Математичне моделювання та обчислювальні методи

УДК 621.3:539.6

ПОБУДОВА БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ТРИВИМІРНОГО СИМПЛЕКС-ЕЛЕМЕНТА

В. М. Сеничак, В. В. Сеничак
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380(342)72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Метою роботи є спроба побудови базисних функцій для тривимірних симплекс-елементів лінійного типу, що використовуються у чисельному методі розв'язування інженерних задач – методі скінченних елементів (МСЕ).

Ключові слова: *метод скінченних елементів, тривимірний симплекс-елемент, базисні функції*

Застосування в інженерній практиці чисельних методів зводиться до заміни рівнянь математичної фізики для функції неперервного аргументу алгебраїчними рівняннями для сіткових функцій, що задаються на дискретній множині точок (сітці). Інакше кажучи, замість неперервної моделі середовища вводиться її дискретний аналог, що дає змогу замінити складний, трудомісткий і дорогий фізичний експеримент економнішим математичним (чисельним) експериментом. В умовах загальної комп'ютеризації наукових досліджень головним об'єктом при розв'язуванні задач математичної фізики стає не класичне диференціальні рівняння з частинними похідними, а його дискретний аналог.

Метод скінченних елементів заснований на ідеї апроксимації неперервної функції (температури, тиску, переміщення і т.п.) дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, що визначаються на скінченому числі підобластей, які називаються елементами [1].

Математична основа МСЕ – варіаційне числення. Диференціальне рівняння, що описує задачу і відповідні граничні умови використовуються для постановки варіаційної задачі, яка потім розв'язується безпосередньо. З цієї точки зору МСЕ представляє собою неявне застосування методу Рітца на окремих відрізках. Фізична задача замінюється кусково-гладкою моделлю. В такій інтерпретації МСЕ дає змогу інженеру використовувати своє інтуїтивне розуміння задачі.

В якості функції елемента найчастіше використовують поліноми. Порядок поліному залежить від числа даних про неперервну функцію, що використовується на кожному вузлі елемента. Класифікація скінченних елементів може бути проведена у відповідності з порядком поліноміальних функцій цих елементів. При цьому розглядають такі групи елементів: симплекс-, комплекс- і мультиплекс-елементи.

В даній роботі зосередимо свою увагу на симплексах. Симплекс-елементам відповідають поліноми, що містять константу і лінійні члени. Число коефіцієнтів в такому поліномі на одиницю більше розмірності координатного простору. Поліном

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \qquad (1)$$

представляє собою симплексну функцію для тривимірного лінійного елемента у формі тетраедра [2] з вершинами $(i), (j), (k), (l)$. Поліном (1) лінійний по x, y, z і містить чотири коефіцієнти (за кількістю вузлів тетраедра).

Вузлові значення шуканої функції позначені U_i, U_j, U_k, U_l, а вузлові точки задаються координатами $(X_i, Y_i, Z_i), (X_j, Y_j, Z_j)$, (X_k, Y_k, Z_k), (X_l, Y_l, Z_l). Апроксимуючий поліном має вигляд (1), при цьому у вузлах виконуються умови:

$$\begin{cases} U = U_i, коли (x, y, z) = (X_i, Y_i, Z_i), \\ U = U_j, коли (x, y, z) = (X_j, Y_j, Z_j), \\ U = U_k, коли (x, y, z) = (X_k, Y_k, Z_k), \\ U = U_l, коли (x, y, z) = (X_l, Y_l, Z_l). \end{cases}$$

Беручи до уваги ці умови, з формули (1) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2) відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i = U_i \\ \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j = U_j \\ \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k = U_k \\ \alpha_1 + \alpha_2 X_l + \alpha_3 Y_l + \alpha_4 Z_l = U_l \end{cases} \qquad (2)$$

після розв'язання якої можна отримати значення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ виражені через вузлові значення і координати вузлів.

Покажемо, що підставивши отримані значення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ в (1), вираз для U можна привести до вигляду (3), де через $\xi_i, \xi_j, \xi_k, \xi_l$ позначені базисні функції

$$U = U_i\xi_i + U_j\xi_j + U_k\xi_k + U_l\xi_l . \qquad (3)$$

Оскільки визначник системи (Δ) зв'язаний із об'ємом тетраедра V співвідношенням (4)

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{pmatrix}, \qquad \Delta = 6V , \qquad (4)$$

систему (2) можна розв'язати, наприклад, за правилом Крамера

$$\alpha_s = \frac{\Delta_S}{\Delta}, \qquad s = 1, 2, 3, 4 \qquad (5)$$

де $$\Delta_1 = \begin{pmatrix} U_i & X_i & Y_i & Z_i \\ U_j & X_j & Y_j & Z_j \\ U_k & X_k & Y_k & Z_k \\ U_l & X_l & Y_l & Z_l \end{pmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & U_i & Y_i & Z_i \\ 1 & U_j & Y_j & Z_j \\ 1 & U_k & Y_k & Z_k \\ 1 & U_l & Y_l & Z_l \end{pmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & X_i & U_i & Z_i \\ 1 & X_j & U_j & Z_j \\ 1 & X_k & U_k & Z_k \\ 1 & X_l & U_l & Z_l \end{pmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & X_i & Y_i & U_i \\ 1 & X_j & Y_j & U_j \\ 1 & X_k & Y_k & U_k \\ 1 & X_l & Y_l & U_l \end{pmatrix}.$$

Із врахуванням отриманих значень α_s поліном (1) набуде вигляду (6):

$$U = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1 + \Delta_2 x + \Delta_3 y + \Delta_4 z\right). \qquad (6)$$

Обчислення визначників $\Delta_s (s = 1,2,3,4)$ четвертого порядку зведемо до обчислення визначників третього порядку, розклавши їх по стовпцях, що містять значення вузлових функцій:

$$\Delta_1 = U_i\Delta_1^{(i)} - U_j\Delta_1^{(j)} + U_k\Delta_1^{(k)} - U_l\Delta_1^{(l)}$$

$$\Delta_2 = -U_i\Delta_2^{(i)} + U_J\Delta_2^{(j)} - U_k\Delta_2^{(k)} + U_l\Delta_2^{(l)}$$

$$\Delta_3 = U_i\Delta_3^{(i)} - U_j\Delta_3^{(j)} + U_k\Delta_3^{(k)} - U_l\Delta_3^{(l)}$$

$$\Delta_4 = -U_i\Delta_4^{(i)} + U_j\Delta_4^{(j)} - U_k\Delta_4^{(k)} + U_l\Delta_4^{(l)}$$

де через $\Delta_s^{(i)}, \Delta_s^{(j)}, \Delta_s^{(k)}, \Delta_s^{(l)}$ позначені відповідні алгебраїчні доповнення.

Підставивши значення Δ_s у вираз $\Delta_1 + \Delta_2 x + \Delta_3 y + \Delta_4 z,$ отримаємо

$$U = U_i\xi_i + U_j\xi_j + U_k\xi_k + U_l\xi_l ,$$

де $$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}; \quad \xi_j = \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V};$$

$$\xi_k = \frac{a_k + b_k x + c_k y + d_k z}{6V};\ \xi_l = \frac{a_l + b_l x + c_l y + d_l z}{6V};$$

$$\begin{pmatrix} a_i = \Delta_1^{(i)} \\ b_i = -\Delta_2^{(i)} \\ c_i = \Delta_3^{(i)} \\ d_i = -\Delta_4^{(i)} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a_j = -\Delta_1^{(j)} \\ b_j = \Delta_2^{(j)} \\ c_j = -\Delta_3^{(j)} \\ d_j = \Delta_4^{(j)} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a_k = \Delta_1^{(k)} \\ b_k = -\Delta_2^{(k)} \\ c_k = \Delta_3^{(k)} \\ d_k = -\Delta_4^{(k)} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a_l = -\Delta_1^{(l)} \\ b_l = \Delta_2^{(l)} \\ c_l = -\Delta_3^{(l)} \\ d_l = \Delta_4^{(l)} \end{pmatrix}.$$

При цьому $\xi_i = 1$ у вузлі з номером i та дорівнює нулю у вузлах з номерами j,k,l. Аналогічні умови виконуються для базисних функцій ξ_j, ξ_k, ξ_l (у вузлах j,k,l вони, відповідно, рівні одиниці, а в інших вузлах нулю).

Скалярна величина U визначається всередині елемента базисними функціями, лінійними по x, y, z. Це означає, що градієнти цієї величини у напрямках x, y, z будуть постійні. Зокрема, градієнт у напрямку x визначається виразом

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + U_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x} + U_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x} + U_l \frac{\partial \xi_l}{\partial x},\ \text{але}\ \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = b_r,\ r = i, j, k, l,$$

тому

$$\frac{\partial U}{\partial x} = b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k + b_l U_l. \tag{7}$$

Оскільки b_i, b_j, b_k, b_l постійні (вони фіксуються як тільки задані вузлові коефіцієнти) і U_i, U_j, U_k, U_l не залежать від координат простору, частинна похідна в (7) має постійне значення. Постійність градієнта всередині кожного елемента означає, що необхідно використовувати дуже малі за величиною елементи, щоб апроксимувати швидкозмінну функцію U.

Відзначимо дві корисні властивості тривимірного симплекса (тетраедра). По-перше, функція U змінюється лінійно між двома будь-якими вузлами. Оскільки вузли визначають границі елемента, то U змінюється лінійно вздовж кожної з чотирьох його граней. Звідси випливає друга корисна властивість: будь-яка поверхня, вздовж якої U приймає однакові значення, є площина, що перетинає три грані елемента. Винятком буде випадок, коли в усіх вузлах значення U однакові.

Двовимірний варіант симплекс-елементів лінійного типу у формі трикутника є окремим випадком просторового варіанту симплекс-елементів у формі тетраедра. При цьому в апроксимуючому поліномі кількість коефіцієнтів на одиницю менша

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{8}$$

Виконавши значно простіші дії над визначниками другого порядку, поліном (8) можна привести до вигляду (9)

$$U = U_i\xi_i + U_j\xi_j + U_k\xi_k, \tag{9}$$

де базисні функції ξ_i, ξ_j, ξ_k визначаються із співвідношень

$$\xi_i = \frac{1}{2S}\left(a_i + b_i x + c_i y\right), \quad \left\{\begin{matrix} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{matrix}\right\};$$

$$\xi_j = \frac{1}{2S}\left(a_j + b_j x + c_j y\right), \quad \left\{\begin{matrix} a_i = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_i = Y_k - Y_i \\ c_i = X_i - X_k \end{matrix}\right\};$$

$$\xi_k = \frac{1}{2S}\left(a_k + b_k x + c_k y\right), \quad \left\{\begin{matrix} a_i = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_i = Y_i - Y_j \\ c_i = X_j - X_i \end{matrix}\right\}.$$

Тут через S позначено площу трикутника (симплекс-елемента) з вершинами у точках $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$.

При цьому $\xi_i = 1$ у вузлі з номером i та дорівнює нулю у вузлах з номерами j і k. Аналогічні умови виконуються для базисних функцій ξ_i, ξ_k (у вузлах j, k вони, відповідно, рівні одиниці, а в інших вузлах – нулю).

Тепер вкажемо на можливість спрощеного способу явної побудови базисних функцій $\xi_i, \xi_j, \xi_k, \xi_l$. Для цього, не зменшуючи загальності, виберемо всередині тетраедра довільну точку $M(x, y, z)$ і зафіксуємо її, нехай це буде точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Обчислимо значення $\xi_i(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{6V}\left(a_i + b_i x_0 + c_i y_0 + d_i z_0\right)$. Із врахуванням того, що $a_i = \Delta_1^{(i)}$, $b_i = -\Delta_2^{(i)}$, $c_i = \Delta_3^{(i)}$, $d_i = -\Delta_4^{(i)}$, вираз у дужках для ξ_i набуде вигляду:

$$\left(\Delta_1^{(i)} - \Delta_2^{(i)} x_0 + \Delta_3^{(i)} y_0 - \Delta_4^{(i)} z_0\right) = 1 \cdot \begin{vmatrix} X_j & Y_j & Z_j \\ X_k & Y_k & Z_k \\ X_l & Y_l & Z_l \end{vmatrix} - x_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & Y_i & Z_i \\ 1 & Y_k & Z_k \\ 1 & Y_l & Z_l \end{vmatrix} +$$

$$+ y_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & X_j & Z_j \\ 1 & X_k & Z_k \\ 1 & X_l & Z_l \end{vmatrix} - z_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & X_j & Z_j \\ 1 & X_k & Z_k \\ 1 & X_l & Z_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{vmatrix} = 6 \cdot V_0^{(i)},$$

де $V_0^{(i)}$ – об'єм тетраедра з вершинами у точках $(M_0), (j), (k), (l)$.

Отже,

$$\xi_i(M_0) = \frac{6 \cdot V_0^{(i)}}{6 \cdot V} = \frac{V_0^{(i)}}{V}. \tag{10}$$

Аналогічно отримуємо:

$$\xi_j(M_0) = \frac{V_0^{(j)}}{V}; \xi_k(M_0) = \frac{V_0^{(k)}}{V}; \xi_l(M_0) = \frac{V_0^{(l)}}{V}. \tag{11}$$

Тобто, базисні функції визначаються як відношення відповідних об'ємів тетраедрів, на які поділений симплекс-елемент, до об'єму усього елемента (тетраедра). При цьому виконується умова:

$$\xi_i(M_0) + \xi_j(M_0) + \xi_k(M_0) + \xi_l(M_0) = 1. \tag{12}$$

У випадку двовимірного варіанту симплекс-елемента у формі трикутника, базисні функції будуть визначатись як відношення відповідних площ трикутників, на які поділено елемент, до площі усього елемента.

Слід зазначити, що розв'язування тривимірних задач передбачає подолання суттєвих труднощів при роботі з вхідними даними. Особливо важкою роботою є побудова тривимірної сітки, яка в складних структурах не може використовуватись повністю автоматично при збереженні регулярності форм усіх її елементів.

Побудова математичної моделі базисних функцій тривимірного симплекс-елемента лінійного типу у формі тетраедра є передумовою створення сучасного просторового варіанту МСЕ – способу обертання тетраедра, аналогічно двовимірному варіанту МСЕ – способу обертання трикутника [3]. Тому важливі питання дискретизації області, включення елемента в область та об'єднання скінченних елементів в ансамбль тут не розглядаються, оскільки вони не є метою подальших досліджень. Розробка математичного забезпечення та обґрунтування просторового варіанту методу прискорених статистичних випробувань з використанням одного симплекс-елемента у формі тетраедра (способу обертання тетраедра) буде висвітлено у наступних публікаціях.

Література

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
2. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
3. Senychak V. M. Solving Boundary Problems of Elliptic Type by Accelerated Method of Statistical Trials / V.M. Senychak, I.Y. Ovchar, V.V. Senychak // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. – №1(29). – С. 145-150.

Стаття надійшла до редакційної колегії 7.02.2017 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.,***
д.т.н., професором ***Олійником А.П.***

CREATION BASIC FUNCTIONS FOR THREE-DIMENSIONAL SIMPLEX ELEMENTS

V. M. Senychak, V. V. Senychak
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (3422) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

The objective of the research is creation basic functions for three-dimensional simplex type linear elements used in numerical methods for solving engineering problems – finite element method (FEM).

Key words: *finite element method, three-dimensional simplex element, basis functions.*