УДК 517.98

ПРО СИМЕТРИЧНІ *-ПОЛІНОМИ ВІД ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

Т. В. Василишин, М. М. Струтинський
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: taras_vasylyshyn@mail.ru, strutinskii1991@gmail.com

*Показано, що кожен симетричний *-поліном від двох комплексних змінних можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних *-поліномів.*

Ключові слова: **-поліном, симетричний *-поліном.*

1. Попередні відомості

Основна теорема про симетричні поліноми від скінченної кількості змінних (див. [1]) стверджує, що кожен такий поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних поліномів. Цілий ряд робіт ([3], [4], [5], [7] та інші) присвячено узагальненням основної теореми на випадок симетричних поліномів від нескінченної кількості змінних і дослідженню властивостей просторів таких поліномів. З іншого боку, активно розвивається теорія *-поліномів ([6], [2]).

*-поліном – це відображення між комплексними лінійними просторами, яке є звуженням на діагональ сум відображень, які є лінійними по частині змінних і антилінійними по решті змінних. У даній статті доведено аналог основної теореми про симетричні поліноми для симетричних *-поліномів від двох комплексних змінних.

2. Основні результати

Комплекснозначний *-поліном P від двох комплексних змінних назвемо симетричним, якщо P можна подати у вигляді

$$P(x,y) = \sum_{(m_1,l_1,m_2,l_2)\in\Lambda_P} a_{(m_1,l_1,m_2,l_2)}\left(x^{m_1}\overline{x}^{l_1}y^{m_2}\overline{y}^{l_2} + x^{m_2}\overline{x}^{l_2}y^{m_1}\overline{y}^{l_1}\right),$$

де Λ_P – скінченна підмножина $\mathbb{Z}_+^4$, $a_{(m_1,l_1,m_2,l_2)}$ – комплексні числа.

Елементарними симетричними *-поліномами від двох змінних назвемо відображення

$$\sigma_{10}(x,y) = x + y;$$
$$\sigma_{01}(x,y) = \overline{x} + \overline{y};$$
$$\sigma_{20}(x,y) = xy;$$
$$\sigma_{02}(x,y) = \overline{xy};$$
$$\sigma_{11}(x,y) = x\overline{y} + \overline{x}y.$$

Для скорочення запису у подальшому викладі будемо опускати список аргументів. Наприклад, $\sigma_{10}(x,y)$ будемо записувати як σ_{10}.

Теорема 1. *Кожен симетричний *-поліном від двох комплексних змінних можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних *-поліномів.*

Доведення. Задача зводиться до подання у такому вигляді *-поліномів $x^{m_1}\overline{x}^{l_1}y^{m_2}\overline{y}^{l_2}+x^{m_2}\overline{x}^{l_2}y^{m_1}\overline{y}^{l_1}$. Без зменшення загальності можемо вважати, що $m_1\geq m_2$.

Якщо $l_1\geq l_2$, то

$$x^{m_1}\overline{x}^{l_1}y^{m_2}\overline{y}^{l_2}+x^{m_2}\overline{x}^{l_2}y^{m_1}\overline{y}^{l_1}=$$
$$=x^{m_2}\overline{x}^{l_2}y^{m_2}\overline{y}^{l_2}\left(x^{m_1-m_2}\overline{x}^{l_1-l_2}+y^{m_1-m_2}\overline{y}^{l_1-l_2}\right).$$

Якщо $l_1<l_2$, то

$$x^{m_1}\overline{x}^{l_1}y^{m_2}\overline{y}^{l_2}+x^{m_2}\overline{x}^{l_2}y^{m_1}\overline{y}^{l_1}=$$
$$=x^{m_2}\overline{x}^{l_1}y^{m_2}\overline{y}^{l_1}\left(x^{m_1-m_2}\overline{y}^{l_2-l_1}+\overline{x}^{l_2-l_1}y^{m_1-m_2}\right).$$

Оскільки $x^{m_2}\overline{x}^{l_2}y^{m_2}\overline{y}^{l_2}=\sigma_{20}^{m_2}\sigma_{02}^{l_2}$ і $x^{m_2}\overline{x}^{l_1}y^{m_2}\overline{y}^{l_1}=\sigma_{20}^{m_2}\sigma_{02}^{l_1}$, то задача звелася до подання *-поліномів

$$F_{ml}=x^m\overline{x}^l+y^m\overline{y}^l$$

і

$$G_{ml}=x^m\overline{y}^l+\overline{x}^l y^m,$$

де $m,l\in\mathbb{Z}_+$, у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних *-поліномів. Зауважимо, що

$$\overline{F}_{ml}=F_{lm},\qquad \overline{G}_{ml}=G_{lm},\qquad \overline{\sigma}_{10}=\sigma_{01},\qquad \overline{\sigma}_{20}=\sigma_{02},\qquad \overline{\sigma}_{11}=\sigma_{11}.$$

Тому із можливості подання F_{ml} у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних *-поліномів випливає можливість такого подання для F_{lm}. Тому можемо обмежитись випадком $m\geq l$.

Зауважимо, що $F_{m0}=G_{m0}=x^m+y^m$ – це симетричні поліноми від двох змінних, тому за основною теоремою про симетричні поліноми (див. [1, §52]) їх можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації σ_{10} і σ_{20}. Нехай $(m,l)\in\mathbb{N}^2$ і $m\geq l$. Припустимо, що для усіх пар $(m',l')\in\mathbb{Z}_+^2$ таких, що $m'<m$ і $l'\leq l$ або $m'\leq m$ і $l'<l$ *-поліноми $F_{m'l'}$ і $G_{m'l'}$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних *-поліномів. Покажемо, що F_{ml} і G_{ml} також можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації. Розглянемо добуток

$$\sigma_{10}^{m-l}(\sigma_{10}\sigma_{01}-\sigma_{11})^l=(x+y)^{m-l}(x\overline{x}+y\overline{y})^l.$$

Позначимо

$$S=(x+y)^{m-l}-(x^{m-l}+y^{m-l}).\qquad(1)$$

Тоді

$$\sigma_{10}^{m-l}(\sigma_{10}\sigma_{01}-\sigma_{11})^l = (x^{m-l}+y^{m-l}+S)(x\overline{x}+y\overline{y})^l =$$
$$= (x^{m-l}+y^{m-l})(x\overline{x}+x\overline{x})^l + (x\overline{x}+y\overline{y})^l S.$$

Позначимо

$$K = (x\overline{x} \mid y\overline{y})^l \quad ((x\overline{x})^l \mid (y\overline{y})^l).$$

Тоді

$$\sigma_{10}^{m-l}(\sigma_{10}\sigma_{01}-\sigma_{11})^l = (x^{m-l}+y^{m-l})((x\overline{x})^l+(y\overline{y})^l+K) + (x\overline{x}+y\overline{y})^l S =$$
$$= (x^{m-l}+y^{m-l})((x\overline{x})^l+(y\overline{y})^l) + (x^{m-l}+y^{m-l})K + (x\overline{x}+y\overline{y})^l S =$$
$$= x^m\overline{x}^l + y^m\overline{y}^l + x^{m-l}y^l\overline{y}^l + x^l\overline{x}^l y^{m-l} + (x^{m-l}+y^{m-l})K +$$
$$+(x\overline{x}+y\overline{y})^l S.$$

Звідси

$$F_{ml} = \sigma_{10}^{m-l}(\sigma_{10}\sigma_{01}-\sigma_{11})^l - \left(x^{m-l}y^l\overline{y}^l + x^l\overline{x}^l y^{m-l}\right) -$$
$$-(x^{m-l}+y^{m-l})K - (x\overline{x}+y\overline{y})^l S.$$

Зауважимо, що $(x^{m-l}+y^{m-l})$ і S є симетричними поліномами від двох змінних, тому за основною теоремою про симетричні поліноми їх можна алгебраїчно виразити через σ_{10} та σ_{20}. Залишилося показати, що *-поліноми $\left(x^{m-l}y^l\overline{y}^l + x^l\overline{x}^l y^{m-l}\right)$ і K можна алгебраїчно виразити через елементарні симетричні *-поліноми.

При $m-l \geq l$

$$x^{m-l}y^l\overline{y}^l + x^l\overline{x}^l y^{m-l} = x^l y^l\left(x^{m-2l}\overline{y}^l + \overline{x}^l y^{m-2l}\right) = \sigma_{20}^l G_{m-2l,l}.$$

При $m-l < l$

$$x^{m-l}y^l\overline{y}^l + x^l\overline{x}^l y^{m-l} = x^{m-l}y^{m-l}\left(y^{l-(m-l)}\overline{y}^l + x^{l-(m-l)}\overline{x}^l\right) =$$
$$= \sigma_{20}^{m-l}F_{l-(m-l),l}.$$

Згідно із припущенням, $F_{l-(m-l),l}$ і $G_{m-2l,l}$ можна алгебраїчно виразити через елементарні симетричні *-поліноми. Розглянемо *-поліном F.

При $l=1$ $K=0$. При $l>1$

$$K = \sum_{j=1}^{l-1} C_l^j (x\overline{x})^j (y\overline{y})^{l-j}.$$

Якщо l – непарне, то

$$K = \sum_{j=1}^{(l-1)/2} C_l^j \left((x\overline{x})^j (y\overline{y})^{l-j} + (x\overline{x})^{l-j}(y\overline{y})^j\right).$$

Якщо l – парне, то

$$K - C_l^{l/2}\sigma_{20}^{l/2}\sigma_{02}^{l/2} + \sum_{j=1}^{(l-1)/2} C_l^j \left((x\overline{x})^j (y\overline{y})^{l-j} + (x\overline{x})^{l-j}(y\overline{y})^j\right).$$

Зауважимо, що

$$(x\overline{x})^j(y\overline{y})^{l-j}+(x\overline{x})^{l-j}(y\overline{y})^j-(x\overline{x}y\overline{y})^j\left((y\overline{y})^{l-2j}+(x\overline{x})^{l-2j}\right)-$$
$$=\sigma_{20}^j\sigma_{02}^jF_{l-2j,l-2j}.$$

За припущенням, $F_{l-2j,l-2j}$ можна алгебраїчно виразити через елементарні симетричні *-поліноми. Отже, можемо зробити висновок, що K і, відповідно, F_{ml} можна алгебраїчно виразити.

Доведемо, що G_{ml} можна алгебраїчно виразити через елементарні *-поліноми. Розглянемо добуток

$$\sigma_{10}^{m-l}\sigma_{11}^l=(x+y)^{m-l}(x\overline{y}+\overline{x}y)^l.$$

Знову використаємо позначення (1). Отримаємо

$$\sigma_{10}^{m-l}\sigma_{11}^l=(x^{m-l}+y^{m-l})(x\overline{y}+\overline{x}y)^l+(x\overline{y}+\overline{x}y)^lS.$$

Позначимо

$$K'=(x\overline{y}+\overline{x}y)^l-((x\overline{y})^l+(\overline{x}y)^l).$$

Тоді

$$\sigma_{10}^{m-l}\sigma_{11}^l=(x^{m-l}+y^{m-l})((x\overline{y})^l+(\overline{x}y)^l+K')+(x\overline{y}+\overline{x}y)^lS.$$

Звідси

$$G_{ml}=\sigma_{10}^{m-l}\sigma_{11}^l-\left(x^{m-l}\overline{x}^ly^l+x^ly^{m-l}\overline{y}^l\right)-(x^{m-l}+y^{m-l})K'-$$
$$-(x\overline{y}+\overline{x}y)^lS.$$

Залишилося показати, що $\left(x^{m-l}\overline{x}^ly^l+x^ly^{m-l}\overline{y}^l\right)$ і K' можна алгебраїчно виразити через елементарні симетричні *-поліноми.

При $m-l\geq l$

$$x^{m-l}\overline{x}^ly^l+x^ly^{m-l}\overline{y}^l=x^ly^l\left(x^{m-2l}\overline{x}^l+y^{m-2l}\overline{y}^l\right)=\sigma_{20}^lF_{m-2l,l}.$$

При $m-l<l$

$$x^{m-l}\overline{x}^ly^l+x^ly^{m-l}\overline{y}^l=x^{m-l}y^{m-l}\left(\overline{x}^ly^{l-(m-l)}+x^{l-(m-l)}\overline{y}^l\right)$$
$$=\sigma_{20}^{m-l}G_{l-(m-l),l}.$$

Згідно із припущенням, $F_{m-2l,l}$ і $G_{l-(m-l),l}$ можна алебраїчно виразити через елементарні симетричні *-поліноми.

Доведемо, що K' можна алгебраїчно виразити. При $l=1$ $K'=0$. При $l>1$

$$K'=\sum_{j=1}^{l-1}C_l^j(x\overline{y})^j(\overline{x}y)^{l-j}.$$

Якщо l – непарне, то

$$K'=\sum_{j=1}^{(l-1)/2}C_l^j\left((x\overline{y})^j(\overline{x}y)^{l-j}+(x\overline{y})^{l-j}(\overline{x}y)^j\right).$$

Якщо l – парне, то

$$K'=C_l^{l/2}\sigma_{20}^{l/2}\sigma_{02}^{l/2}+\sum_{j=1}^{(l-1)/2}C_l^j\left((x\overline{y})^j(\overline{x}y)^{l-j}+(x\overline{y})^{l-j}(\overline{x}y)^j\right).$$

Зауважимо, що

$$(x\overline{y})^j(\overline{x}y)^{l-j} + (x\overline{y})^{l-j}(\overline{x}y)^j = (x\overline{y})^j(\overline{x}y)^j\left((\overline{x}y)^{l-2j} + (x\overline{y})^{l-2j}\right) =$$
$$= \sigma_{20}^j\sigma_{02}^j G_{l-2j,l-2j}.$$

Звідси випливає, що K', а відповідно і $G_{m,l}$, можна алгебраїчно виразити через елементарні симетричні *-поліноми. Теорему доведено.

Література

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г.Курош. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
2. Митрофанов М.А. Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах / М.А.Митрофанов // Математичиские заметки. – 2009. – Т.86, Вип. 4. – С. 557-570.
3. Algebras of symmetric holomorphic functions on l_p / R.Alencar, R.Aron, P.Galindo and A.Zagorodnyuk // Bull. London Math. Soc. – 2003. – V.35. – P. 55-64.
4. Chernega I. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions / I.Chernega, P.Galindo and A.Zagorodnyuk // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – V. 395. – P. 569-577.
5. Gonzales M. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces / M.Gonzales, R.Gonzalo and J.A.Jaramillo // J. London Math. Anal. Soc. – 1999. – V.59, №2. – P. 681-697.
6. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces / J.Mujica // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford – 1986. – 447 p.
7. Nemirovskii A.S. On polynomial approximation of functions on Hilbert space / A.S.Nemirovskii, S.M.Semenov // Mat. USSR Sbornik. – 1973. – V. 21. – P. 255-277.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.11.2015 р.
Рекомендовано до друку к.ф.-м.н., доцентом ***Копачем М.І.,***
к.ф.-м.н., науковим працівником ***Чернегою І.В.*** *(м. Львів)*

ON THE SYMMETRIC *-POLYNOMIALS OF TWO COMPLEX VARIABLES

T. V. Vasylyshyn, M. M. Strutinskii

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: taras_vasylyshyn@mail.ru, strutinskii1991@gmail.com

*We show that the every symmetric *-polynomial of two complex variables can be represented as an algebraic combination of the elementary symmetric *-polynomials.*

Key words: **-polynomial, symmetric *-polynomial.*