УДК 517.53

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ РОЗПОДІЛУ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ ЦІЛИХ КРИВИХ

І. Є. Овчар, Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

При незначному обмеженні наведено розв'язання оберненої задачі теорії розподілу значень для цілих кривих нескінченного порядку.

Ключові слова: *ціла крива, характеристика росту, функція наближення, неванліннівський дефектний вектор, величина дефекта, допустима система векторів.*

В даній роботі використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1].

Разом з тим, зупинимось на деяких основних поняттях.

Цілою кривою називається голоморфне відображення $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{p}}$, де p – натуральне число, більше за одиницю. Отже, p-мірна ціла крива має вигляд $\vec{G}(z)=(g_1(z),\, g_2(z),\, \dots,\, g_p(z))$, де компоненти $g_1(z),\, g_2(z),\, \dots,\, g_p(z)$ – цілі (тобто аналітичні в усій комплексній площині) функції. Вважатимемо їх лінійно незалежними і без спільних нулів.

Для p-мірної цілої кривої $\vec{G}$ *характеристика росту* $T(r,\vec{G})$ та *функція наближення* $m(r,\vec{a},\vec{G})$ при $\vec{a}\neq\vec{0}$ визначаються рівностями

$$T(r,\vec{G})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}(re^{i\varphi})\right\|d\varphi,$$

$$m(r,\vec{a},\vec{G})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\left\|\vec{G}(re^{i\varphi})\right\|\cdot\|\vec{a}\|}{\left|\vec{G}(re^{i\varphi})\cdot\vec{a}\right|}d\varphi.$$

Розглянемо

$$\delta(\vec{a},\vec{G})=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,\vec{a},\vec{G})}{T(r,\vec{G})}.$$

Якщо $\delta(\vec{a},\vec{G})>0$, то $\vec{a}$ називається *неванліннівським дефектним вектором*, а саме значення $\delta(\vec{a},\vec{G})$ – величиною дефекту.

Порядком цілої кривої $\vec{G}$ називається величина $\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T\left(r,\, \vec{G}\right)}{\ln r}$.

Система векторів із $\boldsymbol{C}^p$ називається допустимою, якщо довільні p векторів з цієї системи лінійно незалежні, коли кількість векторів системи не менша за p; якщо ж менша за p, то всі вектори системи лінійно незалежні.

З другої основної теореми для цілих кривих [2] випливає, що для довільної p-мірної цілої кривої $\vec{G}$ і для довільної допустимої системи векторів $A \subset \boldsymbol{C}^p$ виконується нерівність

$$\sum_{\vec{a}\in A} \delta\left(\vec{a},\, \vec{G}\right) \le p .$$

Позначимо $\boldsymbol{N}_q = \begin{cases} \boldsymbol{N},\ q = \infty, \\ \left\{1, 2, \ldots, q\right\},\ 1 \le q < \infty, \\ \varnothing,\ q = 0. \end{cases}$

Нехай маємо множину чисел $\left\{\delta_j : j \in \boldsymbol{N}_q\right\}$, таку, що: а) $0 < \delta_j \le 1,\ j \in \boldsymbol{N}_q$, б) $\sum_{j\in \boldsymbol{N}_q} \delta_j \le p$; і нехай $A = \left\{\vec{a}_j : j \in \boldsymbol{N}_q\right\}$ – допустима система векторів із $\boldsymbol{C}^p$.

Обернена задача теорії розподілу значень для цілих кривих полягає в побудові цілої кривої $\vec{G}$, для якої:

1) $\delta\left(\vec{a}_j,\, \vec{G}\right) = \delta_j$ для всіх $j \in \boldsymbol{N}_q$;

2) для довільного вектора $\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p \setminus A$, такого, що $A \bigcup \left\{\vec{a}\right\}$ – допустима система векторів, маємо $\delta\left(\vec{a},\, \vec{G}\right) = 0$.

В даній роботі ми дамо розв'язок оберненої задачі теорії розподілу значень для цілих кривих нескінченного порядку при додатковій умові $\sum_{j\in \boldsymbol{N}_q} \delta_j \le p-1$ *замість умови б).*

При $p = 2$ отриманий результат дещо доповнює відому теорему Фукса і Хеймана [3]. Відзначимо також результат роботи [4], в якій будується ціла крива з заданими дефектними значеннями і величинами дефектів, які задовольняють ряду істотних додаткових обмежень.

Позначимо через $\boldsymbol{S}^p$ підмножину одиничної сфери $\left\{\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p : \left\|\vec{a}\right\| = 1\right\}$, яка складається з тих векторів, в яких перша ненульова компонента є ненульовим числом.

З означення неванліннівського дефектного вектора випливає, що для $\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, $\lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \left\{0\right\}$ виконується $\delta\left(\vec{a},\, \vec{G}\right) = \delta\left(\lambda\vec{a},\, \vec{G}\right)$. Оскільки

$\boldsymbol{C}^p \setminus \{\vec{0}\} = \{\lambda \vec{a} : \vec{a} \in \boldsymbol{S}^p,\ \lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\}$, то можна, не зменшуючи загальності, розглядати тільки дефектні вектори з $\boldsymbol{S}^p$.

Позначимо ще $\boldsymbol{N}_{qp} = \boldsymbol{N}_q \cup \{-p+2, -p+3, \dots, 0\}$.

Доведемо спочатку таку лему.

Лема 1. *Для даної послідовності чисел* $\{\delta_j : j \in \boldsymbol{N}_q\}$, *такої, що:* $0 \le \delta_j \le 1$ *для всіх* $j \in \boldsymbol{N}_{qp}$; $\sum_{j=-p+2}^{q} \delta_j = p-1$, *існує послідовність невід'ємних чисел* $\{\kappa_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, *яка задовольняє таким умовам:*

1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \kappa_\nu = 1$;

2) для довільного $\mu \in \boldsymbol{N}_{qp}$ *існує множина* $M_\mu \subset \boldsymbol{N}$, *така, що* $\sum \{\kappa_\nu : \nu \in M_\mu\} = \delta_\mu$;

3) якщо $\kappa_\nu > 0$, *то* $\operatorname{card} S_\nu = p-1$, *де* $S_\nu = \{j : \nu \in M_j\}$.

Д о в е д е н н я. Позначимо для зручності $\delta_j^{(0)} = \delta_j$. Виберемо підмножину $S_1 \subset \boldsymbol{N}_{qp}$ такою, що $\operatorname{card} S_1 = p-1$, $\min\{\delta_j^{(0)} : j \in S_1\} \ge \max\{\delta_j^{(0)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_1\}$. Тепер візьмемо $\kappa_1 = \min\left\{\min\{\delta_j^{(0)} : j \in S_1\},\ \min\{1 - \delta_j^{(0)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_1\}\right\}$,

$$\delta_j^{(1)} = \begin{cases} \delta_j^{(0)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_1, \\ \delta_j^{(0)} - \kappa_1 : j \in S_1. \end{cases}$$

Нехай $\{\delta_j^{(1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp}\}, \dots, \{\delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp}\}$ уже вибрані. По послідовності $\{\delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp}\}$ вибираємо S_n і беремо

$$\kappa_n = \min\left\{\min\{\delta_j^{(n-1)} : j \in S_n\},\ \min\left\{1 - \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_k - \delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_n\right\}\right\},$$

$$\delta_j^{(n)} = \begin{cases} \delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_n, \\ \delta_j^{(n-1)} - \kappa_n : j \in S_n. \end{cases}$$

Очевидно, що $\sum_{j \in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j^{(n-1)} - \sum_{j \in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j^{(n)} = \sum_{j \in S_n} \kappa_n = (p-1)\kappa_n$. Звідси неважко бачити, що при довільному $n \in \boldsymbol{N}$ виконується рівність

$$\sum_{j \in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j^{(n-1)} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_k\right)(p-1). \tag{1}$$

Відповідно до вибору $\kappa_1, \kappa_2, \ldots,$ та $\delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}, \ldots,$ отримуємо: $\delta_j^{(1)} = \delta_j^{(0)} - \kappa_1 \le 1 - \kappa_1$, якщо $j \in S_1$; $\kappa_1 \le 1 - \delta_j^{(1)}$, отже, $\delta_j^{(1)} \le 1 - \kappa_1$ при $j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_1$, тобто $\delta_j^{(1)} \le 1 - \kappa_1$ при всіх $j \in \boldsymbol{N}_{qp}$. Аналогічно маємо $\delta_j^{(2)} \le 1 - \kappa_1 - \kappa_2$ при всіх $j \in \boldsymbol{N}_{qp}$.

Продовжуючи такі ж міркування, отримаємо

$$\delta_j^{(n-1)} \le 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_k, \quad j \in \boldsymbol{N}_{qp}. \tag{2}$$

Позначимо $\delta_j^* = \lim_{n \to \infty} \delta_j^{(n-1)}$ (границя існує, оскільки $0 \le \delta_j^{(n)} \le \delta_j^{(n-1)}$).

Нам потрібно показати, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k = 1. \tag{3}$$

Припустимо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k = \alpha < 1. \tag{4}$$

Тоді, відповідно до (1) та (4), маємо

$$\sum_{j \in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j^* = (1-\alpha)(p-1), \tag{5}$$

звідки отримуємо, враховуючи (2), що $card\left\{ j : \delta_j^* > 0 \right\} \ge p - 1$. Звідси випливає існування $\varepsilon > 0$, такого, що $\min\left\{ \delta_j^{(n-1)} : j \in S_n \right\} > \varepsilon$ при всіх $n \in \boldsymbol{N}$.

Оскільки $\kappa_n \to 0$ при $n \to 0$, то, відповідно до вибору κ_n обов'язково

$$\min\left\{ 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_k - \delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_n \right\} \to 0 \quad \text{при } n \to 0. \tag{6}$$

Позначимо $\delta^{(n-1)} = \max\left\{ \delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_n \right\}$. Очевидно, що $\min\left\{ 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_k - \delta_j^{(n-1)} : j \in \boldsymbol{N}_{qp} \setminus S_n \right\} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_k - \delta^{(n-1)}$, звідки, відповідно до (4) та (6), робимо висновок, що $\delta^{(n-1)} \to 1 - \alpha$ при $n \to 0$.

Враховуючи вибір множини S_n, маємо $\sum_{j \in S_n} \delta_j^{(n-1)} \ge (p-1)\delta^{(n-1)}$. Звідси, $\sum_{j \in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j^{(n-1)} \ge p\delta^{(n-1)}$. Оскільки кожна з послідовностей $\left\{ \delta_j^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ не зростаюча, то переходячи в останній нерівності до границі при $n \to 0$, отримуємо $\sum\limits_{j\in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j^* \geq p\left(1-\alpha\right)$. Це суперечить рівності (5). Отже, доведено рівність (3).

Позначимо $M_\mu = \left\{\nu \in \boldsymbol{N} : \kappa_\nu = \delta_\mu^{(\nu-1)} - \delta_\mu^{(\nu)} > 0\right\}$. Неважко бачити, що $\sum\limits_{\nu\in M_\mu} \kappa_\nu = \delta_\mu$, оскільки нерівність $\delta_\mu^{(\nu-1)} - \delta_\mu^{(\nu)} > 0$ рівносильна тому, що $\mu \in S_n$, $\kappa_\nu > 0$.

Тепер займемось побудовою потрібної цілої кривої.

Виберемо $\delta_{-p+2} = \delta_{-p+3} = \ldots = \delta_0 = 1 - \dfrac{1}{p-1}\sum\limits_{j=1}^{q} \delta_j$. Очевидно, $\sum\limits_{j\in \boldsymbol{N}_{qp}} \delta_j = p-1$.

Скориставшись лемою 1, знайдемо κ_ν, M_μ, S_ν, які задовольняють умовам 1), 2), 3) цієї леми.

Покладемо $S'_\nu = S_\nu \bigcap \boldsymbol{N}$, $A_\nu = \left\{\vec{a}_j \in A : j \in S'_\nu\right\}$; $card\, S'_\nu = p - n_\nu$; $1 \leq n_\nu \leq p$.

Візьмемо лінійно незалежні вектори $\vec{b}_\nu^{(1)}, \vec{b}_\nu^{(2)}, \ldots, \vec{b}_\nu^{(n_\nu)}$ $\left(\vec{b}_\nu^{(s)} = \left(b_{\nu 1}^{(s)}, b_{\nu 2}^{(s)}, \ldots, b_{\nu p}^{(s)}\right)\right)$, такі, що:

$$\vec{b}_\nu^{(s)} \vec{a}_\nu = 0, \quad s = 1,2,\ldots,n_\nu; \tag{7}$$

$$\left\|\vec{b}_\nu^{(s)}\right\| = 1, \quad s = 1,2,\ldots,n_\nu \tag{8}$$

і покладемо $\vec{P}_\nu\left(z\right) = \vec{b}_\nu^{(1)} + \vec{b}_\nu^{(2)} z + \ldots + \vec{b}_\nu^{(n_\nu)} z^{n_\nu - 1}$.

Як відомо [3, п. 4.1], множину $\boldsymbol{N}$ можна розбити на множини N_ν, які не перетинаються, зі щільностями κ_ν, такі, що $N_\nu \bigcap \left\{n \in \boldsymbol{N} : \mathrm{n} < 2^{\nu-1}\right\} = \varnothing$.

Нехай $\vec{G}^*\left(z\right) = \exp\left\{-e^z - z\right\} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{R}_n\left(z\right) E_n\left(z\right)$, де $\vec{R}_n\left(z\right)$

$$\vec{R}_n\left(z\right) = \begin{cases} \vec{P}_\nu\left(z\right), \; |n| < N_\nu, \\ \left(1, \, \mathrm{z}, \ldots, z^{n_\nu - 1}\right), \; n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$E_0\left(z\right) = E_n\left(z - 2n\pi i\right)$, а $E_0\left(z\right)$ – ціла функція (див. [3, п. 4.1]) з асимптотикою

$$E_0\left(z\right) = \begin{cases} \exp\left\{e^z + z\right\} + O\left(z^{-2}\right), \; z \to \infty, \, z \in A_0, \\ O\left(z^{-2}\right), \; z \to \infty, \, z \notin A_0, \end{cases} \qquad A_0 = \left\{z = x + iy : |y| \leq \pi\right\}.$$

Тепер візьмемо

$$\vec{G}(z)=\left(\left(\vec{G}^*(z)\right)_1+\lambda_0 e^{-e^{\bar{z}}-z},\left(\vec{G}^*(z)\right)_2,\ldots,\left(\vec{G}^*(z)\right)_p\right),\tag{10}$$

де $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ беремо таким, щоб для всіх $z \in \boldsymbol{C}$ виконувалось

$$\left|\left(\vec{G}(z)\right)_1\right|+\left|\left(\vec{G}^*(z)\right)_2\right|>0.\tag{11}$$

Очевидно, для цього достатньо взяти $\lambda_0 \notin \left\{-\left(\vec{G}^*(z)\right)_1 \cdot e^{e^{\bar{z}}+z} : \left(\vec{G}^*(z)\right)_2=0\right\}$.

Покажемо, що ціла крива виду (10) є шуканою.

Нам потрібна буде

Лема 2. *Нехай $\vec{G}(z)$ і $\vec{R}_n(z)$ визначаються рівностями (9) та (10). Має місце*

$$\left\|\vec{G}(z)-\vec{R}_n(z)\right\|=O\left\{z^{p+1}e^{-e^{\bar{z}}-z}\right\},\tag{12}$$

при $z=x+iy\to\infty$, де n – ціле число, яке визначається умовою

$$(2n-1)\pi<y\le(2n+1)\pi.\tag{13}$$

Доведення цієї леми ми опускаємо, оскільки воно аналогічне доведенню леми 4.2 із [3, п. 4.1].

Відповідно до (9), (11) та (12) робимо висновок, що компоненти $\vec{G}(z)$ лінійно незалежні (достатньо розглянути поведінку цих компонент на дійсній осі) і не мають спільних нулів.

Оцінимо ріст характеристики T кривої $\vec{G}$. Із (12) випливає, що

$$\ln\left\|\vec{G}(z)\right\|\le\ln^+\left\|\vec{R}_n(z)\right\|+\ln^+\left|z^{p+1}e^{-e^{\bar{z}}-z}\right|+O\{1\},\quad z\to\infty,\tag{14}$$

де n визначається умовою (13). Відповідно до (8) та вибору многочленів $\vec{P}_\nu(z)$ для всіх $\nu\in\boldsymbol{N}$ виконується $\left\|\vec{P}_\nu(z)\right\|\le p\left(|z|^p+1\right)$. Звідси та з (9) маємо

$$\left\|\vec{R}_n(z)\right\|\le p\left(|z|^p+1\right),\ n\in\boldsymbol{Z},\tag{15}$$

і, таким чином (див. [3, п. 4.1]), з (14) отримаємо

$$T\left(r,\vec{G}\right)\le\{1+o\{1\}\}e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2},\quad r\to\infty.\tag{16}$$

Тепер покажемо, що

$$\delta\left(\vec{a}_\mu,\vec{G}\right)\ge\delta_\mu.\tag{17}$$

В рівностях (7) зафіксуємо $j=\mu\in\boldsymbol{N}_q$. Очевидно,що (7) буде виконуватись при всіх $\nu\in M_\mu$, оскільки $M_\mu=\{n:\mu\in S_n,\ \kappa>0\}=\{n:\mu\in S'_n,\ \kappa>0\}$, бо $\mu\in\boldsymbol{N}_q$.

Позначимо

$$Q_n\left(z,\, \vec{a}\right) = \vec{R}_n\left(z\right)\vec{a}, \quad \vec{a} \in \boldsymbol{C}^p\,. \tag{18}$$

Із (7) та (9) матимемо

$$Q_n\left(z, \vec{a}_\mu\right) \equiv 0\,,\ n \in \bigcup_{\nu \in M_\mu} N_\nu = K_\mu\,. \tag{19}$$

Скориставшись лемою 2, дістанемо
$f_\mu\left(z\right) = \vec{G}\left(z\right)\vec{a}_\mu = Q_n\left(z,\, \vec{a}_\mu\right) + O\left\{z^{p+1}e^{-e^z - z}\right\}$ при $z = x + iy \to \infty$, де $n \in \boldsymbol{Z}$ визначається умовою (13).

Тоді, відповідно до (19), при $n \in K_\mu$ отримаємо

$$f_\mu\left(z\right) = O\left\{z^{p+1}e^{-e^z - z}\right\},\ \ z \to \infty\,. \tag{20}$$

Із (9) та (12) випливає, що якщо $y \in \Gamma_\nu = \bigcup_{n \in N_\nu}\left[\left(2n-1\right)\pi,\ \left(2n+1\right)\pi\right]$, то

$$\left\|\vec{G}\left(z\right)\right\| = \left\|\vec{P}_\nu\left(z\right) + O\left\{z^{p+1}e^{-e^z - z}\right\}\right\| \geq \left\|\vec{P}_\nu\left(z\right)\right\| + O\left\{z^{p+1}e^{-e^z - z}\right\},\ \ z \to \infty\,.$$

Виберемо $\alpha > 0$ і $\lambda_\nu > 0$ такими, щоб виконувалось $\left\|\vec{G}\left(z\right)\right\| \geq \frac{1}{2}\left\|\vec{P}_\nu\left(z\right)\right\| \geq \lambda_\nu$ при $l\left(z\right) = \left|z^{p+1}e^{-e^z - z}\right| \leq \alpha$ при $\left|z\right| = r \geq r_0\left(\nu\right)$. Позначимо $\Theta_\nu\left(r\right) = \left\{\varphi \in \left[0,\, 2\pi\right] : l\left(re^{i\varphi}\right) < \alpha,\, r\sin\varphi \in \Gamma_\nu\right\}$, $r > r_0\left(\nu\right)$, і покладемо $\varphi_\nu\left(y\right) = \cos y$ при $y \in \Gamma_\nu$; $\varphi_\nu\left(y\right) = 0$ при $y \notin \Gamma_\nu$. Тоді при $\varphi \in \Theta_\nu\left(r\right)$, $\nu \in M_\mu$ (див. (20)) маємо

$$\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(z\right)\right\|}{\left|\vec{G}\left(z\right)\cdot\vec{a}_\mu\right|} = \ln\frac{\left\|\vec{G}\left(z\right)\right\|}{\left|f_\mu\left(z\right)\right|} \geq e^x\varphi_\nu\left(y\right) - \left(p+1\right)\ln\left|z\right| - \left|z\right| + O\left(1\right) \geq e^x\varphi_\nu\left(y\right) + O\left(1\right),\ z \to \infty\,.$$

Ця нерівність має місце і при $\varphi \notin \Theta_\nu\left(r\right)$, бо в цьому випадку $e^x\varphi_\nu\left(y\right) = O\left(z\right),\ z \to \infty$.

З наведених вище міркувань випливає така

Лема 3. *Нехай* $\nu \in M_\mu$, $\Gamma'_\nu\left(r\right) = \left\{\varphi \in \left[0,\, 2\pi\right]:\ r\sin\varphi \in \Gamma_\nu\right\}$. *Тоді*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'_\nu(r)} \ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\cdot\vec{a}_\mu\right|}d\varphi \geq \left\{\kappa_\nu + o\left(1\right)\right\}e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2},\quad r \to \infty\,.$$

Для доведення достатньо повторити хід міркувань, наведених в лемі 4.5 [3].

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$, знайдемо $n_0 = n_0\left(\varepsilon\right) \in \boldsymbol{N}$ таке, що $\sum\left\{\kappa_\nu : \nu \in M_\mu,\, \nu \leq n_0\right\} \geq \delta_\mu - \varepsilon$.

Відповідно до леми 3 маємо

$$m\left(r,\vec{a}_{\mu},\vec{G}\right)\geq\sum\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'_{\nu}(r)}\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\cdot\vec{a}_{\mu}\right|}d\varphi:\nu\in M_{\mu},\,\nu\leq n_0\right\}+O(1)\geq$$

$$\geq\left\{\sum\left\{\kappa_{\nu}:\nu\in M_{\mu},\,\nu\leq n_0\right\}+o(1)\right\}e^{r}\left(2\pi^3r\right)^{-1/2}\geq\left\{\delta_{\mu}-\varepsilon+o(1)\right\}e^{r}\left(2\pi^3r\right)^{-1/2},\quad r\to\infty.$$

Звідси, оскільки ε довільне, отримуємо

$$m\left(r,\vec{a}_{\mu},\vec{G}\right)\geq\left\{\delta_{\mu}+o(1)\right\}e^{r}\left(2\pi^3r\right)^{-1/2},\quad r\to\infty. \tag{21}$$

Порівнюючи (21) та (16), дістаємо (17).

Покажемо, що

$$\delta\left(\vec{a}_{\mu},\,\vec{G}\right)\leq\delta_{\mu}. \tag{22}$$

Для довільного вектора $\vec{a}\in\boldsymbol{S}^{p}$ розглянемо множину M тих чисел $\nu\in\boldsymbol{N}$, для яких $Q_{\nu}\left(z,\,\vec{a}\right)\equiv0$. Очевидно, у випадку $\vec{a}=\vec{a}_{\mu}$ маємо $M=M_{\mu}$; у випадку, коли вектор $\vec{a}$ задовольняє умові 2) оберненої задачі, $M=\varnothing$

Тепер розіб'ємо множину $\boldsymbol{N}\setminus M$ на класи $L_1=L_1\left(\vec{a}\right),\,L_2=L_2\left(\vec{a}\right),\ldots$, такі, що при $n'\in L_j$ та $n''\in L_j$ виконується $Q_{n'}\equiv Q_{n''}$; при $n'\in L_j$ та $n''\in L_s$, $j\neq s$, виконується $Q_{n'}\not\equiv Q_{n''}$. Позначимо $\gamma_j=\sum\left\{\kappa_s:s\in L_j\right\}$, $f(z)=\vec{G}(z)\vec{a}$. Виберемо для фіксованого γ таке $j=j(\gamma)$, щоб $\gamma\in L_j$. Тоді, аналогічно до нерівності (21), отримаємо такі нерівності:

$$m\left(r,Q_{\nu},f\right)\geq\left\{\gamma_j+o(1)\right\}e^{r}\left(2\pi^3r\right)^{-1/2},\quad r\to\infty,$$

$$m\left(r,0,f\right)\geq\left\{\sum\left\{\kappa_s:s\in M\right\}+o(1)\right\}e^{r}\left(2\pi^3r\right)^{-1/2},\quad r\to\infty.$$

Можна показати (див. вправу із [3, п. 4.1]), що зовні множини скінченної довжини виконується

$$\sum_{b\in\Theta}m\left(r,b,f\right)\leq\left\{1+o(1)\right\}T\left(r,f\right),\quad r\to\infty. \tag{23}$$

Тут Θ – деяка скінченна множина многочленів.

Позначимо тепер через $L=L\left(\vec{a}\right)$ множину, яку отримаємо, вибираючи з кожного L_j по одному елементу. Відповідно до вибору L_j тоді всі многочлени Q_{ν}, $\nu\in L$ – різні. Тому, враховуючи нерівність (23), маємо

$$m\left(r,0,f\right)+\sum\left\{m\left(r,Q_{\nu},f\right):\nu\in L,\,\nu\leq N_0\right\}\leq\left\{1+o(1)\right\}T\left(r,f\right),\quad r\to\infty. \tag{24}$$

Тут $N_0=N_0(\varepsilon)$ для довільного ε розглядаємо таким, щоб виконувалась нерівність

$\sum\{\gamma_\nu : \nu \in L,\, \nu \le N_0\} > \sum_{\nu\in L}\gamma_\nu - \varepsilon$. Тоді з (24) випливає, що

$$\left\{\sum_{\nu\in L}\gamma_\nu - \varepsilon + o(1)\right\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2} + m(r,0,f) \le \{1+o(1)\}T(r,f), \quad r\to\infty .$$

Тому, оскільки ε – довільне додатне число, маємо

$$\left\{\sum_{\nu\in L}\gamma_\nu + o(1)\right\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2} + m(r,0,f) \le \{1+o(1)\}T(r,f), \quad r\to\infty . \tag{25}$$

Так як функція f має такий самий вигляд, як і кожна з компонент цілої кривої $\vec{G}$, то неважко бачити, що

$$T(r,f) \le \{1+o(1)\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}, \quad r\to\infty . \tag{26}$$

Запишемо таку очевидну рівність для $\vec{a}\in \boldsymbol{S}^p$:

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\cdot\vec{a}\right|}d\varphi + O(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|}d\varphi + O(1) =$$

$$= T\left(r,\vec{G}\right) - T(r,f) + m(r,0,f) + O(1), \quad r\to\infty . \tag{27}$$

Нехай тепер $\vec{a}=\vec{a}_\mu$. Тоді, як ми відзначали, $M = M_\mu$, і тому

$$\sum_{\nu\in L}\gamma_\nu = \sum_{\nu\in L}\sum_{k\in L_\nu}\kappa_k = \sum_{k\notin M_\mu}\kappa_k = \sum_{k\in \boldsymbol{N}}\kappa_k - \sum_{k\in M_\mu}\kappa_k = 1-\delta_\mu .$$

Підставляючи це в (25) і враховуючи (21) та (26), отримаємо, що

$$T\left(r,f_\mu\right) = \{1+o(1)\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}, \quad r\to\infty ,$$

$$m\left(r,0,f_\mu\right) = \{\delta_\mu + o(1)\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}, \quad r\to\infty ,$$

де $f_\mu = \vec{G}\cdot\vec{a}_\mu$. Звідси та із (26), (21), (27) випливає, що

$$T\left(r,\vec{G}\right) = \{1+o(1)\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}, \quad r\to\infty , \tag{28}$$

$$m\left(r,\vec{a}_\mu,\vec{G}\right) = \{\delta_\mu + o(1)\} e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}, \quad r\to\infty .$$

З цих двох рівностей випливає перше твердження оберненої задачі. Щоб довести друге твердження, досить зауважити, що якщо вектор $\vec{a}\in\boldsymbol{S}^p\setminus A$ другій умові оберненої задачі, то $\bigcup_j L_j = \boldsymbol{N}$, і тому $\sum_{\nu\in L}\gamma_\nu = \sum_{\nu\in L}\sum_{k\in L_\nu}\kappa_k = \sum_{k\notin M_\mu}\kappa_k = \sum_{k\in\boldsymbol{N}}\kappa_k = 1$. Тоді, відповідно до (25) та (26), маємо:

$$m(r,0,f) = o\left\{e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}\right\}, \quad r\to\infty ,$$

$$T(r,f)=\{1+o(1)\}e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}, \quad r\to\infty .$$

Підставляючи ці рівності в (27) та враховуючи (28), отримаємо

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)=o\left\{e^r\left(2\pi^3 r\right)^{-1/2}\right\}, \quad r\to\infty ,$$

звідки випливає друге твердження оберненої задачі.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые / В.П. Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
2. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves / H. Weyl, J. Weyl. – Prinseton: Prinseton Univ. Press, 1943. – 531 p.
3. Хейман У. Мероморфные функции /У. Хейман. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
4. Хуссайн М. О дефектах и величинах отклонений целых кривых / М. Хуссайн // В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков, 1974. – Вып. 20. – С. 161-170.

Стаття надійшла до редакційної колегії 15.11.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

SOLVING OF INVERSE PROBLEM OF THEORY OF DISTRIBUTING VALUES FOR WHOLE CURVES

I. Ye. Ovchar, Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (3422) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

At insignificant limitation the decision of reverse task of theory of distributing of values is resulted for the whole curves of endless order.

Key words: *whole curve, description of growth, function of approaching, Nevanline imperfect vector, size of defect, possible system of vectors*.