# *Механіка*

УДК 539.3

## КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ТА ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

**Т. В. Шопа***

*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
*ім. Я. С. Підстригача НАН України;*
*79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б; e-mail: tetyana.sh@gmail.com*

*В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв’язок задачі про усталені коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки з довільною кількістю абсолютно жорстких включень та отворів довільної геометричної форми, орієнтації та розташування. Торці оболонки є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на зовнішній границі оболонки та на контурах отворів. Включення мають різні типи з’єднань з оболонкою. Розв’язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Крайову задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

***Ключові слова:*** *ортотропна циліндрична оболонка, коливання, включення, отвори, власні частоти, послідовнісний підхід, функція Гріна, непрямий метод граничних елементів, метод колокацій.*

**Постановка проблеми.** В сучасному машинобудуванні та аерокосмічній галузі широко використовуються анізотропні оболонкові елементи з отворами та включеннями різної форми та розташування, які працюють за змінних в часі навантажень. Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів. Коливанням суцільних тонкостінних елементів конструкцій багато уваги приділя-

* У №1(33) за 2016 р. “Прикарпатського вісника НТШ” вказано помилкову дату надходження статті Т.В. Шопи “Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації на шарнірному з’єднанні з оболонкою”. Дана стаття надійшла до редакційної колегії 8.03.2013 р.

ють чимало фахівців з механіки деформівного твердого тіла [1-3]. В роботі [4] побудовано розв'язок задачі про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною отворів довільної конфігурації. В роботі [5] розв'язано задачу про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної форми та розташування, які жорстко з'єднані з оболонкою. В роботі [6] отримано розв'язок задачі про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації з пружними прошарками. В роботі [7] розв'язано задачу про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної форми та розташування на шарнірному з'єднанні з оболонкою. Автору не відомі опубліковані роботи, в яких отримано розв'язок задачі про коливання ортотропної циліндричної оболонки, яка містить одночасно множину отворів та включень довільної конфігурації.

Постановка задачі. Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної оболонки, яка має $N$ отворів та абсолютно жорстких включень. Серед них є $N_1$ включень довільної форми та розташування, які взаємодіють з оболонкою через тонкі пружні прошарки типу Вінклера з коефіцієнтами жорсткості $k^{(j)}(\alpha)$, $\left(j=\overline{1, N_1}\right)$, $N_2$ включень, які жорстко з'єднані з оболонкою, та $N_3$ включень, які є шарнірно оперті. Товщиною пружних прошарків нехтуємо. Оболонка також містить $N_4$ отвори, на контурах яких задано компоненти переміщень, $N_5$ отворів, на контурах яких задано компоненти зусиль, та $N_6$ отворів, на контурах яких задано комбінації компонент переміщень та зусиль. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j=\overline{1, N_1+N_2+N_3}$, отворів – $L^{(j)}$, $j=\overline{N_1+N_2+N_3+1, N}$. Нехай на включення маси $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}=P_0^{(j)}\sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні оболонки і діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснюють поступальний рух вздовж нормального напрямку до серединної поверхні оболонки і $\tilde{w}^{(j)}(t)=\tilde{w}_0^{(j)}\sin(\omega t)$ – переміщення j-ого включення. Зовнішня границя оболонки є також довільної форми. Нехай контур одного торця складається з двох взаємодоповнюючих кривих $L^{(N+1)}$ та $L^{(N+2)}$, а контуром другого торця є крива $L^{(N+3)}$. Криволінійну систему координат розміщено в уявно розширеній області $\Pi$, яка містить розглядувану багатозв'язну область $\Omega$. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають з осями ортотропії матеріалу оболонки. Використовуємо позначення статей [4-7].

Нехай на одній частині границі оболонки задано розподілені компоненти переміщень

$$w = w_0^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad u_n = u_{n0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$u_\tau = u_{\tau 0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \alpha \in L^{(N+1)},\tag{1}$$

на другій − задано розподілені компоненти зусиль

$$Q_n = Q_{n0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\ M_n = M_{n0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\ N_n = N_{n0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$N_\tau = N_{\tau 0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad M_\tau = M_{\tau 0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\ \alpha \in L^{(N+2)},\tag{2}$$

а на третій − задано розподілені компоненти зусиль та переміщень

$$w = w^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\ M_n = M_{n0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\ N_n = N_{n0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$u_\tau = u_{\tau 0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\ \alpha \in L^{(N+3)}.\tag{3}$$

Граничні умови на контурах включень, які взаємодіють з оболонкою через пружні прошарки типу Вінклера, мають вигляд

$$Q_n(\alpha,t) = -p^{(j)}(\alpha,t),\ M_n(\alpha,t) = 0,\ N_n(\alpha,t) = 0, M_\tau(\alpha,t),\ N_\tau(\alpha,t) = 0,$$
$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{1, N_1},\tag{4}$$

де $p^{(j)}(\alpha,t) = -k^{(j)}(\alpha)\left(\tilde{w}^{(j)} - w(\alpha,t)\right)$ − контактні сили взаємодії оболонки та включення, $w(\alpha,t)$ − прогин оболонки на межі з прошарком, $k^{(j)}(\alpha)$ − коефіцієнт пружності прошарку між *j*-им включенням та оболонкою, який є змінним вздовж контура включення.

Граничні умови на контурах включень, які жорстко з'єднані з оболонкою, мають вигляд

$$w(\alpha,t) = \tilde{w}^{(j)}(t),\ u_n(\alpha,t) = 0,\ \gamma_n(\alpha,t) = 0,\ u_\tau(\alpha,t) = 0,\ \gamma_\tau(\alpha,t) = 0,$$
$$\alpha \in L^{(j)},\quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}.\tag{5}$$

Граничні умови на контурах шарнірно опертих включень наступні

$$w(\alpha,t) = \tilde{w}^{(j)}(t),\ u_\tau(\alpha,t) = 0,\ \gamma_\tau(\alpha,t) = 0, M_n(\alpha,t) = 0,\ N_n(\alpha,t) = 0,$$
$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.\tag{6}$$

Контактні сили взаємодії оболонки та жорстко з'єднаних і шарнірно опертих включень моделюємо наступним чином

$$p^{(j)}(\alpha,t) = -Q_n(\alpha,t) = -Q_n(\alpha)\sin(\omega t),\quad \alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.$$

Граничні умови на контурах отворів такі

$$w = w_0^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ u_n = u_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t), \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$u_\tau = u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4}. \quad (7)$$

$$Q_n = Q_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ N_n = N_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t), \quad N_\tau = N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}, \quad (8)$$

$$w = w_0^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ N_n = N_{n0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$u_\tau = u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),\ \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}. \quad (9)$$

**Розв'язок задачі.** Для дослідження використано рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти [4-7] .

Рівняння руху абсолютно жорстких включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}}{\partial t^2} = P^{(j)} + \int\limits_{L^{(j)}} p^{(j)}(\zeta, t)\, dl(\zeta),$$
$$p^{(j)}(\alpha, t) = -k^{(j)}(\alpha)\left(\tilde{w}^{(j)} - w(\alpha, t)\right),\ j = \overline{1, N_1},$$
$$p^{(j)}(\alpha, t) = -Q_n(\alpha, t),\ j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}. \quad (10)$$

Розв'язок крайової задачі будуємо на основі непрямого методу граничних елементів та на базі послідовнісного підходу до зображення узагальненої дельта-функції Дірака та функцій Гріна [9-11].

Вводимо узагальнений контур

$$L = L^{(1)} \cup \ldots\ldots \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)} \cup L^{(N+2)} \cup L^{(N+3)}$$

і такі функції на ньому:

$$\{T(\xi)\} = \{T_1(\xi), \ldots., T_5(\xi)\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \begin{cases} \left\{T^{(1)}(\xi)\right\} = \left\{T_1^{(1)}(\xi), \ldots, T_5^{(1)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}},\ \xi \in L^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left\{T^{(\mathrm{N}+3)}(\xi)\right\} = \left\{T_1^{(N+3)}(\xi), \ldots, T_5^{(N+3)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \xi \in L^{(N+3)}. \end{cases}$$

На основі знайдених функцій Ґріна [4] розв'язок шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$\{u_1(\alpha,t), u_2(\alpha,t), w(\alpha,t), \gamma_1(\alpha,t), \gamma_2(\alpha,t)\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) \left[E_{km}^{(\mu)}(\alpha)\right]\left[U_{km}^{(\mu)}\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\{T(\xi)\}\, dl(\xi) \sin(\omega t), \quad (11)$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі використовуємо представлення розв'язку (11) та крайові умови (1)-(9).

У випадку крайових умов, коли на контурах задано компоненти зусиль, використовуємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі, який полягає в тому, що крайові умови задовольняємо не на реальній границі, а на границі фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань $\varepsilon$. Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система $5(N+3)+N_1+N_2+N_3$ інтегральних рівнянь та інтегральних співвідношень, врахувавши рівняння руху (10), відносно невідомих функцій густин $\{T(\xi)\}$ та відносно невідомих переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$ набуває вигляду

$$\left\{0,\ 0,\ k^{(j)}(\alpha)\left(\tilde{w}_0^{(j)}-w(\alpha)\right),\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\{T(\xi)\}\,dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{1,N_1},$$

$$\left\{0,\ 0,\ \tilde{w}_0^{(j)},\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\{T(\xi)\}\,dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\ \ j=\overline{N_1+1,N_1+N_2},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)w_i^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)u_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=15}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\ \ j=\overline{N_1+N_2+1,N_1+N_2+N_3},$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)M_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)N_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{N_1+N_2+1,N_1+N_2+N_3},$$

$$\left\{u_{n0}^{(j)}(\alpha),\ u_{\tau0}^{(j)}(\alpha),\ w_0^{(j)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha),\ \gamma_{\tau0}^{(j)}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\ j=\overline{N_1+N_2+N_3+1, N_1+N_2+N_3+N_4},\ \ j=N+1,$$

$$\left\{N_{n0}^{(j)}(\alpha),\ N_{\tau0}^{(j)}(\alpha),\ Q_{n0}^{(j)}(\alpha),\ M_{n0}^{(j)}(\alpha),\ M_{\tau0}^{(j)}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\quad j=\overline{N_1+N_2+N_3+N_4+1, N_1+N_2+N_3+N_4+N_5},\ \ j=N+2,$$

$$w_0^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_i^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$u_{\tau0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$\gamma_{\tau0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\quad j=\overline{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+1, N},\ \ j=N+3,$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) M_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$N_{n0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) N_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\quad j=\overline{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+1, N},\ \ j=N+3,$$

$$-\omega^2\tilde{m}^{(j)}\tilde{w}_0^{(j)}=P_0^{(j)}-\int_{L^{(j)}} k^{(j)}(\zeta)\left(\tilde{w}_0^{(j)}-w(\zeta)\right)dl(\zeta),\ \ j=\overline{1,N_1},$$

$$-\omega^2\tilde{m}^{(j)}\tilde{w}_0^{(j)}=P_0^{(j)}-\int_{L^{\varepsilon(j)}} Q_n(\zeta)\,dl(\zeta),\ \ j=\overline{N_1+1, N_1+N_2+N_3}, \tag{12}$$

де

$$w(\zeta)=\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_i^{(\mu)}(\zeta)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$Q_n(\zeta)=\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) Q_{in}^{(\mu)}(\zeta)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$\Phi_{km}^{(1)1}(\xi)=\Phi_{km}^{(1)4}(\xi)=\Phi_{km}^{cs}(\xi),\Phi_{km}^{(1)2}(\xi)=\Phi_{km}^{(1)5}(\xi)=\Phi_{km}^{sc}(\xi),$$

$$\Phi_{km}^{(1)3}\left(\xi\right)=\Phi_{km}^{ss}\left(\xi\right),\Phi_{km}^{(2)3}\left(\xi\right)=\Phi_{km}^{sc}\left(\xi\right),$$

$$\Phi_{km}^{(2)1}\left(\xi\right)=\Phi_{km}^{(2)4}\left(\xi\right)=\Phi_{km}^{cc}\left(\xi\right),\Phi_{km}^{(2)2}\left(\xi\right)=\Phi_{km}^{(2)5}\left(\xi\right)=\Phi_{km}^{ss}\left(\xi\right).$$

Розв'язок систем інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних схем методу колокацій. Для прикладу, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої $L$ замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття $j$-ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття $j$-ого контуру, $l^{(j)r}$ – довжини відрізків розбиття $L^{(j)r}$, $r=\overline{1,S^{(j)}}$ ), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо такий розподіл невідомих густин $\left\{T^{(j)}\left(\xi\right)\right\}=\left\{T^{(j)r}\right\}\delta\left(\alpha^{(j)r},\xi\right)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$, які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів або точками, які є на відстані $\varepsilon$ від них з боку розглядуваної області.

$$\left\{0,\ 0,\ k^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\left(\tilde{w}_0^{(j)}-w\left(\alpha^{(j)q}\right)\right),\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{\varepsilon(j)},q=\overline{1,S^{(j)}},\ \ j=\overline{1,N_1},$$

$$\left\{0,\ 0,\ \tilde{w}_0^{(j)},\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{(j)},q=\overline{1,S^{(j)}},\ \ \ j=\overline{N_1+1,N_1+N_2},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)}=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)w_i^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)u_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{(j)},q=\overline{1,S^{(j)}},\ \ j=\overline{N_1+N_2+1,N_1+N_2+N_3},$$

$$0=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)M_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)N_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, q=\overline{1,S^{(j)}},\ \ j=\overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3},$$

$$\left\{u_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ u_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ w_0^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ \gamma_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ \gamma_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)},\ j=\overline{N_1+N_2+N_3+1, N_1+N_2+N_3+N_4},\ \ j=N+1,\ \ q=\overline{1,S^{(j)}},$$

$$\left\{N_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ N_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ Q_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ M_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ M_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)},\ q=\overline{1,S^{(j)}},$$

$$j=\overline{N_1+N_2+N_3+N_4+1, N_1+N_2+N_3+N_4+N_5},\ \ j=N+2,$$

$$w_0^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_i^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right) \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r},$$

$$u_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right) \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r},$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right) \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)},\ j=\overline{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+1, N},\ j=N+3,\ q=\overline{1,S^{(j)}},$$

$$M_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) M_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right) \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r},$$

$$N_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) N_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right) \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)},\ j=\overline{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+1, N},\ j=N+3,\ q=\overline{1,S^{(j)}},$$

$$P_0^{(j)} = -\sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\, \tilde{\Psi}_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)p}\right) w_{km}^{(\mu)i} \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r} +$$

$$+ \tilde{w}_0^{(j)}\left(\sum_{p=1}^{S^{(j)}} \Theta\left(\alpha^{(j)p}\right) - \omega^2 \tilde{m}^{(j)}\right),\ \ j=\overline{1,N_1},$$

$$P_0^{(j)} = -\sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) \Psi_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)p}\right) \Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r} -$$

$$-\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)},\quad j=\overline{N_1+1, N_1+N_2+N_3},$$

де $\tilde{\Psi}_{km}^{(1)}\left(\alpha^{(j)p}\right)=\Psi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)p}\right)$, $\tilde{\Psi}_{km}^{(2)}\left(\alpha^{(j)p}\right)=\Psi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)p}\right)$.

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha)=\{n_1(\alpha),n_2(\alpha)\}$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha)=\{\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\}$ можна отримати на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на зовнішніх контурах та контурі включень, використовуючи наступні формули

$$\left\{u_n(\alpha,t),u_\tau(\alpha,t),w(\alpha,t),\gamma_n(\alpha,t),\gamma_\tau(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}\sin(\omega t),$$

$$\left\{N_n(\alpha,t),N_\tau(\alpha,t),Q_n(\alpha,t),M_n(\alpha,t),M_\tau(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}\sin(\omega t).$$

**Висновки.** Використовуючи побудовані в роботі алгебраїчні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних мішаних випадків крайових умов на зовнішніх границях оболонки та контурах отворів, розглядаючи довільні комбінації амплітуд $w(\alpha)$, $u_n(\alpha)$, $\gamma_\tau(\alpha)$, $u_\tau(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$, $M_n(\alpha)$, $N_n(\alpha)$, $M_\tau(\alpha)$, $N_\tau(\alpha)$. Також дозволяються довільні різні мішані крайові умови на складових частинах зовнішніх та внутрішніх контурів границі. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення зовнішньої та внутрішньої границі у випадку анізотропних матеріалів. Запропонована в статті схема дає розв'язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових граничних випадків, отриманими іншими методами.

### *Література*

1. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. − К.: Наук. думка, 1986. − 172 с.
2. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. / под. ред. А.Н. Гузя. − К., 1982. − Т.1. Механика материалов. − 368 с.; Т.2. Механика элементов конструкций − 1983. − 464 с.; Т.3. Прикладные исследования. − 1983. − 262 с.
3. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влай-

ков, А.Я. Григоренко. − К.: Издательский дом «Академпериодика», 2006. − 472 с.

4. Шопа Т. Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною отворів довільної конфігурації / Т. Шопа // Вісник ТНТУ. − 2012. − № 4(68). − С. 14-28.
5. Шопа Т. Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації, жорстко з'єднаних з оболонкою / Т. Шопа // Вісник ТНТУ. − 2013. – № 2. − С. 41-55.
6. Шопа Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації з пружними прошарками / Т. Шопа // Вісник ТНТУ. − 2013. № 1. − С. 71-84.
7. Шопа Т. Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації на шарнірному з'єднанні з оболонкою / Т. Шопа // Прикарпатський вісник НТШ. Число − 2016. – № 1. − С. 26-45.
8. Шопа Т.В. Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множинами отворів та включень довільної конфігурації / Т.В. Шопа // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання − 2014": Тези доповідей. – Львів, 2014.
9. Сухорольський М.А. Послідовності і ряди / М.А. Сухорольський. − Львів: Растр-7, 2010. − 346 с.
10. Бурак Я.Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок / Я.Й. Бурак, Ю.К. Рудавський, М.А. Сухорольський. − Львів: Інтелект-Захід, 2007. − 240 с.
11. Lighthill J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / J. Lighthill. − Cambridge University Press, 1958. − 79 p.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 17.10.2016 р.*
*Рекомендовано до друку д.т.н., професором* ***Лисканичем М.В.,***
*д.ф.-м.н., професором* ***Максимовичем В.М.*** *(м. Луцьк)*

## VIBRATION OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH A SET OF CUTOUTS AND INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION

**T. V. Shopa**
*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine;*
*79060, L'viv, 3-b, Naukova Str.; e-mail:tetyana.sh@gmail.com*

*In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic closed cylindrical shell with the arbitrary number of cutouts and rigid inclusions of the arbitrary geometrical form,* *orientation, and location is constructed. External boundaries of the shell are of the arbitrary geometrical configuration. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered on the external boundaries of the shell and on the contours of the cutouts. The inclusions have different types of connections with the shell. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method and the sequential approach to the representation of the Green's function. The boundary value problem is reduced to the system of algebraic equations.*

***Key words:*** *orthotropic cylindrical shell, vibration, cutouts, inclusions, natural frequencies, sequential approach, Green function, indirect boundary elements method, collocation method.*