

УДК 534.143

**ЗБУДЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ
ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ЇХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ
СПЕКТРАЛЬНОГО ІМПЕДАНСУ****Ю. Й. Стрілецький¹, Р. Б. Дунець²**

¹Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: tomental@ukr.net

²Національний університет "Львівська політехніка";
79013, Львів, вул. Ст. Бандери, 28; e-mail: roman.b.dunets@lpnu.ua

Запропоновано метод дослідження механічних коливальних систем із розподіленими параметрами за їх спектральним імпедансом, який шукається за відношенням сигналів збудної сили до швидкості переміщення. Розроблено метод адаптивного налаштування сигналу збудної сили із використанням шумоподібного сигналу, шляхом аналізу відклику системи на це збудження і посилення його впливу. Проведено числовий і натурний експеримент для збудження механічних коливань на прикладі натягнутої металевої струни.

Ключові слова: спектральний імпеданс, сила Ампера, механічні моди, шумоподібний сигнал, натягнута струна.

Вступ. Математичні та експериментальні дослідження коливань різноманітних фізичних систем проводяться для пояснення явищ, прогнозування системних реакцій, характеристик, для сприяння розробці систем та демонстрації їх живучості. Широко такі методи використовуються для діагностики технічного стану систем і механізмів [1].

Огляд літературних джерел. Для дослідження механічних систем використовуються аналітичні і енергетичні методи. Один із інформативних методів дослідження та ідентифікації механічних об'єктів є знаходження власних коливань об'єкту [2]. При дослідженні структури системи використовуються також різноманітні методи статистичної обробки [3].

Випадкові коливання вивчалися з початку минулого століття. Альберт Ейнштейн (1905) здійснив перший математичний аналіз, який можна було б розглянути як випадковий аналіз вібрації, коли він моделював броунівський рух часток, суспендованих у рідкому середовищі. Числові дослідження, результати яких пізніше будуть використані для пояснення випадкової вібрації механічних системи проводилися протягом десятиліть, а в 1930 році Норберт Вайнер формально визначив спектральну щільність стаціонарного випадкового процесу, тобто випадковий процес у тимчасовому стаціонарному стані [4]. Спектральна

щільність є важливим кількісним описом стаціонарних випадкових процесів, що використовуються сьогодні в дослідженнях.

При аналізі системи формується сукупність збуджуючих сигналів, які взаємодіючи із досліджуваною структурою формують інформативний відклик [5]. Кожна із частин механічної системи може розглядатися як чинник хвильового рівняння, яке пов'язує між собою потенційну і кінетичну енергій динамічного процесу. В залежності від фізичної суті варто по різному підходити до розгляду цих параметрів як розподілених чи зосереджених.

Метою дослідження є розробка методу формування сигналу для збудження коливань механічних систем із розподіленими параметрами, шляхом адаптивного налаштування коефіцієнтів фільтра та з використанням шумоподібного сигналу, для підвищення точності визначення спектрального імпедансу цієї механічної системи.

Викладення основного матеріалу.

Властивості механічної системи в повній мірі описуються хвильовим рівнянням, яке визначає поведінку цієї системи в залежності від впливу зовнішніх сил. В залежності від конструкції системи рівняння може приймати складні форми. Аналітичний розв'язок таких рівнянь утруднений. Дослідники описують їх для випадків простих форм і наводять розв'язки в довідниковій літературі [6]. Дослідження динамічної поведінки системи на практиці проводять одним із методів натурних досліджень, які називають методом динамічного опору [7]. Для дослідження механічної коливальної системи розглянемо натягнуту струну, яка жорстко закріплена між двома точками (рис. 1).

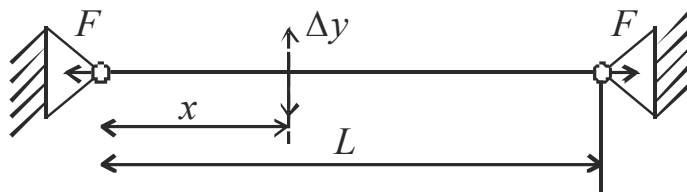


Рис. 1. Схема натягу струни між двома нерухомими точками

Вимушені коливання натягнутої струни при збудженні гармонійною силою описуються рівнянням [8]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\xi \frac{\partial y}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x) \cdot e^{j\omega t}, \quad (1)$$

де $\xi = \frac{r}{2\rho}$ – коефіцієнт затухання коливань струни, $c_0 = \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}$ – фазова швидкість поширення згинаючих коливань в струні, $f(x) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial x \cdot \rho}$ – прискорення, що отримує елемент струни при дії на неї сили $p(x,t) \cdot \partial x$.

Розв'язком даного рівняння є сума розв'язків для коливань струни в усталеному і в перехідному режимі. У перехідному режимі розв'язком є множина затухаючих гармонійних коливань із параметрами, що визначаються геометричними розмірами струни [8]:

$$y_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\xi_m t} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot A_m \cdot \cos(\omega_m t - \varphi_m), \quad (2)$$

де $\omega_m = \frac{m\pi c}{L}$ – частота коливання m моди, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – швидкість по-
вздожніх хвиль, E – коефіцієнт пружності матеріалу струни, A_m –
амплітуда моди коливання, φ_m – фаза моди коливання. Амплітуди мод
залежать від початкових умов.

Після проходження перехідного процесу ($t \gg \tau = \frac{1}{\xi}$) власні коли-
ваннями струни згаснуть і залишаться тільки ті коливання, які викли-
кані збурною силою. Відповідно другим розв'язком є

$$y_2(x, t) = f(x) \cdot e^{j\omega t}. \quad (3)$$

Підставивши цю функцію у диференціальне рівняння (1) отрима-
ємо:

$$\frac{\partial^2 [y(x) \cdot e^{j\omega t}]}{\partial t^2} + 2\xi \frac{\partial [y(x) \cdot e^{j\omega t}]}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x) \cdot e^{j\omega t}, \quad (4)$$

звідки

$$(-\omega^2 + 2\xi \cdot j \cdot \omega) \cdot y(x) e^{j\omega t} - c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x) \cdot e^{j\omega t}. \quad (5)$$

Після спрощення отримаємо :

$$(-\omega^2 + 2\xi \cdot j \cdot \omega) y(x) - c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - f(x) = 0. \quad (6)$$

Розв'язок даного рівняння для $y(x)$ може бути знайдено у виді
ряду:

$$y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\left(\frac{m\pi c_0}{l}\right)^2 - \omega^2 + j2\xi\omega} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \right], \quad (7)$$

де f_m – коефіцієнти, що визначають частку збурної сили, розкладеної
по кожній із мод. Враховуючи, що $\left(\frac{m\pi c_0}{L}\right)^2 = \omega_m^2$, можна записати ви-
раз для пошуку часової залежності амплітуди коливання струни при
збурненні її зовнішньою силою із частотою ω :

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + j2\xi_m\omega} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (8)$$

Маючи залежність для переміщення струни в часі можна знайти швидкість її переміщення, враховуючи, що швидкість є похідною від переміщення по часу:

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\omega \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + j2\xi_m\omega} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (9)$$

Оскільки імпеданс є відношенням сили до швидкості

$$z_m = \frac{\partial f_m}{\partial v_m}, \quad (10)$$

то можна виділити складову, яка описує реакцію струни на зовнішнє гармонійне збурення для m моди у виді

$$z_m(x, \omega) = \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\frac{\omega_m^2}{\omega} - \omega + j2\xi_m}. \quad (11)$$

З даної формули видно, що імпеданс на m моді буде залежати від положення прикладання збурної сили x , частоти моди ω_m і затухання на цій моді ξ_m .

Таким чином, властивості струни можна визначити за допомогою імпедансу, знайденого на частотах її мод.

Сила, прикладена для збурення струни, розподіляється по всіх модах, в точці дії сумарної сили $f(x, t)$ струна буде здійснювати переміщення. Причому в цій точці амплітуди всіх мод будуть рівні, оскільки вони визначаються положенням струни в просторі.

Щоб дослідити поведінку коливальної системи в цілому необхідно формувати сукупність гармонійних сил, які, взаємодіючи зі струною, призведуть до появи швидкості її переміщення. В залежності від затухання на певній моді змінюється добротність. Сила прикладена до струни викличе приріст швидкості пропорційний до імпедансу на цій частоті. Тому зі зменшенням ξ_m частота збурної сили повинна якомога точніше співпадати з ω_m , інакше імпеданс на цій моді буде близький до 0 і прикладена сила не призведе до зростання швидкості.

Використовуючи широкосмуговий сигнал сили прикладеної до струни можна збурити всі моди одночасно і тим самим пришвидшити дослідження імпедансу. Є багато способів формування широкосмугових сигналів. Для досліджень коливальних систем частот використовується стрибкоподібна форма збурної сили. Однак внаслідок короткочасності впливу збурної сили буде отримано обмежену тривалість коли-

вань у режимі вільних коливань, які складно досліджувати через їх швидкоплинність. Для дослідження використано шумоподібний сигнал, який шляхом періодичного поповнення енергії в контурі підтримує тривале коливання [9]. Недоліком такого сигналу є ймовірнісна поява певної спектральної складової. Тому було розроблено адаптивний алгоритм формування сигналу збурення, який на основі шумоподібного сигналу і з урахуванням відклику системи, формує сигнал збурення із оптимальним амплітудним спектром для точного виділення імпедансу.

Особливістю пошуку імпедансу струни у виді (11) є те, що він визначається у динамічному режимі згідно (10). Оскільки в початковий момент часу швидкість всіх точок рівна 0, то існує невизначеність. На початку дослідження до струни необхідно прикласти збурну силу для збільшення її швидкості. У запропонованому підході пошуку імпедансу формуємо такий сигнал збурення, при якому сумарна швидкість по всіх модах буде мати наперед задане значення.

Для надання зміщення струні використовується сила Ампера. При протіканні струму струною, частина якої знаходиться в магнітному полі, діє механічна сила, що призводить до зміщення струни перпендикулярно до ліній напруженості магнітного поля. При цьому рух струни в магнітному полі викликає силу Лоренца, яка виникає на кінцях струни і призводить до появи електрорушійної сили [10]. Тому механічна сила формується струмом, а швидкість переміщення струни визначається напругою. Амплітуда напруги є функцією швидкості і струму, який визначає силу взаємодії струни із магнітним полем і параметрами коливної системи. Ці параметри задаються коефіцієнтами у виді максимальної енергії струму I_m , який використовується для збудження коливань і коефіцієнта відповідності між струмом і напругою, який виражає співвідношення між силою і швидкістю k_z . Процес збудження проходить шляхом цифрової обробки дискретизованих даних. Частота дискретизації визначається максимальною досліджуваною частотою коливання, а кількість точок дискретизації N – роздільною здатністю спектральної щільності збурюваних коливань.

У результаті роботи алгоритму формується набір коефіцієнтів по кожній із спектральних складових збурюючого сигналу. Вплив цих коефіцієнтів на вхідний шумоподібний сигнал аналогічний до фільтрування. Чим менша варіативність конкретної спектральної складової у сигналі відклику, тим менший коефіцієнт фільтра.

На початку дослідження середня швидкість визначається напругою

$$\bar{U} = 0. \quad (12)$$

Нульові також є усі сигнали відклику, представлені дискретним набором, залежним від індексу i

$$u_i = 0, \quad i \in [0, N - 1]. \quad (13)$$

Формується шумоподібний сигнал із нормальним законом розподілу амплітуди і нульовим математичним сподіванням

$$s_i \in [-1,1]. \quad (14)$$

Для цього сигналу визначається СКВ

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s_i^2}. \quad (15)$$

Коефіцієнт корекції випадкового сигналу шукається із міркування, що

$$Kn = \frac{U_m - \bar{U}}{k_z \cdot RMS}, \quad (16)$$

де U_m – максимальне значення напруги, яка пропорційна максимальній швидкості переміщення струни.

Після цього шукається збуджуючий сигнал струму за формулою

$$i_i = Kn \cdot s_i + \frac{u_i}{k_z}. \quad (17)$$

Струм подається на досліджувану ланку із імпедансом Z . Проходячи через неї формується спад напруги $u_z(t)$, який дискретизується у набір u_{z_i} .

Використовуючи ці дискретні значення шукаємо спектр сигналу відклику

$$U_{zn} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} u_{zk} \cdot e^{-2\pi \cdot j \cdot \frac{k}{N} n}. \quad (18)$$

Усі складові спектру залежно від віддаленості до досліджуваної частоти дають свій внесок у коливання. Відклик пов'язаний із зростанням швидкості переміщення струни на різних частотах. Спектр при дії шумоподібного сигналу збурення має випадковий вигляд. Для подальшої обробки спектр відклику усереднюється резонансною характеристикою виду

$$K(\omega) = \frac{\omega_r^2}{\omega \cdot \omega_r + j \cdot Q \cdot (\omega^2 - \omega_r^2)}, \quad (19)$$

де Q – добротність усереднення.

Усереднення проводиться за допомогою наступної формули

$$U_{AZn} = \sum_{k=0}^{N/2-1} U_{zk} \cdot \frac{n^2}{k \cdot n + j \cdot Q \cdot (k^2 - n^2)}, \quad n \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]. \quad (20)$$

Для кожної із спектральних складових шукається дисперсія значень в часі, отримана внаслідок накопичення результатів попереднього підбору, за формулою

$$DU_{Zn} = \sqrt{\frac{1}{M^2} \sum_{q=0}^{M-1} [U_{Zn} - U_{Zn,q}]^2}, \quad (21)$$

де $\overline{U_{Zn}}$ – середнє значення спектральної складової для M послідовно проведених циклів збудження, $U_{Zn,q}$ – амплітуда спектральної складової q -того циклу збудження.

За знайденим спектром для кожної із спектральних складових шукається середнє значення амплітуди

$$U_{OZn,q} = (1-a) \cdot U_{AZn} + a \cdot U_{OZn,q-1}, \quad (22)$$

де a – коефіцієнт усереднення, який визначає час наростання амплітуди коливання.

Далі шукається зворотнє перетворення Фур'є із використанням отриманого спектру

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_{OZk} \cdot e^{2\pi j \cdot \frac{k}{N} n}. \quad (23)$$

Часова форма струму збурення визначається за формулою

$$\bar{I} = \frac{1}{k_z} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2}. \quad (24)$$

Збурення для конкретної частоти закінчується за умови виконання однієї із умов:

- дисперсія на даній частоті досягла мінімуму ;
- пройшла максимальна кількість циклів;
- середнє значення амплітуди перевищує задані межі.

За інших умов дослідження повторюють в межах (14)-(24).

Результати дослідження. Для дослідження роботи описаного методу підбору сигналу збурення було проведено числовий експеримент в ході якого було підібрано відповідні параметри.

Максимальнє значення напруги було прийнято $U_m = 2$.

Імпеданс на вибраній частоті прийнято $Z = 1$.

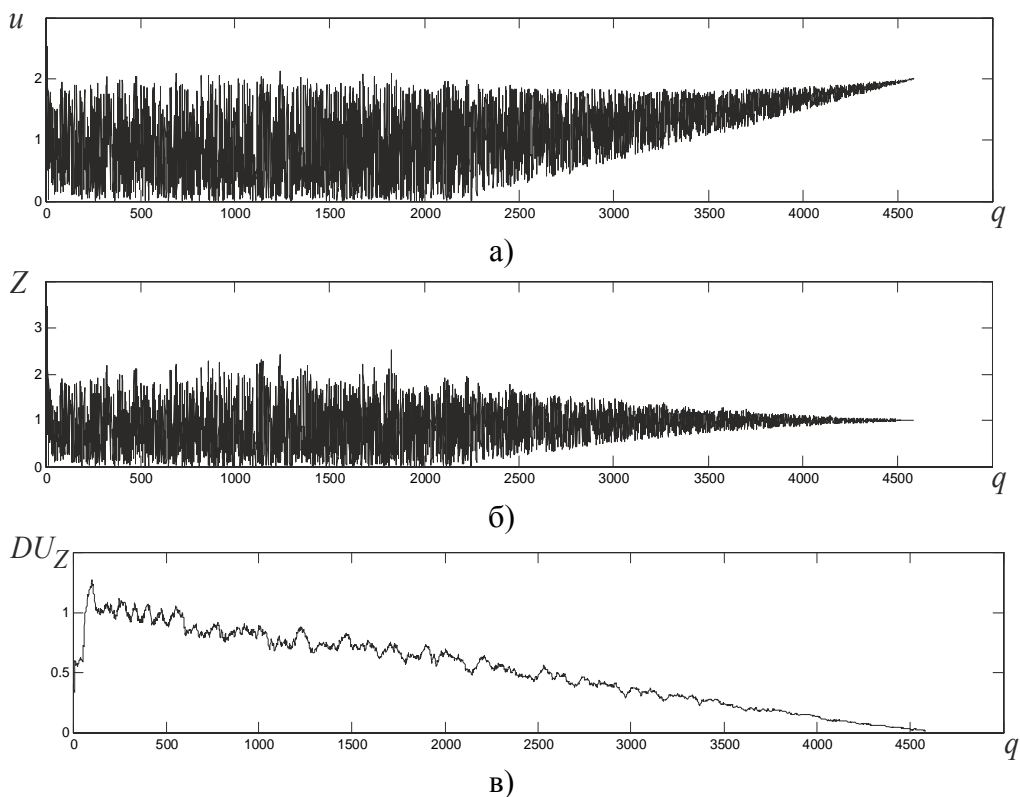
Коефіцієнт співвідношення сили і швидкості $k_z = 0.7$.

Коефіцієнт усереднення $a = 0.993$.

Результати числового експерименту наведено на рис. 2.

Використовуючи розроблений метод було проведено збурення коливань струни в магнітному полі. Власні частоти струни досліджувалися в межах до 10 кГц. Тому частота дискретизації вибрана 22 кГц. Обробка здійснювалася кадрами по $N=2000$.

Структурну схему пристрою для підбору форми сигналу збурення струни наведено на рис. 3. Вимірювання напруги, пропорційної до швидкості переміщення струни і струму збурення, здійснювалося аналого-цифровими перетворювачами ADC1 і ADC2.



- а) залежність напруги, пропорційної до швидкості переміщення струни,
 б) результати проміжного визначення імпедансу,
 в) дисперсія амплітуди відклику

Рис. 2. Результати числового експерименту з підбору сигналу збудрення однієї з гармонік

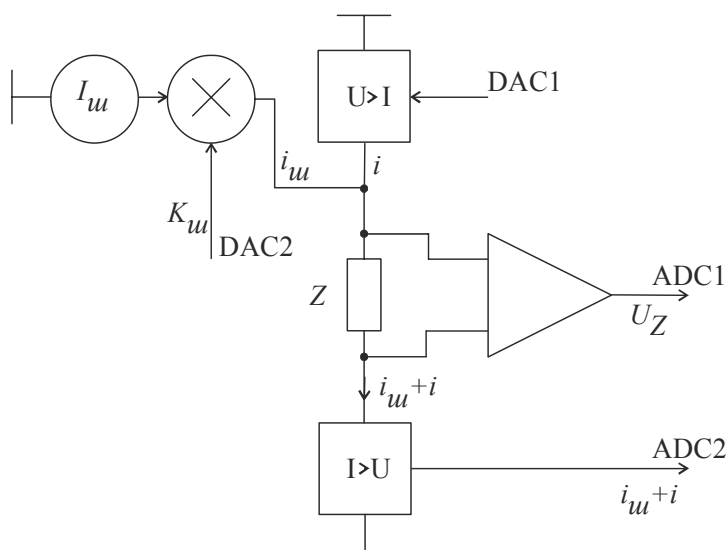


Рис. 3. Структурна схема пристрою для збудрення коливань струни

Сигнал збурення подавався на перетворювач напруга-струм із виходу цифро-аналогового перетворювача DAC1. Шумоподібний сигнал формувався фізичним джерелом шуму $I_{ш}$, амплітуду якого контролювала напруга із виходу DAC2.

Результати зростання швидкості коливання струни внаслідок підбору параметрів збуджуючого сигналу наведено на рис. 4.

Із наведеного графіку видно, що на початку збурення випадковий сигнал формував випадкову форму швидкості струни, поки не з'явилися моди. Після чого сигнал збурення було утримано поки швидкість не зросла до усталеного значення.

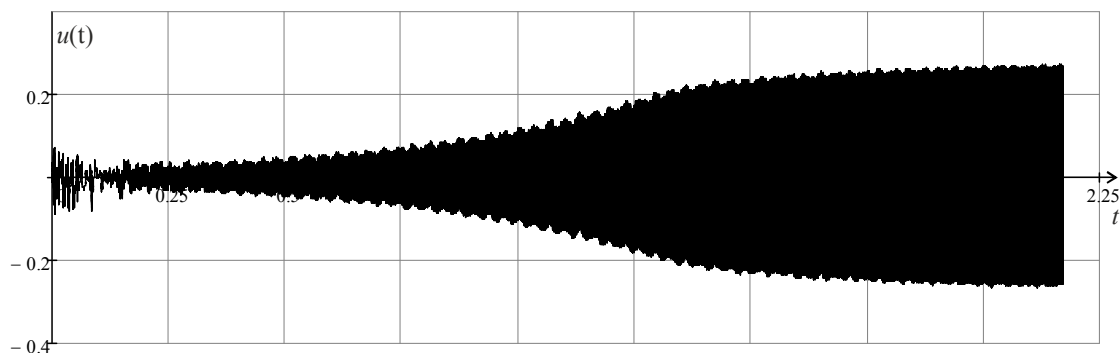


Рис. 4. Результати збурення коливання струни

Висновок. Розроблено метод дослідження власних коливань механічної системи на прикладі натягнутої металеві струни шляхом поступового налаштування коефіцієнтів фільтра, який з використанням шумоподібного сигналу формує спектр збуджуючого сигналу, що дало можливість підтримувати моди струни тривалий час і збільшити точність вимірювання їх складових.

Запропоновано послідовність обчислень для налаштування сигналу збурення і введено критерії закінчення процесу налаштування. Розроблений метод дослідження перевірено за допомогою числового експерименту і з використанням лабораторних досліджень при збуренні металеві натягнутої струни.

Література

1. Стрілецький Ю.Й. Спосіб формування множини оціночних сигналів для дослідження функціонального простору об'єкта / Ю.Й. Стрілецький, В.А. Ровінський // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання. Міжнародна науково-практична конф. 15-20 травня 2017. Івано-Франківськ. ст.4-7.
2. Identification of Nonlinear vibration structures. II: Application / S.F. Masri, R.K. Miller, A.F. Saud, T.K. Caughey // Trans. ASME J. Appl. Mech. 109. – 1987. p. 923-929

3. Beck J.L. Statistical system identification of structures / J.L. Beck // Proc. 5th int. conf. Structural Safety and Reliability. ASCE, New York –1990.
4. Wiener N. Nonlinear problems in Random theory / N. Wiener // M.I.T. Press. Massachusetts institute of technology Cambridge. Massachusetts – 1958. – 132 p.
5. Identification of Nonlinear vibration structures. I: Formulation / S.F. Masri, R.K. Miller, A.F. Saud, T.K. Caughey // Trans. ASME J. Appl. Mech. 109. – 1987. p. 918-922
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах : Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.
7. Нашиф А. Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
8. Лепендин Л.Ф. Акустика / Л.Ф. Лепендин. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.
9. Горелик В.С. Колебания и волны / В.С. Горелик / Гос. изд. физ.-мат. литературы. – М., 1959. – 572 с.
10. Стрілецький Ю.Й. Використання коливань струни для збудження хвиль у металі / Ю.Й. Стрілецький // Методи та прилади контролю якості. – 2016. – №37. – С. 79-84.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.09.2017 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., проф. **Мойсишиним В.М.**, д.т.н., професором **Олійником А.П.***

THE EXCITATION OF WAVES IN MECHANICAL OSCILLATION SYSTEMS FOR DISCOVER THEIR PROPERTIES USING THE SPECTRAL IMPEDANCE

Yu. Yo. Streletsky¹, R. B. Dunets²

¹*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathian str., 15;
e-mail: momental@ukr.net,*

²*National Lviv Polytechnic University; 79013, Lviv, Bandera str., 28;
e-mail: roman.b.dunets@lpnu.ua*

The method of research of mechanical vibrational systems with distributed parameters according to their spectral impedance, which is sought by the ratio of the signals of the force of force to the speed of displacement, is proposed. Are developed the method of adaptive adjustment of the signal of excitation force using a random noise signal, by analyzing the system's response to this excitation and increasing its influence.

A numerical and full-scale experiment was conducted to excite mechanical vibrations on an example of a stretched metal string.

Key words: *spectral impedance, Ampere's force, mechanical mods, random noise signal, stretched string.*