УДК 51 (075.8)

ДО ПЕРІОДИЧНИХ РЕКУРЕНТНИХ ДРОБІВ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

А. В. Семенчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380(342) 72-71-31; e-mail: andrisem333@gmail.com

За допомогою параперманентів трикутних матриць досліджуються періодичні рекурентні дроби третього порядку

Ключові слова: *параперманент, рекурентні дроби, раціональні наближення.*

Вступ

Однією із найбільш актуальних задач чисельного аналізу є задача про раціональні наближення алгебраїчних ірраціональностей. Для квадратичних ірраціональностей ця задача вирішується за допомогою раціональних вкорочень періодичних ланцюгових дробів. Для раціональних наближень ірраціональностей третього та вищих порядків було побудовано ряд алгоритмів, що узагальнюють ланцюгові дроби. При побудові таких алгоритмів використовувалися лінійні однорідні форми, дроби Фарея, матричний підхід тощо. Проте найбільш природним виявився алгоритм Фюрстенау [3], розвинений в [1].

В статті вивчаються раціональні наближення кубічних ірраціональностей за допомогою періодичних рекурентних дробів третього порядку, побудованих на основі алгоритму Фюрстенау. Зауважимо, що випадок одно періодичних рекурентних дробів довільного порядку досліджено в [1]. Ефективний алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень періодичних рекурентних дробів третього порядку побудовано у [2]. Тому в статті досліджуватимуться двоперіодичні та триперіодичні рекурентні дроби.

1. Допоміжні поняття і твердження

Розглянемо основні поняття теорії парадетермінантів трикутних матриць [4]. Нехай задано деяке числове поле K.

Означення 1. Трикутну таблицю чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

із числового поля K називають **трикутною матрицею**, а число n – її порядком.

Означення 2. Параперманентом трикутної матриці (1) називають число

$$pper(A)=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\right\},$$

де сумування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння

$$p_1+p_2+\ldots+p_r=n,$$

а символом $\{a_{ij}\}$ позначено факторіальний добуток елемента a_{ij}, що задається рівністю

$$\{a_{ij}\}=\prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Наведемо коротенькі відомості про рекурентні дроби k-го порядку [1]. Нехай задано два параперманенти трикутних матриць

$$P_n=\begin{bmatrix} a_{10} & & & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} & & & & & & \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & & \\ \frac{a_{k,k-1}}{a_{k-1,k-1}} & \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \cdots & a_{1,k-1} & & & \\ 0 & \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \cdots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{k,n}}{a_{k-1,n}} & \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-2,n}} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n+1},$$

де $n=0,1,2,\ldots,\ P_{-1}=1$ та

$$Q_n=\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & & & \\ \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \cdots & a_{1,k-1} & & & \\ \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \cdots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{k,n}}{a_{k-1,n}} & \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-2,n}} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_n,$$

де $n=1,2,\ldots,\ Q_0=1$.

Зважаючи на те, що параперманент Q_n є параперманентом P_n без першого стовпця, відношення цих параперманентів $\frac{P_n}{Q_n}$ позначають через

$$\frac{P_n}{Q_n}=\left[\begin{array}{c|ccccccc} a_{10} & & & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} & & & & & & \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & & \\ \frac{a_{k,k-1}}{a_{k-1,k-1}} & \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \cdots & a_{1,k-1} & & & \\ 0 & \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \cdots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{k,n}}{a_{k-1,n}} & \frac{a_{k-1,n}}{a_{k-2,n}} & \cdots & a_{1n} \end{array}\right]_{n+1},$$

де $n=0,1,2,\ldots$, і називають раціональними вкороченнями рекурентного дробу k-го порядку, а границю цього відношення, якщо вона існує, при $n\to\infty$ через

$$\alpha=\left[\begin{array}{c|cccccc} a_{10} & & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} & & & & & \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ \frac{a_{k,k-1}}{a_{k-1,k-1}} & \frac{a_{k-1,k-1}}{a_{k-2,k-1}} & \frac{a_{k-2,k-1}}{a_{k-3,k-1}} & \cdots & a_{1,k-1} & & \\ 0 & \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k}} & \frac{a_{k-1,k}}{a_{k-2,k}} & \cdots & \frac{a_{2,k}}{a_{1,k}} & a_{1,k} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right]_{\infty},$$

і називають рекурентними дробами k-го порядку.

При $k=3$ раціональні вкорочення рекурентного дробу 3-го порядку матимуть вигляд

$$\frac{P_n}{Q_n}=\left[\begin{array}{c|cccccc} q_0 & & & & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & \\ \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & \\ 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{array}\right]_{n+1},$$

і задовольняють рекурентні рівняння

$$\begin{aligned} P_n &= q_n P_{n-1} + p_n P_{n-2} + r_n P_{n-3}, \quad n = 2,3,4,\ldots \\ Q_n &= q_n Q_{n-1} + p_n Q_{n-2} + r_n Q_{n-3}, \quad n = 2,3,4,\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

з початковими умовами

$$P_{-1} = 1,\ P_0 = q_0,\ P_1 = q_0 q_1 + p_1,\ Q_{-1} = 0,\ Q_0 = 1,\ Q_1 = q_1 .$$

Означення 3. Рекурентний дріб 3-го порядку

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|ccccccc} q_0 & & & & & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & & \\ \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right]_{\infty},$$

елементи якого задовольняють умови

$$p_{rk+m} = p_m,\ q_{rk+m} = q_m,\ r_{rk+m} = r_m,\ m = 1,2,\ldots,k,\ r = 0,1,2,\ldots .$$

називають [1] періодичним рекурентним дробом 3-го порядку з періодом k.

В [1] показано, що за певних умов, періодичні рекурентні дроби 3-го порядку збігаються до дійсних коренів кубічного рівняння. Таким чином, рекурсії (2) дають алгоритм обчислення раціональних наближень кубічних ірраціональностей.

2. Періодичні рекурентні дроби

Розглянемо періодичний рекурентний дріб 3-го порядку, з періодом 2:

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right]$$

Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}=\frac{q_1[q_2]_{n-1}+p_2[q_1]_{n-2}+r_1[q_2]_{n-3}}{[q_2]_{n-1}}=q_1+\frac{p_2}{\dfrac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}}+\frac{r_1}{\dfrac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}\cdot\dfrac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}. \quad (3)$$

В цій рівності параперманент i-го порядку з верхнім елементом q_j, $j=1{,}2$ позначено через $\left[q_j\right]_i$. Аналогічно розкладаємо чисельник дробу $\dfrac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}=q_2+\frac{p_1}{\dfrac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}+\frac{r_2}{\dfrac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}\cdot\dfrac{[q_2]_{n-3}}{[q_1]_{n-4}}} \quad (4)$$

Нехай

$$\lim_{m\to\infty}\frac{[q_1]_m}{[q_2]_{m-1}}=x,\ \lim_{m\to\infty}\frac{[q_2]_m}{[q_1]_{m-1}}=y.$$

Тоді, спрямовуючи в рівностях (3), (4) n до нескінченності, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x=q_1+\dfrac{p_2}{y}+\dfrac{r_1}{xy},\\ y=q_2+\dfrac{p_1}{x}+\dfrac{r_2}{xy}.\end{cases}$$

З якої знаходимо, що

$$y=\frac{p_2x+r_1}{x^2-q_1x},$$

а x є додатнім коренем кубічного рівняння

$$(q_2p_2+r_2)x^3=(q_1q_2p_2+p_2p_2+2q_1r_2-p_1p_2-q_2r_1)x^2+$$
$$+(q_1p_1p_2+q_1q_2r_1+2p_2r_1-q_1q_1r_2-p_1r_1)x+r_1(q_1p_1+r_1),$$

або за допомогою параперманентів

$$\begin{bmatrix} q_2 & \\ \dfrac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix}x^3=\left(\begin{bmatrix} q_1 & & \\ \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ 0 & \dfrac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p_1 & \\ \dfrac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix}-r_1[q_2]\right)x^2+$$

$$+\left(\begin{bmatrix} q_1 & & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 & \\ 0 & \frac{-q_1 r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} + r_1\left(\begin{bmatrix} q_1 & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 \end{bmatrix} - \left[p_1\right]\right)\right)x + r_1\begin{bmatrix} q_1 & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 \end{bmatrix}.$$

Приклад 1. Нехай $q_1 = 3,\ q_2 = 2,\ p_1 = 3,\ p_2 = 2,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,$ тоді рекурентний дріб матиме вигляд

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} 3 & & & & & & \\ \frac{2}{2} & 2 & & & & & \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right]$$

а раціональні вкорочення, які наближують дійсний корінь

$$x = \frac{1}{18}\left(16 + \sqrt[3]{30664 + 162\sqrt{26118}} + \sqrt[3]{30664 - 162\sqrt{26118}}\right) \approx 3{,}941055084$$

кубічного рівняння $6x^3 = 16x^2 + 21x + 36$, дорівнюють $\delta_1 = \frac{3}{1} = 3$,

$\delta_2 = \frac{8}{2} = 4$, $\delta_3 = \frac{36}{9} = 4$, $\delta_4 = \frac{94}{24} \approx 3{,}916$, $\delta_5 = \frac{414}{105} \approx 3{,}942$,

$\delta_6 = \frac{1088}{276} \approx 3{,}9420$, $\delta_7 = \frac{4788}{1215} \approx 3{,}9407$, $\delta_8 = \frac{12580}{3192} \approx 3{,}9411$,

$\delta_9 = \frac{55368}{14049} \approx 3{,}94106$, $\delta_{10} = \frac{145472}{36912} \approx 3{,}941048$, $\delta_{11} = \frac{640260}{162459} \approx 3{,}941055$,

$\delta_{12} = \frac{1682200}{426840} \approx 3{,}94105519$, $\delta_{13} = \frac{7403796}{1878633} \approx 3{,}94105501$,

$\delta_{14} = \frac{19452512}{4935864} \approx 3{,}941055102$, $\delta_{15} = \frac{85615524}{21724011} \approx 3{,}94105508$,

$\delta_{16} = \frac{224943664}{57077016} \approx 3{,}941055082$, $\delta_{17} = \frac{990035100}{251210673} \approx 3{,}941055084$,

$\delta_{18} = \frac{2601188576}{660023400} \approx 3{,}941055084.$

Тепер розглянемо періодичний рекурентний дріб 3-го порядку, з періодом 3:

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_1 & & & & & & \\
\dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
\dfrac{r_3}{p_3} & \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\
0 & \dfrac{r_1}{p_1} & \dfrac{p_1}{q_1} & q_1 & & & \\
0 & 0 & \dfrac{r_2}{p_2} & \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{r_3}{p_3} & \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right].$$

Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = \frac{q_1[q_2]_n + p_2[q_3]_{n-1} + r_3[q_1]_{n-2}}{[q_2]_n} = q_1 + \frac{p_2}{\dfrac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}} + \frac{r_3}{\dfrac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} \cdot \dfrac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}}.$$

Розкладемо чисельник дробу $\dfrac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}$ за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = \frac{q_2[q_3]_{n-1} + p_3[q_1]_{n-2} + r_1[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-1}} = q_2 + \frac{p_3}{\dfrac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_3}{\dfrac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \dfrac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}.$$

Розкладемо чисельник дробу $\dfrac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = \frac{q_3[q_1]_{n-2} + p_1[q_2]_{n-3} + r_2[q_3]_{n-4}}{[q_1]_{n-2}} = q_3 + \frac{p_1}{\dfrac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\dfrac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \dfrac{[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-4}}}.$$

Нехай існують границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = y,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = z,$$

тоді останні три рівності запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = q_1 + \dfrac{p_2}{y} + \dfrac{r_3}{yz}, \\ y = q_2 + \dfrac{p_3}{z} + \dfrac{r_1}{xz}, \\ z = q_3 + \dfrac{p_1}{x} + \dfrac{r_2}{xy}, \end{cases}$$

а кубічне рівняння для знаходження x матиме вигляд:

$$\left(q_2q_3p_2p_3 - q_2q_2q_3r_3 + q_2p_3r_2 - q_2p_3r_3 + p_2p_3p_3\right)x^3 = (q_1q_2q_3p_2p_3 - q_2q_3p_2r_1 -$$
$$- q_1q_2q_2q_3r_3 - q_2q_3p_2r_3 + q_3p_2p_2p_3 + q_2q_2p_1r_3 - q_2p_1p_2p_3 + 2q_1q_2p_3r_2 + q_2r_2r_3 -$$
$$- q_2r_1r_2 + p_2p_3r_2 - q_1q_2p_3r_3 + q_2r_1r_3 - q_2r_3r_3 + q_1p_2p_3p_3 + p_2p_3r_3 - 2p_2p_3r_1)x^2 +$$
$$+ (q_1q_2q_3p_2r_1 + q_3p_2p_2r_1 - q_2p_1p_2r_1 - q_1q_2q_2p_1r_3 + q_1q_2p_1p_2p_3 - q_2p_1p_2r_3 +$$
$$+ p_1p_2p_2p_3 + 2q_1q_2r_1r_2 - q_1q_1q_2p_3r_2 - q_1q_2r_2r_3 - q_1p_2p_3r_2 + p_2r_1r_2 - p_2r_2r_3 - q_1q_2r_1r_3 +$$
$$+ 2q_1p_2p_3r_1 - p_2r_1r_1 + p_2r_1r_3)x + r_1\left(q_1q_2p_1p_2 - q_1q_1q_2r_2 + p_1p_2p_2 - q_1p_2r_2 + q_1p_2r_1\right),$$

або за допомогою параперманентів

$$\left[\begin{array}{cccc} q_2 & & & \\ \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & & \\ 0 & \dfrac{r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & \dfrac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{array}\right] x^3 = \left(\left[\begin{array}{ccccc} q_1 & & & & \\ \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \dfrac{r_3}{p_3} & \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & & \\ 0 & 0 & \dfrac{r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cccc} q_2 & & & \\ \dfrac{r_1}{p_1} & p_1 & & \\ 0 & \dfrac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & \dfrac{r_2}{q_2} & \dfrac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{array}\right] -$$

$$- r_1\left[\begin{array}{ccc} q_2 & & \\ \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ 0 & \dfrac{r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right]\right) x^2 + \left(\left[\begin{array}{ccccc} q_1 & & & & \\ \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ 0 & \dfrac{r_1}{p_1} & p_1 & & \\ 0 & 0 & \dfrac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & \dfrac{r_2}{q_2} & \dfrac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{array}\right] + r_1\left(\left[\begin{array}{cccc} q_1 & & & \\ \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\ \dfrac{r_3}{p_3} & \dfrac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ 0 & 0 & \dfrac{r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right] -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \left[\begin{array}{ccc} q_2 & & \\ \dfrac{r_1}{p_1} & p_1 & \\ 0 & \dfrac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right]\right)\right) x + r_1\left[\begin{array}{cccc} q_1 & & & \\ \dfrac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\ 0 & \dfrac{r_1}{p_1} & p_1 & \\ 0 & 0 & \dfrac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right].$$

Приклад 2. Нехай $q_1 = 3,\ q_2 = 2,\ q_3 = 1,\ p_1 = 3,\ p_2 = 2,\ p_3 = 1,$ $r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 1,$ тоді рекурентний дріб матиме вигляд

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
3 & & & & & & \\
\frac{2}{2} & 2 & & & & & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & & & & \\
0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & \\
0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array}\right],$$

а раціональні вкорочення, які наближують дійсний корінь $x=\frac{1}{6}\left(1+\sqrt[3]{1630+45\sqrt{561}}+\sqrt[3]{1630-45\sqrt{561}}\right)\approx 3{,}863421135$ кубічного рівняння $4x^3=2x^2+38x+54$, або $2x^3=x^2+19x+27$ дорівнюють

$\delta_1=\frac{3}{1}=3$, $\delta_2=\frac{8}{2}=4$, $\delta_3=\frac{12}{3}=4$, $\delta_4=\frac{69}{18}\approx 3{,}833$, $\delta_5=\frac{178}{46}\approx 3{,}8696$,

$\delta_6=\frac{1518}{393}\approx 3{,}8626$, $\delta_7=\frac{3910}{1012}\approx 3{,}86364$, $\delta_8=\frac{5687}{1472}\approx 3{,}863451$,

$\delta_9=\frac{33345}{8631}\approx 3{,}863399$, $\delta_{10}=\frac{85884}{22230}\approx 3{,}8634278$,

$\delta_{11}=\frac{124916}{32333}\approx 3{,}86342127$, $\delta_{12}=\frac{732435}{189582}\approx 3{,}8634206$,

$\delta_{13}=\frac{1886470}{488290}\approx 3{,}86342133$, $\delta_{14}=\frac{2743821}{710205}\approx 3{,}863421125$,

$\delta_{15}=\frac{16088178}{4164231}\approx 3{,}863421121$, $\delta_{16}=\frac{41436938}{10725452}\approx 3{,}863421141$,

$\delta_{17}=\frac{60268937}{15599888}\approx 3{,}863421135$, $\delta_{18}=\frac{353382159}{910176068}\approx 3{,}863421135$.

Література

1. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р.А. Заторський. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.
2. Семенчук А.В. Алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичного рекурентного дробу 3-го порядку / А.В. Семенчук // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – №1. – С. 34-42.
3. Furstenau E. ber Kettenbruche hoherer Ordnung / E. Furstenau // Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik. – 1876. – P. 133-135.
4. Zatorsky R.A. Theory of paradeterminants and its applications / R.A. Zatorsky // Algebra and Diskrete Mathematics. – 2007. – №1. – P. 109-138.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.01.2017 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Заторським Р.А.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

TO PERIODIC RECURRENT FRACTIONS OF THIRD DEGREE

A. V. Semenchuk
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: andrisem333@gmail.com

Periodic recurrent fractions of third degree are investigated by means of parapermanents of triangular matrices.

Ключові слова: *parapermanent, recurrence fractions, rational approximation.*