

# МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

## Математичний аналіз

УДК 517.5

### ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ РЯДІВ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

**О. Б. Скасків<sup>1</sup>, О. Ю. Тарновецька<sup>2</sup>, О. М. Трусевич<sup>3</sup>**<sup>1</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка;  
e-mail: olskask@gmail.com<sup>2</sup> Чернівецький факультет НТУ “Харківський політехнічний  
інститут”; e-mail: savinska.olga@gmail.com<sup>3</sup> Львівський державний університет безпеки життєдіяльності;  
e-mail: trusev14@gmail.com

У статті отримані достатні умови для того, щоб співвідношення  $\ln F(x) \leq (1+o(1)) \ln \mu(x, F)$  мало місце для кожної функції виду  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$  при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої множини  $E$  нульової лінійної щільності або нижньої нульової лінійної щільності, де  $(f_n)$ ,  $(\lambda_n)$ ,  $(\beta_n)$  – послідовності невід’ємних чисел, а диференційовна функція  $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  задовольняє умові  $\tau'(x) \geq 1$  ( $x \geq x_0$ ),  $\mu(x, F) = \max\{f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$ .

**Ключові слова:** ряд Тейлора-Діріхле, співвідношення Бореля, виняткова множина, максимальний член.

Нехай  $L$  – клас додатних неспадних до  $+\infty$  на  $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$  функцій, а через  $L^+$  позначимо клас неперервних зростаючих до  $+\infty$  на  $[0; +\infty)$  функцій  $\psi \in L$ ; скрізь надалі через  $\psi^{-1}$  позначаємо обернену

функцію до функції  $\psi \in L^+$ . Для  $\Phi \in L$  означимо клас

$$L(\Phi) := \{\psi_1 \in L^+ : \forall b > 0 \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\}.$$

Нехай  $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$  клас збіжних для всіх  $x \geq 0$  рядів вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \geq 0 \quad (n \geq 0), \quad (1)$$

де  $\lambda = (\lambda_n)$ ,  $\beta = (\beta_n)$  невід'ємні послідовності, тобто,

$\lambda = \{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbf{R}_+$ ,  $\beta = \{\beta_n : n \geq 0\} \subset \mathbf{R}_+$ , а функція  $\tau \in L$ . Для  $\Phi \in L$

через  $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$  позначимо підклас класу  $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ , в який входять функції  $F$ , для яких  $\ln F(x) \leq \Phi(x)$  ( $x \geq x_0$ ), а через  $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$  позначимо клас функцій

$$F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$$

таких, що

$(\exists x_j \uparrow +\infty) : \ln F(x_j) \leq \Phi(x_j)$  ( $j \geq 1$ );  $\mathbf{S}(\lambda) := \mathbf{S}(\lambda, 0, \tau)$ ,  $\underline{\mathbf{S}}(\lambda) := \underline{\mathbf{S}}(\lambda, 0, \tau)$ ,

$\mathbf{S}(\lambda, \Phi) := \mathbf{S}(\lambda, 0, \tau, \Phi)$ ,  $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \Phi) := \underline{\mathbf{S}}(\lambda, 0, \tau, \Phi)$  – відповідні класи збіжних

для всіх  $x \geq 0$  рядів Діріхле  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n}$ ,  $a_n \geq 0$  ( $n \geq 0$ ). Для

$F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$  і  $x \geq 0$  визначимо  $\mu(x, F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$ . Ві-

домо (див. [1]-[5]), що задача отримання оцінок зверху для досить широкого класу регулярно збіжних функціональних рядів (Тейлора, Діріхле, Тейлора-Діріхле, за системою функцій Міттаг-Леффлера і т.п.) зводиться до подібної задачі для рядів  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ . В [4, 5] встановлено наступні два твердження, що є аналогами відповідних тверджень, встановлених в [6] в класі цілих рядів Діріхле  $\mathbf{S}(\lambda)$ .

**Теорема А [5].** *Нехай  $\tau \in L$  – диференційовна функція. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty, \quad (2)$$

то для кожної для функції  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$  співвідношення

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \quad (3)$$

у випадку  $\tau'(x) \geq 1$  ( $x \geq x_0$ ) справджується при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої

множини  $E$  скінченної міри, тобто,  $\int_{E \cap [0; +\infty)} dx < +\infty$ , а у випадку

$\tau'(x) \leq 1$  ( $x \geq x_0$ ) – зовні деякої множини  $E$  такої, що  $\int_{E \cap [0; +\infty)} d\tau(x) < +\infty$ .

На необхідність умови (2) вказує наступна теорема.

**Теорема В [5].** *Нехай функція  $\tau \in L$  така, що  $0 \leq \tau'(x) \leq 1$ . Якщо послідовності  $\lambda = (\lambda_n)$ ,  $\beta = (\beta_n)$  – довільні неспадні такі, що  $\ln n = O(\lambda_n + \beta_n)$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), а умова (2) не виконується, то існують функція  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$  і стала  $h > 0$  такі, що*

$$(\forall x \geq x_0) : \ln F(x) \geq (1 + h) \ln \mu(x, F). \quad (4)$$

Якщо застосувати теорему В до функції  $F_1(x) = F(\tau^{-1}(x))$ , то з теореми В отримується такий наслідок.

**Наслідок [5].** Нехай послідовності  $\lambda$ ,  $\beta$  такі, як в теоремі В, а  $\tau'(x) \geq 1$  ( $x \geq x_1$ ). Тоді існує функція  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau)$ , для якої для всіх  $x \geq x_0$  виконується нерівність (4) з деяким  $h > 0$ .

У даній статті умову (2) теореми А ослабимо, розглядаючи співвідношення (3) у підкласах  $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$ ,  $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$ . При цьому, як і у випадку класів цілих рядів Діріхле  $\mathbf{S}(\lambda, \Phi)$ ,  $\underline{\mathbf{S}}(\lambda, \Phi)$  (стосовно класу  $\mathbf{S}(\lambda, \Phi)$  див., наприклад, [7]) доведеться “пожертвувати” якістю описання величини виняткової множини  $E$ . Методика наших доведень відрізняється від методу, що застосовувався у статтях [6, 7] і, як і в цілому ряді інших статей (див., наприклад, [3-5], [8], [10-22]), в її основі лежать оцінки, які отримуються на основі ймовірнісних нерівностей Чебишова або, як у нашому випадку, Маркова. Встановимо спочатку наступні твердження.

**Твердження 1.** Нехай  $\tau \in L, \tau'(x) \geq 1$  ( $x > 0$ ),  $\Phi \in L^+$ ,  $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$ . Якщо для деякої функції  $\psi_1 \in L(\Phi)$  виконується умова

$$\ln n_\alpha(t) = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (5)$$

і  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ , то співвідношення (3) справджується при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої множини  $E$  нульової лінійної щільності, тобто,

$$DE = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas}(E \cap [0, R]) = 0;$$

тут  $n_\alpha(t) = \sum_{\lambda_n + \beta_n \leq t} 1$  – лічильна функція послідовності  $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$ .

**Твердження 2.** Нехай  $\tau \in L, \tau'(x) \geq 1$  ( $x > 0$ ),  $\Phi \in L^+$ ,  $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$ . Якщо для деякої функції  $\psi_1 \in L(\Phi)$  виконується умова (5) і  $F \in \underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ , то співвідношення (3) справджується при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої множини  $E$  нульової нижньої лінійної щільності, тобто,

$$dE = \underline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

Нам потрібне таке допоміжне твердження.

**Лема 1.** Нехай  $\Phi \in L^+$ ,  $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$ ,  $\psi_1 \in L$ ,  $E = \{x > 0 : \psi_1(g(x)) \leq g'(x)\}$ .

1<sup>o</sup>. Якщо  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$  і  $\psi_1 \in L(\Phi)$ , то  $DE = 0$ .

2<sup>o</sup>. Якщо  $F \in \underline{\mathbf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$  і  $\psi_1 \in L(\Phi)$ , то  $dE = 0$ .

Доведення леми 1 отримаємо за допомогою наступного твердження з [9, 11], яке можна сформулювати у такому вигляді.

**Лема 2** [9, 11] Нехай  $\varphi, \psi \in L^+$  функції такі, що

$$A_1(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty, R \in G),$$

$G \subset \mathbf{R}_+$ , та  $R = o(\psi(R\varphi(R)))$  ( $R \rightarrow +\infty$ ). Тоді,

$$A_2(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int \frac{dx}{\psi(x)} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty, R \in G).$$

*Доведення лема 1.* Переконаємось спочатку, що для функції  $\psi \in L(\Phi)$  виконується умова  $R = o(\psi(R\varphi(R)))$  ( $R \rightarrow +\infty$ ) з лема 2 з функцією  $\varphi = \Phi^{-1}$ , оберненою до функції  $\Phi$ . Справді, для довільного  $b > 0$

$$\frac{1}{R} \int_1^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \frac{\psi^{-1}(t)}{Rt} \Big|_1^{b\Phi(R)} + \int_1^{b\Phi(R)} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt,$$

звідки,  $\psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R))$  ( $R \rightarrow +\infty$ ) для довільного  $b > 0$ , тобто,

$\Phi(R) = \frac{1}{b} \psi(o(R\Phi(R)))$  ( $R \rightarrow +\infty$ ) для довільного  $b > 0$ , що дає

$R = o(\psi(R\varphi(R)))$  ( $R \rightarrow +\infty$ ). Оскільки для  $x \notin E$  виконується нерівність  $g'(x) \leq \psi_1(g(x))$ , то у випадку  $\ln F(x) \leq x\Phi(x)$  ( $x \in G$ ) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\text{meas}(E \cap [0, R])}{R} &= \frac{1}{R} \int_{E \cap [0, R]} dx \leq \frac{1}{R} \int_E \frac{g'(x)}{\psi_1(g(x))} dx = \\ &= \frac{1}{R} \int_{g(E \cap [0, R])} \frac{dx}{\psi_1(x)} \leq \frac{1}{R} \int_0^{g(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \leq \frac{1}{R} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \quad (R \in G). \end{aligned}$$

Звідки у випадку 1<sup>0</sup> за лемою 2, застосованою у випадку, коли  $\varphi$  – обернена функція до функції  $\Phi$ , а  $G = [x_0, +\infty)$ , виводимо

$$0 \leq dE \leq \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

позаяк  $\psi_1 \in L(\Phi)$ . У випадку 3<sup>0</sup> подібно для  $G = \{\Phi(x_j) : j \geq 1\}$ , де послідовність  $(x_j)$  з умови  $\ln F(x_j) \leq x_j\Phi(x_j)$ , отримуємо

$$0 \leq dE \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_j} \int_0^{x_j\Phi(x_j)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \leq \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

тобто  $dE = 0$ . Лему 1 доведено.

**Зауваження 1.** Нескладно зрозуміти, що насправді

$R = o(\psi(R\varphi(R)))$  ( $R \rightarrow +\infty$ )  $\Leftrightarrow (\forall b > 0) : \psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R))$  ( $R \rightarrow +\infty$ ) (див. також [12]).

*Доведення тверджень 1-2.* Нехай  $g(x) = \ln F(x)$ . Доведення тверджень 1-2 подібно до доведення теореми з [5]. Отже, застосовуючи лему

1 з [10] та лему 1 з  $\psi_2(x) = \frac{1}{2}\psi_1(x)$  замість  $\psi_1(x)$ , для всіх  $x \notin E$  ( $E$  – деяка множина така, що  $DE = 0$  за умов твердження 1 і  $dE = 0$  за умов твердження 2) отримаємо

$$F(x) \leq 2 \sum_{\lambda_n + \tau'(x)\beta_n \leq 2g'(x)} b_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) \leq 2n_\alpha(\psi_1(g(x)))\mu(x, F). \quad (6)$$

Звідки, використовуючи умову (5), негайно при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \notin E$ ) отримуємо

$$\ln F(x) \leq \ln 2 + \ln n_\alpha(\psi_1(g(x))) + \ln \mu(x, F) = o(g(x)) + \ln \mu(x, F),$$

тобто, твердження 1-2 доведено.

**Теорема 1.** Нехай  $\tau'(x) \geq 1$  ( $x > 0$ ). Якщо  $\Phi \in L^+$  і виконується умова

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \alpha_k \leq b\Phi(R)} \frac{1}{k\alpha_k} = 0, \quad \alpha_k = \lambda_k + \beta_k, \quad (7)$$

то для кожної функції  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ ,  $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$ , співвідношення (3) справджується при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої множини  $E$  нульової лінійної щільності, тобто  $DE = 0$ .

**Зауваження 2.** Теорему 1 раніше [8] було встановлено в класі  $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$ , який, наприклад, у випадку  $\Phi(x) = x^\rho$ ,  $\rho > 0$ , є істотно вужчим за клас  $\mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ , де  $\Phi_1(x) = x^{1+\rho}$ . Зрозуміло також, що у випадку виконання умови  $\Phi_1(x) = \Phi(O(x))$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) обидва результати є рівносильними.

*Доведення.* Перевіримо можливість застосування твердження 1. Справді, застосовуючи нерівність  $1/n \geq \ln(n+1) - \ln n$  ( $n \geq 1$ ) з умови (7) отримуємо

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{b\Phi(R)} \frac{d \ln n_\alpha(t)}{t} = 0. \quad (8)$$

Оскільки  $\int_{t_0}^u \frac{d \ln n_\alpha(t)}{t} = \frac{\ln n_\alpha(t)}{t} \Big|_{t_0}^u + \int_{t_0}^u \frac{dt \ln n_\alpha(t)}{t^2}$ , то з (8) маємо, що одночасно виконуються рівності

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln n_\alpha(\Phi(R))}{R\Phi(R)} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{\ln n_\alpha(t)}{t^2} dt = 0. \quad (9)$$

Нехай  $\varphi(x)$  – обернена функція до функції  $\Phi(R)$ . Визначимо

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{l_1(x)}}, \quad l_1(x) = \max \left\{ \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^R \frac{\ln n_\alpha(t)}{t^2} dt : R \geq x \right\},$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{l_2(x)}}, \quad l_2(x) = \max \left\{ \frac{\ln n_\alpha(R)}{R\varphi(R)} : R \geq x \right\}.$$

Зауважимо, що  $\psi_2(x)$  і  $\psi_3(x)$  строго зростають до  $+\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

Крім того, якщо  $l(R) = \int_0^R t^{-2} \ln n_\alpha(t) dt$ , то з (9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \frac{\psi_2(t) \ln n_\alpha(t) dt}{t^2} &= \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \psi_2(t) dl(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{R} \psi_2(\Phi(R)) l(\Phi(R)) \leq \left\{ \frac{1}{R} \int_0^{\Phi(R)} \frac{\ln n_\alpha(t) dt}{t^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (10)$$

та

$$\frac{\psi_3(\Phi(R))}{R\Phi(R)} \ln n_\alpha(\Phi(R)) \leq \psi_3(\Phi(R)) l_2(\Phi(R)) = \frac{1}{\sqrt{\psi_3(\Phi(R))}} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty). \quad (11)$$

Виберемо тепер додатну неперервну зростаючу до  $+\infty$  функцію  $\psi_4$  таку, що  $a(x) \leq \psi_4(x) \leq a(x) + 1$ , де

$$a(x) = \min\{\psi_2(x) \ln n_\alpha(x), \psi_3(x) \ln n_\alpha(x)\} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Тоді із співвідношень (10) і (11) отримуємо для  $t_0 > 0$ , що

$$\psi_4(\Phi(R)) = o(R\Phi(R)), \quad \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{\psi_4(t)}{t^2} dt = o(R). \quad (12)$$

Із співвідношень (12) отримуємо

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{d\psi_4(t)}{t} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{\psi_4(\Phi(R))}{R\Phi(R)} + \frac{1}{R} \int_{t_0}^{\Phi(R)} \frac{\psi_4(t)}{t^2} dt \right) = 0. \quad (13)$$

Тобто, досить вибрати  $\psi_1(x) = \psi_4^{-1}(x)$  при  $x \geq \psi_4^{-1}(t_0)$  – обернену функцію до функції  $\psi_4(t)$  при  $t \geq t_0$ . Для  $x \in [0, \psi_4^{-1}(t_0)]$  можна вибрати

$$\psi_1(x) = \frac{\psi_4^{-1}(t_0)}{2} + \frac{x}{2}. \text{ Залишається зауважити, що } \ln n_\alpha(t) \leq \frac{\psi_4(t)}{a_1(t)} = \frac{\psi_1^{-1}(t)}{a_1(t)},$$

де  $a_1(t) = \min\{\psi_2(t), \psi_3(t)\} \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ), і застосувати твердження 0, оскільки  $\psi_1 \in L(\Phi)$ . Справді, із співвідношення (13) маємо

$$\frac{1}{R} \int^{\Phi(R)} \frac{d\psi_1^{-1}(x)}{x} = \frac{1}{R} \int^{\Phi(R)} \frac{d\psi_4(x)}{x} = o(1) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Теорему 1 доведено.

Повністю повторюючи міркування з першої частини доведення теореми 1 і застосовуючи потім твердження 2, доводимо таку теорему.

**Теорема 2.** Нехай  $\tau'(x) \geq 1$  ( $x > 0$ ). Якщо  $\Phi \in L^+$ ,  $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \Phi)$  і виконується умова (7), то співвідношення (3) справджується при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої множини  $E$  нульової нижньої лінійної щільності, тобто  $dE = 0$ .

*Доведення.* Як вже відзначалося перед формулюванням теореми 2, доведення теореми 2 відрізняється від доведення теореми 1 лише застосуванням твердження 2 замість твердження 1, застосованого у доведенні теореми 1. Справді, у доведенні теореми 1 встановлено, що з умови (7)

впливає, що існує функція  $\psi_1 \in L(\Phi)$ , для якої виконується співвідношення (5). Оскільки за умовою теореми 2,  $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \Phi)$ , то всі умови твердження 2 виконуються. Застосування твердження 2 завершує доведення теореми 2.

Зауважимо, що у теоремі 1, взагалі кажучи, послідовність  $(\alpha_n)$  мусить мати єдину точку скупчення у  $+\infty$ , а ні  $\lambda$ , ні  $\beta$  не зобов'язані такими бути. У наступній теоремі послідовність  $\lambda$  мусить мати єдину точку скупчення у  $+\infty$ . Але, ця обставина дозволяє істотно послабити умови теореми 1. Умови теореми 1 допускають таку варіацію.

**Теорема 3.** Нехай  $\tau'(x) \geq 0$  ( $x > 0$ ). Якщо  $F \in \mathbf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ ,  $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$ ,  $\Phi \in L$ , і виконується умова

$$(\forall b > 0): \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \lambda_k \leq b\Phi(R)} \frac{1}{k\lambda_k} = 0, \quad (14)$$

то співвідношення (3) виконується при  $x \rightarrow +\infty$  зовні деякої множини  $E$  нульової лінійної щільності.

*Доведення теореми 3* в цілому повторює доведення теореми 1 з тією відмінністю, що замість нерівності (6) воно використовує нерівність

$$F(x) \leq 2 \sum_{\lambda_n \leq 2g'(x)} b_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) \leq 2n_\lambda(\psi_1(g(x)))\mu(x, F),$$

де  $n_\lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ , яка отримується з леми 2 з [10]. З огляду на ці обставини ми не наводимо тут доведення теореми 3.

### Література

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами / В.А. Осколков // Матем. сб. – 1976. – Т.100, №2. – С. 312-334.
2. Величко С.Д. Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів / С.Д. Величко, О.Б. Скасків // Вісник. Львів. ун-ту. – 1989. – Вип. 32. – С. 50-51.
3. Скасків О.Б. Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С. 75-79.
4. Скасків О.Б. Теорема типу Бореля для регулярно збіжних функціональних рядів / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №4. – С. 60-63.
5. Скасків О.Б. Про теорему типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора-Діріхле / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Мат. Студ. – 2000. – Т.13, №1. – С. 79-82.
6. Скасків О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / О.Б. Скасків // Мат. заметки. – 1985. – Т.37, №1. – С. 41-47. Eng. transl. in Math. Notes, **37** 1985, 24-28.

7. Шеремета М.Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1987. – Т.42, №2. – С. 215-226.
8. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Препринт №17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.
9. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості аналітичних функцій представлених степеневими рядами і рядами Діріхле / О.Б. Скасків // Докт. дис. – Львів, 1995. – 299 с.
10. Скасків О.Б. Про стійкість рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле / О.Б.Скасків, О.Ю. Тарновецька // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, №2. – С. 77-83.
11. Зікрач Д.Ю. Про опис виняткової множини у співвідношенні Бореля для кратних рядів Діріхле з обмеженням на зростання зверху / Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків // Матем.Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.139-147.
12. Kuryliak A.O. On Borel's type relation for the Laplace-Stieltjes integrals / A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2014. – V.42, №2. – С. 134-142.
13. Скасків О.Б. О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле / О.Б. Скасків // Матем. заметки. – 1999. – Т.66, №2. – С. 282-292. English transl. in Math. Notes, **66** (1999), 223-232.
14. Скасків О.Б. Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле / О.Б. Скасків, О.М. Тракало // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, №4. – С. 571-576. English transl. in Ukr. Math. J., **57** (2005), 686-693.
15. Kuryliak A.O. Wiman's inequality for Laplace integrals / A.O. Kuryliak, I.E. Ovchar, O.B. Skaskiv // Int. Journal of Math Analysis. – 2014. – V.8, №8. – P. 381-385.
16. Скасків О.Б. Співвідношення типу Бореля для узагальнень ряду експонент / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №11. – С. 1570-1581.
17. Скасків О.Б. Асимптотичні оцінки для інтегралів Лапласа / О.Б. Скасків, О.М. Тракало // Матем. Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С. 125-146.
18. Скасків О.Б. Швидкість збіжності додатних рядів / О.Б. Скасків // Укр. мат. журн. – 2004. – Т.56, №12. – С. 1695-1674.
19. Скасків О.Б. Стійкість максимуму послідовності лінійних функцій / О.Б. Скасків // Мат. вісн. НТШ. – 2004. – Вип.1. – С. 120-129.
20. Skaskiv O.B. The best possible description of exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series / O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2008. – V.30, №2. – P. 189-194.



21. Skaskiv O.B. On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals / O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // *Mat. Stud.* – 2011. – V.35, №2. – P. 131-141.
22. Зікрач Д.Ю. Нерівність типу Вімана для інтегралів Лапласа-Стілт'єса / Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків // *Буковинський математичний журнал.* – 2013. – Т.1, №1-2. – С. 58-63.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 20.10.2016 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Чижиковим І.Е. (м. Львів)*

### ON BOREL'S TYPE RELATION FOR THE LAPLACE-STIELTJES INTEGRALS

**O.B. Skaskiv<sup>1</sup>, O. Yu. Tarnovetska<sup>2</sup>, O. M. Trusevych<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Lviv National University named by Ivan Franko;  
e-mail: olskask@gmail.com*

<sup>2</sup>*Chernivtsi faculty of NTU "Kharkiv polytechnic institute";  
e-mail: savinska.olga@gmail.com*

<sup>3</sup>*Lviv State University of Safety of Vital Functions;  
e-mail: trusev14@gmail.com*

*In article it is obtained sufficient conditions in order that relation  $\ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$  holds for each function of the form  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}$  as  $x \rightarrow +\infty$  outside some set  $E$  of zero linear density or of zero lower linear density, where  $(f_n)$ ,  $(\lambda_n)$ ,  $(\beta_n)$  are positive sequences, and a differentiable function  $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that  $\tau'(x) \geq 1$  ( $x \geq x_0$ ),  $\mu(x, F) = \max\{f_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \geq 0\}$ .*

**Key words:** *Taylor-Dirichlet series, Borel relation, exceptional set, maximal term*