УДК 517.51

ТОЧКИ НЕПЕРЕРВНОСТІ $\mathbf{L}$-ЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ І ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ

В. К. Маслюченко, О. Д. Мироник
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;
58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2;
e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; myronyk.oks@gmail.com.

Досліджується питання про тип множини точок неперервності функцій зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbf{L}$. *У зв'язку з цим для довільної множини* A *у топологічному просторі* X *з певними вимогами вказано спосіб побудови функції* $f : X \to \mathbf{R}$, *у якої множина* $E_m(f)$ *всіх її точок локального мінімуму дорівнює* A. *Для повнометризовного простору* X *з'ясовано, що коли* $E_m(f) = X$, *то* $f : X \to \mathbf{R}$ *має хоча б одну точку локального максимуму.*

Ключові слова: *пряма Зорґенфрея, точки неперервності, локального екстремуму і локальної сталості.*

1. Вступ. Добре відомо, що для топологічного простору X множина $C(f)$ всіх точок неперервності довільної дійснозначної функції $f : X \to \mathbf{R}$, чи навіть функції $f : X \to Y$ зі значеннями у метризовному просторі Y, є множиною типу G_δ. Навпаки для кожної G_δ-множини A на числовій прямій можна побудувати функцію $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, у якої $C(f) = A$ (див., наприклад, [1]). *Пряма Зорґенфрея* $\mathbf{L}$, тобто множина $\mathbf{R}$ з топологічною структурою, у якій околами точки x будуть підмножини U множини $\mathbf{R}$, для яких $U \supseteq [x, x+\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$, докорінно відрізняється своїми властивостями від числової прямої $\mathbf{R}$, зокрема, не є метризовною, хоча є нормальним простором і задовольняє першу аксіому зліченності [2, с. 47, с. 80]. Втім, як і для дійснозначних функцій, якщо X – топологічний простір, Y – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, то у кожної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbf{L}$ для довільного $y \in Y$ множина

$$C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$$

є залишковою в X (див. [3]). У праці [3] вивчалася і обернена задача про побудову для даної залишкової множини A в $\mathbf{L}$ і точки $b \in \mathbf{Q}$ нарізно неперервної функції $f : \mathbf{L} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{L}$, у якої $C_b(f) = A \times \{b\}$. Її вдалося розв'язати для залишкових G_δ-множин в $\mathbf{L}$. Але повного опису множин $C(f)$ для нарізно неперервних функцій $f : \mathbf{L} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{L}$ не було знайдено. І у зв'язку з цим виникла

Проблема 1. *Нехай* X *− топологічний простір і* $f : X \to \mathbf{L}$ *− довільна функція. Чи буде множина* $C(f)$ *борелівською і якщо так, то до якого адитивного чи мультиплікативного класу вона може належати?*

Функція $f : X \to \mathbf{L}$ буде неперервною в точці x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x_0) \le f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Множину таких точок ми позначатимемо $C(f)$. Очевидно, що кожна точка x_0 з $C(f)$ є точкою локального мінімуму функції f як дійсно значної функції. Множину всіх точок локального мінімуму /максимуму/ функції $f : X \to \mathbf{R}$ ми позначатимемо символом $E_m(f)$ /$E_M(f)$/. Нехай $S(f)$ − множина всіх точок неперервності функції $f : X \to \mathbf{R}$, тобто таких точок x_0 з X, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Зрозуміло, що

$$C(f) = S(f) \bigcap E_m(f).$$

Ця формула показує, що вивчення типу множини $C(f)$ для функцій $f : X \to \mathbf{L}$ тісно пов’язане з вивченням типу множини $E_m(f)$. У зв’язку з цим виникла

Проблема 2. *Для яких множин* A *у топологічному просторі* X *існує така функція* $f : X \to \mathbf{R}$*, для якої* $E_m(f) = A$*?*

Виявляється, що для кожної підмножини A числової прямої $\mathbb{R}$ можна побудувати функцію $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, у якої $E_m(f) = A$. Тут ми здійснюємо таку побудову навіть у загальнішому випадку для топологічних просторів з $\aleph_0$-розкладними непорожніми відкритими множинами (теорема 1).

Природно поставити і загальнішу задачу.

Проблема 3. *Для яких підмножин* A *і* B *довільного топологічного простору* X *існує функція* $f : X \to \mathbf{R}$*, така, що* $E_m(f) = A$ *і* $E_M(f) = B$*?*

Ця задача не розв’язана навіть у випадку $X = \mathbf{R}$.

Множини $E_m(f)$ і $E_M(f)$ пов’язані з множиною $L_c(f)$ всіх точок локальної сталості функції $f : X \to \mathbf{R}$, тобто таких точок x_0 з X, для яких існує їх окіл U в X і число $\gamma \in \mathbf{R}$, такі, що $f(x) = \gamma$ на U. Очевидно, що $L_c(f) = E_m(f) \bigcap E_M(f) = \operatorname{int}(E_m(f) \bigcap E_M(f))$. Виявляється, що для локально зв’язного простору X і неперервної функції $f : X \to \mathbf{R}$ має місце і включення

$$\operatorname{int} E_m(f) \bigcup \operatorname{int} E_M(f) \subseteq L_c(f),$$

а значить, і рівності $L_c(f) = \operatorname{int} E_m(f) = \operatorname{int} E_M(f)$ (теорема 2).

Нарешті, для повнометризовного простору X ми встановлюємо (теорема 3), що коли $E_m(f) = X$ для функції $f : X \to \mathbf{R}$, то $E_M(f) \neq \varnothing$.

У зв'язку з проблемою 1 зазначимо, що залишається нерозв'язаною і

Проблема 4. *Чи існує така функція* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{L}$, *що для неї* $C(f) = \mathbf{Q}$*?*

Зауважимо, що для відомої функції Рімана [4, с.172], яку ми інтерпретуємо як відображення $f : \mathbf{R} \to \mathbf{L}$ множина $C(f) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Додамо до цього, що множини $E_m(f)$ і $E_M(f)$ вивчалися у працях [5-9].

2. Побудова функції з даними локальними мінімумами. Підмножину A топологічного простору X ми називатимемо $\aleph_0$*-розкладною,* якщо її можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання послідовності множин A_n, всюди щільних у множині A.

Теорема 1. *Нехай* X *− топологічний простір, в якому кожна непорожня відкрита множина є* $\aleph_0$*-розкладною, і* A *− довільна підмножина* X. *Тоді існує функція* $f : X \to \mathbf{R}$, *у якої* $E_m(f) = A$.

Доведення. Розглянемо замикання $\overline{A}$ множини A в X, множину $B = \overline{A} \setminus A$ і відкриту множину $G = X \setminus \overline{A}$. Якщо $G = \varnothing$, тобто множина A всюди щільна в X, то ми покладаємо $f = \chi_B$, тобто $f(x) = 0$ на A і $f(x) = 1$ на B. Ясно, що $A \subseteq E_m(f)$. Крім того, $B \cap E_m(f) = \varnothing$, бо в довільному околі U точки x з B можна знайти точку u з множини A. Оскільки $f(x) = 1$ і $f(u) = 0 < 1$, то $x \notin E_m(f)$. Таким чином, $E_m(f) = A$.

Нехай $G \neq \varnothing$. Оскільки множина G є $\aleph_0$-розкладною, то існує така послідовність множин A_n, що $G = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$ і $G \subseteq \overline{A_n}$ для кожного n. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in A, \\ 1, x \in B, \\ 1 + 1/n, x \in A_n \text{ для деякого } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Покажемо, що $E_m(f) = A$. Включення $A \subseteq E_m(f)$ очевидне, співвідношення $E_m(f) \cap B = \varnothing$ перевіряється як і раніше. Доведемо, що і $E_m(f) \cap G = \varnothing$.

Нехай $x \in G$. Тоді існує такий номер n, що $x \in A_n$. В такому разі $f(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$. Множина A_{n+1} щільна в G, зокрема, $A_n \subseteq \overline{A_{n+1}}$. Тому в кожному околі U точки x існує точка u з A_{n+1}. Оскільки $f(u) = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = f(x)$, то $x \notin E_m(f)$, отже, $E_m(f) \bigcap G = \varnothing$.

Таким чином, $E_m(f) \bigcap (B \bigcup G) = \varnothing$, тому $E_m(f) = A$.

Приклад 1. Кожна відкрита непорожня множина G на числовій прямій $\mathbf{R}$ є $\aleph_0$-розкладною. Щоб це довести, досить розглянути випадок $G = (a,b)$, де $-\infty < a < b < +\infty$.

Перенумеруємо всі прості числа у послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ у порядку зростання, тобто $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ і т.д. Нехай

$$A_n = \left\{ r \in (a,b) \bigcap \mathbf{Q} : r = \frac{m}{p_n^k}, m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}, \frac{m}{p_n^k} - \textit{нескоротний дріб} \right\}.$$

Ясно, що $A_n \bigcap A_l = \varnothing$ при $n \neq l$. Доведемо, що $G \subseteq \overline{A_n}$ для кожного n. Зафіксуємо n і розглянемо довільний інтервал $U = (\alpha, \beta) \subseteq G$. Візьмемо такий номер k, що $\frac{1}{p_n^{k-1}} < \beta - \alpha$. Нехай $m = [\alpha p_n^k]$, де $[x]$ − ціла частина числа x. Тоді $m \in \mathbf{Z}$ і $m \le \alpha p_n^k < m+1$, звідки $\frac{m}{p_n^k} \le \alpha < \frac{m+1}{p_n^k}$. За вибором числа k маємо, що $\alpha + \frac{p_n}{p_n^k} = \alpha + \frac{1}{p_n^{k-1}} < \alpha + \beta - \alpha = \beta$. Але $p_n \ge 2$, тому

$$\alpha < \frac{m+1}{p_n^k} < \frac{m+2}{p_n^k} = \frac{m}{p_n^k} + \frac{2}{p_n^k} \le \alpha + \frac{p_n}{p_n^k} < \beta.$$

Число p_n просте, тому хоча б одне з чисел $m+1$ і $m+2$ не ділиться на p_n. Позначимо його через s. Тоді дріб $\frac{s}{p_n^k}$ належить до перетину $U \bigcap A_n$, а значить, $G \subseteq \overline{A_n}$.

Доповнення $A_0 = G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ містить всі ірраціональні числа, тому і $G \subseteq \overline{A_0}$. Таким чином, $G = \coprod_{n=0}^{\infty} A_n$ і $G \subseteq \overline{A_n}$ для кожного $n = 0,1,\ldots$. Це показує, що G − $\aleph_0$-розкладна множина.

Наслідок 1. *Для довільної підмножини A числової прямої існує така функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, що $E_m(f) = A$.*

3. Точки локальної сталості. Розглянемо множину $L_c(f)$ всіх *точок локальної сталості* функції $f : X \to \mathbf{R}$, тобто таких точок $x \in X$, у яких є окіл U, такий, що звуження $f|_U$ − це стала функція. Оскільки кожний окіл U точки x містить деякий відкритий окіл V цієї точки, то множина $L_c(f)$ відкрита. Легко пояснити, що $L_c(f) = E_m(f) \bigcap E_M(f) = \text{int}(E_m(f) \bigcap E_M(f))$. Для неперервних функцій, заданих на локально зв'язному просторі, ці співвідношення можна уточнити.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *локально зв'язним*, якщо кожний окіл U довільної точки x з X містить деякий зв'язний окіл V цієї точки. Добре відомо, що компоненти зв'язності локально зв'язного простору відкриті, тому в кожному околі U довільної точки x з X міститься на віть відкритий зв'язний окіл V точки x.

Теорема 2. *Нехай X − локально зв'язний простір і $f : X \to \mathbf{R}$ − неперервна функція. Тоді $L_c(f) = \text{int}\, E_m(f) = \text{int}\, E_M(f)$.*

*Доведення***.** Доведемо, що $\text{int}\, E_m(f) \subseteq L_c(f)$. Нехай $x_0 \in \text{int}\, E_m(f)$. Тоді існує такий відкритий зв'язний окіл U точки x_0 в X, що $U \subseteq E_m(f)$ і $f(x) \geq f(x_0)$ на U. Покажемо, що звуження $f|_U$ стале, тобто, що $f(x) = f(x_0)$ на U.

Нехай це не так. Тоді існує така точка x_1 в U, що $f(x_0) < f(x_1)$. Візьмемо довільне число γ, для якого $f(x_0) < \gamma < f(x_1)$ і розглянемо множину $A = \{x \in U : f(x) \geq \gamma\}$. Оскільки функція f неперервна, то множина A замкнена в U. Покажемо, що вона і відкрита в U. Нехай $x \in A$. Тоді існує такий окіл V, точки x в X, що $V \subseteq U$ і $f(u) \geq f(x)$ на V. Але $f(x) \geq \gamma$, тому $f(u) \geq \gamma$ на V, отже, $V \subseteq A$, що і дає нам відкритість A і в X, і в U.

Але $\varnothing \neq A \neq U$, адже $x_1 \in A$ і $x_0 \in U \setminus A$. Таким чином, A − це нетривіальна відкрито-замкнена підмножина U, що суперечить зв'язності множини U.

Так само доводиться включення $\text{int}\, E_M(f) \subseteq L_c(f)$. Оскільки завжди $L_c(f) \subseteq \text{int}\, E_m(f)$ і $L_c(f) \subseteq \text{int}\, E_M(f)$, то

$$\text{int}\, E_m(f) = L_c(f) = \text{int}\, E_M(f).$$

4. Функції з суцільними локальними мінімумами. На завершення встановимо ще такий результат.

Теорема 3. *Нехай X − повнометризовний топологічний простір, $f : X \to \mathbf{R}$ − функція, G − відкрита непорожня множина в X, така, що $G \subseteq E_m(f)$. Тоді $E_M(f) \bigcap G \neq \varnothing$.*

Доведення. Нехай d − метрика на X, яка породжує топологічну структуру на просторі X і метричний простір (X, d) повний. Для точки $x \in X$ і числа $r > 0$ нехай

$$B(x,r)=\{u\in X: d(u,x)<r\} \text{ і } B[x,r]=\{u\in X: d(u,x)\le r\} \; -$$

це відповідно відкрита і замкнена кулі з центром у точці x і радіусом r у метричному просторі (X,d).

Припустимо, що $E_M(f)\bigcap G=\varnothing$. Оскільки $G\ne\varnothing$, то існує точка $x_1\in G=G_0$. Множина G − відкрита і $G\subseteq E_m(f)$. Тому існує таке число $r_1>0$, що $r_1\le 1$, $B_1=B[x_1,r_1]\subseteq G$ і $f(x)\ge f(x_1)$ на B_1. Розглянемо відкриту кулю $G_1=B(x_1,r_1)$. Оскільки $x_1\in G$, то $x_1\notin E_M(f)$, тому в околі G_1 точки x_1 знайдеться така точка x_2, що $f(x_2)>f(x_1)$. Далі існує $r_2>0$, що $r_2\le\frac{1}{2}$, $B_2=B[x_2,r_2]\subseteq G_1$ і $f(x)\ge f(x_2)$ на B_2. Як і раніше, у відкритій кулі $G_2=B(x_2,r_2)$ знайдеться точка x_3, така що $f(x_3)>f(x_2)$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми побудуємо послідовність замкнених куль $B_n=B[x_n,r_n]$ і відкритих куль $G_n=B(x_n,r_n)$, таких, що $0<r_n\le\frac{1}{n}$, $B_{n+1}\subseteq G_{n+1}\subseteq B_n\subseteq G_{n-1}$, $f(x)\ge f(x_n)$ на B_n і $f(x_{n+1})>f(x_n)$ для кожного $n\in\mathbf{N}$. За лемою про вкладені кулі $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\{x_0\}$ для деякої точки $x_0\in X$. Оскільки $x_0\in B_1\subseteq G$, то $x_0\in E_m(f)$. Але це не так. Справді. Нехай U − довільний окіл точки x_0 в X. За побудовою $x_n\to x_0$, отже, існує такий номер N, що $x_n\in U$, як тільки $n\ge N$. Зафіксуємо якийсь номер n, такий, що $n\ge N$. Тоді і $n+1\ge N$. Оскільки $x_0\in B_{n+1}$, то $f(x_0)\ge f(x_{n+1})$. Але $f(x_{n+1})>f(x_n)$, тому $f(x_0)>f(x_n)$ і $x_n\in U$. Отже, $x_0\notin E_m(f)$, що приводить до суперечності.

Таким чином, $E_M(f)\bigcap G\ne\varnothing$.

Наслідок 2. *Нехай X − повнометризовний топологічний простір і $f: X\to\mathbf{R}$ − така функція, що $E_m(f)=X$. Тоді множина $E_M(f)$ всюди щільна в X.*

Доведення. Для довільної відкритої непорожньої множини G в X будемо мати, що $G\subseteq E_m(f)$, отже *$E_M(f)\bigcap G\ne\varnothing$ за теоремою 3, а це і означає, що $\overline{E_M(f)}=X$.*

Література

1. Окстоби Дж. Мера и категорія / Дж. Окстоби. − М.: Мир, 1974. − 160 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. − М.: Мир, 1986. − 752 с.
3. Маслюченко В.К. Розриви нарізно неперервних відображень зі значеннями в прямій Зорґенфрея / В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник // Мат. студії. – 2016. – **45**, №1. – С. 67-75.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и інтегрального исчисления. Т.1 / Г.М. Фихтенгольцю − М.: ФИЗМАТЛИТ, Лабор. знаний, 2003. − 680 с.
5. Posey E.E., Vaughan J.E. Extrema and nowhere differentiable functions / E.E. Posey, J.E. Vaughan // Rocky Mountain J. Math. − 1986. − **16,** №4. − P. 661-668.
6. Bella A. Many continuous functions have many proper local extrema / A. Bella, J. Charatonik, A. Villani // J. Math. Anal. Appl. − 1991. − **154**, №2. − P. 558-571.
7. Behrends E. Functions for which all points are a local minimum or maximum / E. Behrends, S. Geschke, T. Natkaniec // Real Analysis Exchange. − 2007/2008. − **33**, №2. − P. 1-4
8. Behrends E. Functions for which all points are local extrema / E. Behrends, S. Geschke, T. Natkaniec // Real Analysis Exchange. − 2007/2008. − **33**, №2. − P. 467-470.
9. Banakh T. Connected economically metrizable spaces / T. Banakh, M. Vovk, M.R. Wójcik // Fund. Math. − 2011. − 212. − P. 145-173.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.01.2017 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.,***
*д.ф.-м.н., професором **Плічком А.М.** (м. Кропивницький)*

THE POINTS OF CONTINUITY OF FUNCTIONS WITH VALUES IN THE SORGENFREY LINE AND LOCAL EXTREMA

V. K. Maslyuchenko, O. D. Myronyk
Chernivtsa National University
58012, Chernivtsi, Kotsyubyns'ky Str. 2;
e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; myronyk.oks@gmail.com

We investigate the continuity points set of functions $f : X \to \mathbf{L}$ with values in the Sorgenfrey line $\mathbf{L}$. We construct the function $f : X \to \mathbf{R}$, such that for any subset A of a topological space X with certain requirements, the set of all local minimum points $E_m(f)$ is equal to A. We prove that if X is a completely metric space and a function $f : X \to \mathbf{R}$ such that $E_m(f) = X$ then f has at least one local maximum point.

Key words: *the Sorgenfrey line, point of continuity, point of local extremum and local stability.*