня проблема малих знаменників.

5. Метричні оцінки малих знаменників. Дослідимо питання про можливість виконання оцінки (21). Для цього введемо такі позначення: $\delta_3 = \sup\limits_{k\in\mathrm{N}} \max\limits_{q\in\{1,\ldots,4\}} \{|Re\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$; $set\omega \equiv \{i_1, i_2\}$; для набору $\omega = (i_1, i_2) \in C(4,2)$ введемо такий набір $\sigma(\omega) = (j_1, j_2) \in C(4,2)$, що $set\omega \cap set\sigma(\omega) = \varnothing$; $M_\omega(k) = \mu_{i_1}(k) + \mu_{i_2}(k),$ $\omega = (i_1, i_2) \in C(4,2)$; $\vec{H}_q(k) = col(\vec{h}_{q,k}, \mu_q(k)\vec{h}_{q,k})$, $q \in \{1,\ldots,4\}$;

$$H(k) = \det\left\|\vec{H}_1(k),\ldots,\vec{H}_4(k)\right\|; \tag{39}$$

$$S(k) = \prod_{\substack{\sigma\prec\omega,\\ \sigma,\omega\in C(4;2)}} \left(M_\sigma(k) - M_\omega(k)\right)^2. \tag{40}$$

Теорема 3. *Нехай існують такі сталі γ_1 і γ_2, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$ виконуються нерівності*

$$|H(k)| > \lambda_k^{-\gamma_1}, \tag{41}$$

$$|S(k)| > \lambda_k^{-\gamma_2}. \tag{42}$$

Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R) чисел $t_2 \in (t_1;T]$ (при довільно фіксованому $t_1 \in [0;T)$) нерівність (21) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, якщо $\gamma > 5p/2 + \gamma_1 + \gamma_2/2 + 17b$ та $\nu \geq 2\delta_3(T + t_1)$.*

Доведення. Для кожного натурального k розглянемо множину

$$F_\gamma^\nu(k) = \{t_2 \in (t_1, T] : |\Delta(k)| \leq \nu(k)\},$$

де $\nu(k) = w_k(-5p/2 - \gamma_1 - \gamma_2/2 - 17b - \varepsilon_0 \quad , -2\delta_3(T + t_1))$, $\varepsilon_0 > 0$. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі [14, с. 13] для доведення теореми досить перевірити, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} mes_R F_\gamma^\nu(k) \tag{43}$$

є збіжним, якщо $\gamma > 5p/2 + \gamma_1 + \gamma_2/2 + 17b$, $\nu \geq 2\delta_3(T + t_1)$. Спочатку доведемо, що існують такі попарно неперетинні набори ω_1 і $\omega_2 \in C(4,2)$ для яких нерівності

$$|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)| \geq C_{14}\lambda_k^{-\gamma_1-2b}, \tag{44}$$

$$\prod_{\substack{\sigma\in C(4,2),\\ \sigma\neq\omega_2}} |M_{\omega_2}(k)-M_\sigma(k)| \geq C_{15}\lambda_k^{-\gamma_2/2-10b}, \tag{45}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in \mathrm{N}$.

Дійсно, за теоремою Лапласа про обчислення визначників, розкладемо визначник $H(k)$ за мінорами перших двох рядків і враховуючи нерівності (41) дістанемо

$$\lambda_k^{-\gamma_1} < |H(k)| = \left|\sum_{\omega\in C(4,2)} (-1)^{i_1-i_2+1} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k)\mu_{j_1}(k)\mu_{j_2}(k)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{\omega\in C(4,2)} |h_\omega(k)||h_{\sigma(\omega)}(k)||\mu_{j_1}(k)||\mu_{j_2}(k)|, \tag{46}$$

де $\sigma(\omega)=(j_1,j_2)$. Сума в правій частині нерівності (46) містить 6 доданків, тому знайдуться такі два неперетинні набори $\omega_1,\omega_2\in C(4,2)$, що

$$\sum_{\omega\in C(4,2)} |h_\omega(k)||h_{\sigma(\omega)}(k)||\mu_{j_1}(k)||\mu_{j_2}(k)| \leq$$
$$\leq 6|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)||\mu_{q_1}(k)||\mu_{q_2}(k)|, \tag{47}$$

де $\omega_2=(q_1,q_2)$. Із нерівностей (24), (46) та (47) випливає, що

$$\lambda_k^{-\gamma_1} \leq 6|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)||\mu_{q_1}(k)||\mu_{q_2}(k)| \leq 6(C_5)^2\lambda_k^{2b}|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)|,$$

тобто $|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)| \geq \dfrac{1}{6(C_4)^2}\lambda_k^{-\gamma_1-2b}$.

Для доведення нерівності (45) використаємо, те, що на підставі формули (42) функцію $S(k)$ можна записати у вигляді

$$S(k)=\prod_{\substack{\sigma\in C(4,2),\\ \sigma\neq\omega_2}} (M_{\omega_2}(k)-M_\sigma(k))^2 \prod_{(\sigma,\omega)\in I_2} (M_\sigma(k)-M_\omega(k))^2, \tag{48}$$

де $I_1=\{(\sigma,\omega_2):\sigma\in C(4,2),\sigma\prec\omega_2\}\cup\{(\omega_2,\omega):\omega\in C(4,2),\omega_2\prec\omega\}$,
$I_2=\{(\sigma,\omega):\sigma\prec\omega,(\sigma,\omega)\notin I_1\}$. Оскільки множина I_2 складається з 10 елементів, то на підставі оцінок (24) одержуємо

$$\prod_{(\sigma,\omega)\in I_2} |M_\sigma(k)-M_\omega(k)|^2 \leq (4C_4)^{20}\lambda_k^{20b}. \tag{49}$$

Із формули (48), на підставі оцінок (45), (49) отримуємо, що нерівність

$$\prod_{\sigma\in C(4,2),\sigma\neq\omega_2} |M_{\omega_2}(k)-M_\sigma(k)|^2 \geq \frac{1}{(4C_4)^{20}}\lambda_k^{-\gamma_2-20b}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, а отже й нерівність $\prod_{\sigma\in C(4,2),\sigma\neq\omega_2} |M_{\omega_2}(k)-M_\sigma(k)| \geq \dfrac{1}{(4C_4)^{10}}\lambda_k^{-\gamma_2/2-10b}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in \mathrm{N}$.

Для доведення збіжності ряду (43) оцінемо зверху Лебегові міри множин $F_\gamma^\nu(k)$, $k \in \mathrm{N}$. Для цього використовуючи теорему Лапласа про обчислення визначників, розкладемо $\Delta(k)$ за мінорами перших двох рядків, отримаємо

$$\Delta(k) = \sum_{\omega=(i_1,i_2)\in C(4,2)} (-1)^{i_1+i_2+3} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) e^{M_\omega(k)t_1 + M_{\sigma(\omega)}(k)t_2}. \qquad (50)$$

Запровадимо диференціальний вираз п'ятого порядку

$$P_{\omega_2}(d/dt_2, k) = \prod_{\substack{\sigma\in C(4;2),\\ \sigma\neq\omega_2}} \left(d/dt_2 - M_\sigma(k)\right),$$

де $\omega_2 \in C(4,2)$ набір для якого виконуються оцінки (44), (45). Застосуємо диференціальний вираз $P_{\omega_2}(d/dt_2, k)$ до обидвох частин рівності (50) отримуємо

$$P_{\omega_2}(d/dt_2, \lambda_k)\Delta(k) = h_{\omega_1}(k) h_{\omega_2}(k) P_{\omega_2}(M_{\omega_2}(k), \lambda_k) e^{M_{\omega_1}(k)t_1 + M_{\omega_2}(k)t_2}. \quad (51)$$

Оскільки для довільного фіксованого $t_1 \in [0,T)$ і довільного $t_2 \in (t_1, T]$ виконуються нерівності

$$\left| e^{M_{\omega_1}(k)t_1 + M_{\omega_2}(k)t_2} \right| \geq e^{-2\delta_3(T+t_1)\lambda_k^b},$$

то із рівності (51), на підставі оцінок (44), (45) отримуємо, що нерівність

$$\forall t_2 \in (t_1, T] \quad \left| P_{\omega_2}(d/dt_2, k)\Delta(k) \right| \geq C_{16} w_k(-\gamma_1/2 - \gamma_2 - 12b, -2\delta_3(T+t_1)) \quad (52)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k.

Для оцінки зверху мір Лебега множин $F_\gamma^\nu(k)$, $k \in \mathrm{N}$, використаємо лему 2 із [9]. Для цього зауважимо, що із формули (50) випливає, що для довільного фіксованого $t_1 \in [0,T)$ визначник $\Delta(k)$ є квазімногочленом змінної t_2, модулі показників експонент якого не перевищують $2C_5\lambda_k^b$. Степінь многочлена $P_{\omega_2}(\mu, k)$ за змінною μ дорівнює 5, а модуль коефіцієнта при похідній $\left(d/dt_2\right)^{5-j}$, $j \in \{0,1,\ldots,5\}$, у виразі $P_{\omega_2}(d/dt_2, k)$ не перевищує $C_{17}\lambda_k^{jb}$, тоді на підставі леми 2 із [9] та оцінок (52) і отримуємо

$$mes_{\mathrm{R}} F_\gamma^\nu(k) \leq C_{18}\lambda_k^b \left(\frac{\nu(k)}{w_k(-\gamma_1/2 - \gamma_2 - 12b, -2\delta_3(T+t_1))} \right)^{1/5} \leq C_{18}\lambda_k^{-p/2-\varepsilon_0/5}. \quad (53)$$

Із оцінок (1), (53) випливає, що ряд (43) мажорується збіжним числовим рядом $C_{19}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-2\varepsilon_0/5}$. Теорему доведено.

Наведемо приклад параболічної системи для якої виконуються умови (41), (42).

Приклад 3. Для системи (33) функція $S(k)$ зображується формулою

$$S(k) = \prod_{\substack{\sigma \prec \omega, \\ \sigma, \omega \in C(4;2)}} \left(\sum_{r=0}^{b} (a_{j_1}^r + a_{j_2}^r - a_{i_1}^r - a_{i_2}^r) \lambda_k^r \right)^2 . \qquad (54)$$

Припустимо, що для довільних наборів $\omega, \sigma \in C(4,2)$ виконуються нерівності

$$a_{j_1}^b + a_{j_2}^b \neq a_{i_1}^b + a_{i_2}^b, \quad \sum_{r=0}^{b} (a_{j_1}^r + a_{j_2}^r - a_{i_1}^r - a_{i_2}^r) \lambda_k^r \neq 0, \quad \forall k \in \mathrm{N},$$

тоді із формули (54) на підставі леми 1 отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k виконується нерівність $|S(k)| \geq C_{20} \lambda_k^{30b}$, тобто оцінка (42) справджується при $\gamma_2 > -30b$. Із формул (34), (39) знаходимо, що

$$H(k) = (a_{5,k})^2 \big(a_{5,k} a_{6,k} + (a_{3,k} - a_{1,k})(a_{4,k} - a_{1,k}) \big) \prod_{1 \leq j < q \leq 4} (a_{q,k} - a_{j,k}).$$

На підставі леми 1 та умов (35), отримуємо, що нерівність $|H(k)| > C_{21} \lambda_k^{10b}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$.

Для того, щоб зясувати питання за яких умов виконуються оцінки (41), (42) для системи (2), запровадимо такі позначення:

$\vec{Y} = col(Y_1, \ldots, Y_\theta) \equiv col(a_{mj}^{r,q_r} : m, j \in \{1,2\},\ r \in \{0,1\},$ $q_r \in \{0,1,\ldots,(2-r)b\})$ – вектор розміру $\theta = 4(3b+2)$, складений з коефіцієнтів системи (2);

$$\Pi_\theta(\rho) = \{\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_\theta) \in \mathrm{C}^\theta : \max_{j \in \{1,\ldots,\theta\}} |Y_j| \leq \rho\},\ \rho > 0.$$

Зауваження 2. Використовуючи міркування, аналогічні тим, які були застосовані при доведенні леми 4 та леми 5 із [6] встановлюємо, що для системи (2) нерівності (41), (42) справджуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в C^θ) векторів $\vec{Y} \in \Pi_\theta(\rho)$ для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, якщо $\gamma_1 > 3p$, $\gamma_2 > 15p/2$.

З теорем 2, 3 та зауваження 2 випливає твердження про однозначну розв'язність задачі (2)-(4) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з її параметрів.

Теорема 4. *Нехай виконується умова* (14) *і нехай для система* (2) *справджуються умови* $B_1)$, $B_2)$. *Якщо* $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \in \overline{E}^b_{\alpha_0,\beta_0}$, *де* $\alpha_0 > \alpha + {}$ $+ 37p/4 + 27b$, $\beta_0 = \beta + 2\delta_3(T + t_1) - 3\delta_1 t_1$, *то для довільно фіксованого* $t_1 \in [0,T)$ *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* R*) чисел* $t_2 \in (t_1, T]$ і *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* C^{θ}*) векторів* $\vec{Y} \in \Pi_{\theta}(\rho)$ *в просторі* $C^{n}\left([0,T];\overline{E}^{b}_{\alpha,\beta}\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2)-(4)*, який зображується рядом* (20) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_1$, $\vec{\varphi}_2$.

6. Висновки. У даній роботі розглянуто локальну двоточкову задачу для системи параболічних рівнянь другого порядку за часом зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Дана задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку. Встановлено умови єдиності та умови існування розв'язку задачі, доведено метричні оцінки знизу малих знаменників задачі. Наведено клас задач з умовами (3), (4) для системи рівнянь (33) у яких відсутня проблема малих знаменників.

Література

1. Борок В.М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных / В.М.Борок // Изв. АН ССР. Сер. матем. – 1971. – Т.35, Вып.1. – С. 185-201.
2. Каленюк П.І. Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними / П.І.Каленюк, І.В.Когут, З.М.Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т.52, №4. – С. 7-17.
3. Асанова А.Т. Об однозначной разрешымости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференцыальных уравнений / А.Т. Асанова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006.– Т. **12**, № 4.– С.21-39.
4. Клюс І.С. Двоточкова задача для системи рівнянь із частинними похідними / І.С.Клюс // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №2. – С. 75-81.
5. Василишин П.Б. Багатоточкові задачі для безтипних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами / П.Б. Василишин, Б.Й. Пташник, Л.П. Силюга // Віс. Прикарпатського ун-ту. Математика. Фізика. – 2001. – Вип.2. – С. 151-166.
6. Симотюк М.М. Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними / М.М.Симотюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, №4. – С. 107-118.
7. Симотюк М.М. Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами / М.М.Симотюк, І.Р.Тимків // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. – №1 (29) . – С. 45-59.

8. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И.Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. Бобик І.О. Оцінки характеристичних визначників задач з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними / І.О.Бобик, М.М.Симотюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математ. – 2007. – Вип. 336-337. – С. 20-28.
10. Каленюк П.І. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П.І.Каленюк, З.М.Нитребич. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
11. Ильин В.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных / В.А.Ильин, И.А.Шишмарев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – 24, №6. – С. 883-896.
12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П.Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
13. Фаддєєв Д.К. Збірник задач з вищої алгебри / Д.К.Фаддєєв, І.С.Сомінський. – К.: Вища шк., 1971. – 316 с.
14. Спринжук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В.Г.Спринжук. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 16.03.2016 р.
Рекомендовано до друку член-кореспондентом НАН України,
*д.ф.-м.н., професором **Пташником Б.Й.** (м. Львів),*
*д.ф.-м.н., професором **Королем І.І.** (м. Ужгород)*

PROBLEM WITH TWO-POINTS CONDITIONS FOR SYSTEM PARABOLIC EQUATIONS OF SECOND ORDER ON TIME

I. R. Tymkiv
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpats'ka str. 15;
ph: +380 (342) 72-71-31; e-mail: tymkiv_if@ukr.net .

The correctness of the problem with two-points conditions on time variable and Dirichlet type conditions on spatial coordinate for the system parabolic equations of second order on time. The conditions of existence and uniqueness solution of the problem are established. The metrical theorem on evalution from below of small denominators of the problem are proved.

***Key words**: two-points conditions, system parabolic, small denominators, Lebesque measure.*