УДК 517.94

РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТА ДЕЯКІ ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

І. В. Федак
Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника;
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: Fedak_ivan @ rambler.ru

Розглянуті властивості рекурентних співвідношень другого порядку, які є аналогами рівності Кассіні. Обґрунтовані властивості таких послідовностей, пов'язані з подільністю їх елементів чи сум.

Встановлені необхідні та достатні умови подільності суми довільних послідовних m членів послідовності Фібоначчі на m.

Ключові слова: *рекурентні співвідношення, послідовність Фібоначчі, рівність Кассіні, подільність.*

1. *Постановка задачі*. Пропонована Вашій увазі стаття присвячена поширенню відомих властивостей послідовності Фібоначчі на клас рекурентних послідовностей другого порядку, а також дослідженню деяких її нових властивостей.

Нагадаємо, що послідовністю Фібоначчі називають послідовність, яка визначається рівностями: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in N$.

За формулою Біне загальний член такої послідовності

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ n \in N.$$

Для елементів послідовності Фібоначчі справджується рівність Кассіні: $F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (-1)^{n+1}$, $n \geq 2$.

Справедливими є також рівності, які ми будемо використовувати надалі: $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ та $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$.

Зокрема, з останньої рівності отримуємо, що $F_{2m+1} = F_m^2 + F_{m+1}^2$ та $F_{2m} = F_m F_{m+1} + F_{m-1} F_m = \left(F_{m+1} + F_{m-1}\right) F_m$.

В статті також будуть використані деякі властивості елементів послідовності Фібоначчі, пов'язані з подільністю, зокрема:

1) F_m ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли $m = 3k$;
2) F_m ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли $m = 4k$;
3) F_m ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли $m = 6k$;
4) F_m ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли $m = 5k$ і т. д.

Цікавим є й число $m = 24$. Відомий факт: сума довільних двадцяти чотирьох послідовних чисел Фібоначчі ділиться на 24.

2. *Майже геометричні прогресії.* Як відомо, для геометричних прогресій для всіх $n \geq 2$ справджується рівність $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = 0$. Назвемо послідовність (a_n), $n \in N$, натуральних чисел a_n майже геометричною прогресією, якщо $\left|a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}\right| = 1$ для всіх $n \geq 2$.

Найпростішою майже геометричною прогресією є послідовність $a_n = n$. Внаслідок рівності Кассіні прикладом ще однієї майже геометричної прогресії є послідовність Фібоначчі.

Опишемо всі майже геометричні прогресії, які визначаються рекурентними співвідношеннями другого порядку, вигляду:

$$a_1 = 1,\ a_2 = a,\ a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n .$$

Нехай λ_1, $\lambda_2 -$ корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$.

Якщо $D = \alpha^2 + 4\beta > 0$, то, шукаючи загальний член послідовності у вигляді $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, отримаємо аналог формули Біне:

$$a_n = \frac{a - \lambda_1}{\lambda_2^2 + \beta}\lambda_1^n + \frac{a - \lambda_2}{\lambda_1^2 + \beta}\lambda_2^n .$$

Враховуючи формули Вієта: $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$, $\lambda_1\lambda_2 = -\beta$, звідси нескладно переконатися, що $\left|a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}\right| = 1,\ n \geq 2,$ лише у наступних випадках:

1). $\beta = 1,\ \alpha = a,\ a \in N.$ Для $a = 1$ як окремий випадок маємо класичну послідовність Фібоначчі.

2). $\beta = -1,\ \alpha = a,\ a \in N,\ a > 2.$ Для $a = 3$ маємо підпослідовність послідовності Фібоначчі з парними номерами.

3). $\beta = -1,\ \alpha = 3,\ a = 2.$ Це також підпослідовність послідовності Фібоначчі, тільки з непарними номерами.

4). $\beta = 1,\ \alpha = 1,\ a = 2.$ Знову маємо підпослідовність послідовності Фібоначчі, починаючи з другого номера.

5). $\beta = -1,\ \alpha = 3,\ a = 1.$ Ще одна з підпослідовностей послідовності Фібоначчі.

Якщо ж $D = 0$, то для $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ a = 2$ отримуємо ще одну шукану послідовність $a_n = n$, про яку мова йшла на початку. Але вона визначається рекурентним співвідношенням першого порядку: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$.

3. *Рекурентні співвідношення другого порядку і подільність*. Повернемося до згаданої вище властивості 4) і поставимо питання про існу-

вання рекурентних послідовностей другого порядку таких, що для кожного простого числа p число a_p ділиться без остачі на p.

Розглянемо послідовність

$$\left(a_n\right)_{n\geq 1} : a_1 = 0,\ a_2 = \alpha,\ a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2},\ n \geq 3.$$

Нехай $\alpha = 2^k\left(2^k+1\right)$, $\lambda = 2^k - 1$, $\mu = 2^k$, де k – довільне натуральне число. Методом математичної індукції доведемо, що

$$a_n = 2^{nk} + \left(-1\right)^n 2^k,\ n \geq 1.$$

Для $n = 1$ та $n = 2$ така рівність справджується, тобто маємо $a_1 = 0,\ a_2 = 2^k\left(2^k+1\right) = \alpha.$ Припустимо, що вона правильна для $n = m$ та $n = m+1$. Тоді для $n = m+2$ отримаємо

$$a_{m+2} = \lambda a_{m+1} + \mu a_m = \left(2^k - 1\right)\left(2^{(m+1)k} + \left(-1\right)^{m+1} 2^k\right) +$$

$$+2^k\left(2^{mk} + \left(-1\right)^m 2^k\right) = 2^{(m+2)k} + \left(-1\right)^{m+2} 2^k.$$

Звідси випливає справедливість записаної формули загального члена послідовності для всіх натуральних n.

Покладаючи $n = p,\ p > 2,$ за теоремою Ферма одержуємо

$$a_p = 2^{pk} + \left(-1\right)^p 2^k = 2^k\left(\left(2^{p-1}\right)^k - 1\right) \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0\left(\bmod p\right).$$

Зауважимо, що й для $p = 2$ число $a_p = 2^{2k} + 2^k$ ділиться без остачі на p.

Таким чином, існує нескінченна кількість рекурентних послідовностей другого порядку таких, що для кожного простого числа p число a_p ділиться без остачі на p.

Відзначимо, що, покладаючи $n = p^2,\ p > 2,$ за теоремою Ферма будемо мати

$$a_{p^2} = 2^{p^2k} + \left(-1\right)^{p^2} 2^k = 2^k\left(\left(2^{p-1}\right)^{k(p+1)} - 1\right) \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0\left(\bmod p\right)$$

Також для $p = 2$ число $a_{p^2} = 2^{4k} + 2^k$ ділиться без остачі на p.

Міркуючи аналогічно, для побудованої послідовності можна довести загальніше твердження: для кожного простого числа p та довільного натурального числа m числа a_{p^m} діляться без остачі на p.

4. *Суми послідовних членів послідовності Фібоначчі та подільність.* Як було відзначено вище, сума довільних двадцяти чотирьох послідовних чисел Фібоначчі ділиться на 24.

Дослідимо, які умови повинні задовольняти числа $m \geq 2$, щоб сума будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі ділилася на m.

Позначимо $S_n = F_1 + F_2 + ... + F_n$. Методом математичної індукції отримаємо, що $S_n = F_{n+2} - 1$, $n \in N$. Якщо m задовольняє умову задачі, то $S_m = (F_{m+2} - 1) \vdots m$ та $S_{m+1} - S_1 = (S_m + F_{m+1} - 1) \vdots m$. Звідси випливає, що $(F_{m+1} - 1) \vdots m$ та $F_m = ((F_{m+2} - 1) - (F_{m+1} - 1)) \vdots m$. Навпаки, якщо $F_m \vdots m$ та $(F_{m+1} - 1) \vdots m$, то $S_m = (F_m + (F_{m+1} - 1)) \vdots m$.

Далі, за виконання цих двох умов, скориставшись формулою

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n, \qquad (*)$$

для всіх $n \in N$ отримаємо

$$S_{n+m} - S_n = (F_{n+m+2} - 1) - (F_{n+2} - 1) = F_{n+m+2} - F_{n+2} =$$

$$= (F_{m+2} F_{n+1} + F_{m+1} F_n) - (F_2 F_{n+1} + F_1 F_n) = ((F_{m+2} - 1) F_{n+1} + (F_{m+1} - 1) F_n) \vdots m.$$

Таким чином, за таких умов суми довільних m послідовних чисел Фібоначчі ділитимуться на m.

Перебором переконуємося, що найменшим натуральним $m > 1$, яке задовольняє ці дві умови, а з ними й умову поставленої задачі, є згадане вище $m = 24$. При цьому $S_{24} = F_{26} - 1 = 121392 = 24 \cdot 5058$.

Знайдемо інші значення $m > 1$, для яких суми довільних m послідовних чисел Фібоначчі також ділитимуться на m.

Скористаємося рівностями: $F_{2m} = F_m F_{m+1} + F_{m-1} F_m = (F_{m+1} + F_{m-1}) F_m$ та $F_{2m+1} = F_m^2 + F_{m+1}^2$, які безпосередньо випливають із рівності (*).

Нехай m задовольняє вказані вище умови і $m \vdots 6$. Доведемо, що $F_{2m} \vdots 2m$. Справді, $F_n \vdots 2 \Leftrightarrow n \vdots 3$, тому числа F_{m+1} та F_{m-1} непарні, а $F_m \vdots m$. Також $(F_{2m+1} - 1) \vdots 2m$, бо при цьому $m = 2s$, $F_m = a \cdot 2s$, $F_{m+1} = b \cdot 2s + 1$, де $a, b, s \in N$. Отже,

$$F_{2m+1} - 1 = 2(a^2 + b^2 + b) \cdot 2s = (a^2 + b^2 + b) \cdot 2m.$$

Тому разом з m, кратним 6, підходять також всі числа вигляду $m \cdot 2^k$, $k \in N$.

Звідси отримуємо такий ланцюжок значень: $m = 12 \cdot 2^k$, $k \in N$.

Відзначимо, що він не єдиний. Оскільки остачі від ділення чисел Фібоначчі на 9: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 2, 8, 1, 0) та остачі від ділення чисел Фібоначчі від ділення на 24: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 10, 7, 17, 0, 17, 17, 10, 3, 13, 16, 5, 21, 2, 23, 1, 0) повторюються з періодом 24 і починаються з 1, отримаємо ще й $m = (9, 24) = 72$ та ланцюжок: $m = 36 \cdot 2^k$, $k \in N$.

Крім того, оскільки остачі від ділення на 5 повторюються з періодом 20: (1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0) і починаються

з числа 1, то отримаємо значення $m = 5 \cdot 24 = 120$, а разом з ним – ланцюжок таких значень: $m = 60 \cdot 2^k$, $k \in N$.

Далі, розглядаючи остачі від ділення на 7: (1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0), які повторюються з періодом 16, та остачі від ділення на 48: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 7, 41, 0, 41, 41, 34, 27, 13, 40, 5, 45, 2, 47, 1, 0), які повторюються з періодом 24, отримаємо $m = 7 \cdot 48 = 336$, а разом з ним і ланцюжок: $m = 168 \cdot 2^k$, $k \in N$.

Зрозуміло, що наведеними ланцюжками всі можливі значення m не вичерпуються.

5. *Висновки та узагальнення*. Таким чином, у даній статті:

1) описані рекурентні послідовності другого порядку, для яких справджується аналог формули Кассіні;

2) доведено існування нескінченної кількості рекурентних послідовностей другого порядку таких, що для кожного простого числа p число a_p ділиться без остачі на p;

3) обґрунтовані необхідні та достатні умови подільності суми будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі на $m \geq 2$ та наведені ланцюжки таких чисел m.

Як узагальнення останнього результату, відзначимо, що отримані висновки залишаться справедливими і для рекурентних послідовностей другого порядку такого вигляду: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \mu a_n$, $n \in N$. Тут μ – довільне непарне натуральне число, взаємно просте з m. Для обґрунтування цього факту достатньо буде скористатися рівностями

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_{n+2} - 1}{\mu}$$

та

$$a_{n+k} = a_k a_{n+1} + \mu a_{k-1} a_n,$$

які легко доводяться методом математичної індукції, і міркуваннями, аналогічними до наведених вище. При цьому для $\mu = 6n - 1$, $n \in N$ отримаємо найменше потрібне значення $m = 6$, а з ним і ланцюжок таких значень: $m = 3 \cdot 2^k$, $k \in N$. А для $\mu = 6n + 1$, $n \in N$ знову найменшим шуканим $m > 1$ є $m = 24$. Йому відповідає ланцюжок: $m = 12 \cdot 2^k$, $k \in N$.

Як і для $\mu = 1$, наведеними ланцюжками всі можливі значення m не вичерпуються.

Стаття надійшла до редакційної колегії 28.04.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***
д.ф.-м.н., професором ***Заторським Р.А.***

RECURRENT CORRELATIONS OF THE SECOND ORDER BUT SOME THEIR PROPERTIES

I. V. Fedak
Precarpathian National University by V. Stefanyc, Ivano-Frankivsk;
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Considered properties of recurrent correlations of the second order, that are the analogues of equality of Cassini. Reasonable properties of such sequences, related to divisibility of their elements or sums.

The set is needed and sufficient terms of divisibility of sum of arbitrary successive m *members of sequence Fibonacci on* m *.*

Key words: *recurrent correlations, sequence Fibonacci, equality of Cassini, divisibility.*