МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.555

КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

О. Б. Скасків[1], О. Ю. Тарновецька[2], Т. М. Сало[3]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка;*
79001, Львів, вул. Університетська 1; e-mail: olskask@gmail.com
[2]*Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут»;*
58018, Чернівці, вул. Головна, 203-а; e-mail: savinskaolga@gmail.com
[3]*Національний університет "Львівська політехніка";*
79013, Львів, вул. С.Бандери 12; e-mail: tetyan.salo@gmail.com

У статті отримані достатні та необхідні умови для того, щоби ціла функція від декількох комплексних змінних належала до узагальнених класів збіжності.

Ключові слова: *класи збіжності, цілі функції, декілька комплексних змінних*

1. Вступ. G. Valiron [1, с. 18] довів таке твердження: *якщо ціла функція*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

має порядок

$$\rho_f := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \rho_f \in \mathbb{R}_+ := (0,+\infty),$$

де $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$ *, і належить до класу збіжності, тобто,*

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty, \quad \rho = \rho_f, \tag{1}$$

то

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty, \quad \rho = \rho_f. \tag{2}$$

Зауважимо, що оскільки

$$(\forall r > 0): \mu_f(r) := \max\{|a_n| r^n : n \ge 0\} \le M_f(r) \le 2\mu_f(2r),$$

то умова (1) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty, \quad \rho = \rho_f. \tag{3}$$

Нехай L − клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій $l : [0,+\infty) \to \mathrm{R}_+$; L_1 − підклас класу L, в який входять функції l такі, що $l((1+o(1))x) = (1+o(1))l(x)$ $(x \to +\infty)$, а L_2 − підклас, в який входять функції $l \in L$ такі, що $l(x+O(1)) = O(l(x))$ $(x \to +\infty)$.

Зрозуміло, що $L_1 \subset L_2$. Справді, якщо $l \in L_1$, то

$$l(x+O(1)) = l((1+o(1))x) = (1+o(1))l(x) = O(l(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Для $\alpha, \beta \in L$ скажемо, що ціла функція $f \in \mathrm{E}_{\alpha\beta}$ і відповідно $f \in \underline{\mathrm{E}}_{\alpha\beta}$, якщо

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln M_f(r))}{\alpha(\ln r)} d\ln r < +\infty, \quad \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{\alpha(\ln M_f(r))} d\ln r < +\infty,$$

відповідно. З результату, доведеного О.М. Мулявою [2, Теорема 1] (У випадку $\alpha(x) \equiv x$ див. також [3, Теорема 1]) для цілих рядів Діріхле, випливає таке твердження.

Теорема 1 [2]. *Нехай $\alpha \in L$ вгнута функція на $[x_0,+\infty)$, $\alpha(e^x) \in L_1$, а функція $\beta \in L_1$ задовольняє умову $x\beta'(x)/\beta(x) \ge h > 0$ на $[x_0,+\infty)$ і*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty. \tag{4}$$

Для того, щоб ціла функція f належала до узагальненого класу збіжності $\mathrm{E}_{\alpha\beta}$ необхідно, а у випадку $|a_k|/|a_{k+1}|$ зростає до $+\infty$ при $k_0 \le k \to \infty$ і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha(k) - \alpha(k-1))\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|a_k|}\right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{dt}{\beta(t)}. \tag{5}$$

2. Основний результат. Для цілих функцій $F : \mathrm{C}^p \to \mathrm{C}$, $p \ge 1$, від багатьох комплексних змінних результати про їхню належність до класів збіжності отримано у статті [4]. Власне, перш, ніж перейти до відповідних формулювань, наведемо необхідні для цього поняття і позначення.

Нехай $(\mathbf{G}_R)_{R\geq 0}$ − система повних кратно-кругових областей, що є вичерпанням простору C^p, тобто, така система областей, що задовольняє умови:

i) $\bigcup\limits_{R\geq 0}\mathbf{G}_R=\mathsf{C}^p$;

ii) $(\forall R_1<R_2):G_{R_1}\subset G_{R_2}$;

iii) (*повна область*) $(z_1,\ldots,z_p)\in G_1\Leftrightarrow(\forall R>0):(R\,z_1,\ldots,R\,z_p)\in\mathbf{G}_R$;

iv) (*кратно-кругова область*) $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbf{G}_R\Rightarrow(\forall(\theta_1,\ldots,\theta_p)\in\mathsf{R}^p)$: $(z_1e^{i\theta_1},\ldots,z_pe^{i\theta_p})\in\mathbf{G}_R$.

Наступні системи областей, які часто зустрічаються в математичній літературі, є прикладами таких вичерпань:

$$\mathbf{G}_R=\mathsf{B}_p(R):=\{z=(z_1,\ldots,z_p)\in\mathsf{C}^p:|\,z\,|:=\sqrt{|\,z_1\,|^2+\ldots+|\,z_p\,|^2}<R\},$$

$$\mathbf{G}_R=C_p(R):=\{z=(z_1,\ldots,z_p)\in\mathsf{C}^p:|\,z_1\,|<R,\ldots,|\,z_p\,|<R\}$$

$$\mathbf{G}_R=\Pi_p(R):=\{z=(z_1,\ldots,z_p)\in\mathsf{C}^p:|\,z_1\,|+\ldots+|\,z_p\,|<R\}.$$

Нехай $\mathbf{G}$ − кратно-кругова область в C^p, через $|G|$ позначимо множину з R^p_+, в яку переходить $\mathbf{G}$ при відображенні $r=(r_1,\ldots,r_p)=(|\,z_1\,|,\ldots,|\,z_p\,|):\mathbf{G}\to\mathsf{R}^p_+$. Множину $|G|$ називатимемо ([5, с. 38]) *зображенням* кратно-кругової області $\mathbf{G}$ в абсолютному гіпероктанті R^p_+.

Множина $E\subset\mathsf{R}^p_+$ називається ([5, с. 38]) *повною областю в* R^p_+, якщо разом з кожною точкою $r^0=(r_1^0,\ldots,r_p^0)\in E$ до множини E належить кожна точка $r=(r_1,\ldots,r_p),\,0\leq r_j\leq r_j^0\ (1\leq j\leq p)$ і множина E не містить точок замикання свого доповнення в R_+.

Зауваження 1. 1) В [5, с. 38] відзначається, що зображення кратно-кругової області $\mathbf{G}\subset\mathsf{C}^p$ в абсолютному гіпероктанті R^p_+ є повною областю в R^p_+.

2) Для кожної пари $G^{(1)},G^{(2)}$ повних областей в R^p_+ існують $\alpha>0,\beta>0$ такі, що ([5, с. 173])

$$G^{(1)}_\alpha\subset G^{(2)}_1\subset G^{(1)}_\beta.$$

Якщо взяти $G^{(1)}=|\,C_p(1)\,|$, $G^{(2)}_1=|\,G_1\,|$ то звідси отримаємо, що $(\exists l>0,\exists L>0)$:

$$|\,C_p(l)\,|=\{r:r_1<l,\ldots,r_p<l\}\subset|\,G_1\,|\subset|\,C_p(L)\,|=\{r:r_1<L,\ldots,r_p<L\}.$$

Позначимо

$$d_G(k_1,\ldots,k_p)=\max\{|\,z_1\,|^{k_1}\ldots|\,z_p\,|^{k_p}:z\in\overline{\mathbf{G}}\},\,\mathbf{G}:=\mathbf{G}_1.$$

Зрозуміло, що

$$d_G(k_1,\dots,k_p)=\max\{r_1^{k_1}\dots r_p^{k_p} : r\in|\overline{G}|\}.$$

Нехай E^p − клас − цілих функцій $f:\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}$ зображених кратним степеневим рядом вигляду

$$f(z)=f(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1+\dots+k_p=0}^{+\infty} a_{k_1,\dots,k_p} z_1^{k_1}\dots z_p^{k_p}. \qquad (6)$$

Для $R>0$ і функції $f\in\mathrm{E}^p$ позначимо

$$M_G(R)=M_G(R,f)=\max\{|f(z)|: z\in\overline{\mathbf{G}}_R\},$$

$$\mu_G(R,f)=\max\{|a_{k_1,\dots,k_p} z_1^{k_1}\dots z_p^{k_p}|: z\in\overline{\mathbf{G}}_R (k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}_+^p\}$$

і розглянемо класи збіжності інтегралів вигляду

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{\alpha(\ln M_G(R,f))}{\beta(\ln R)}d\ln R<+\infty, \qquad (7)$$

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{\beta(\ln R)}{\alpha(\ln M_G(R,f))}d\ln R<+\infty, \qquad (8)$$

де $\alpha\in L$ та $\beta\in L$. Через $\mathrm{E}_{\alpha\beta}^p$ позначимо клас цілих функцій з E^p, що задовольняють умову (7), а через $\underline{\mathrm{E}}_{\alpha\beta}^n$ клас цілих функцій з E^p, що задовольняють умову (8).

У статті [4] встановлюються умови належності цілих функцій від багатьох змінних до класу $\mathrm{E}_{\alpha\beta}^p$. Стосовно класу вичерпань системою повних кратно-кругових областей, які там розглядаються, в [4, с. $68_{1\text{-}2}$] написано таке: “... and suppose that if $Z=(z_1,z_2,\dots,z_p)\in\overline{\mathbf{G}}$ then $|z_j|\ge l>0$ for all $j=1,\dots,p$”, тобто, “... і припустимо, що якщо $Z=(z_1,z_2,\dots,z_p)\in\overline{\mathbf{G}}$, то $|z_j|\ge l>0$ для всіх $j=1,\dots,p$”. Це є додаткова умова на клас вичерпань простору, що розглядаються При цьому у наведеному в статті доведенні, вона істотно використовується. З одного боку, тут наявна описка і малося, мабуть, на увазі, що замість $Z=(z_1,z_2,\dots,z_p)\in\overline{\mathbf{G}}$ слід написати $Z=(z_1,z_2,\dots,z_p)\in\partial\mathbf{G}$ (власне, так і є у доведенні). Проте для наведених нами тут вичерпань областями $\Pi_p(R),\mathrm{B}_p(R),C_p(R)$, як щойно сформульована умова зі статті [4], так і її “заміна” на слабшу умову, очевидно, не виконуються. Зрештою, міркуючи за схемою з [5, с. 173] переконаємося, що твердження наступної теореми з [4] є правильним без додаткових припущень стосовно вичерпання системою повних кратно-кругових областей. Доведення цього факту і є метою даного повідомлення.

Теорема 2. *Нехай* $f \in \mathrm{E}^p$ *і припустимо, що функції* α, β *такі, як в теоремі 1. Для того, щоб* $f \in \mathrm{E}^p_{\alpha\beta}$ *необхідно, а у випадку, коли* $A_k / A_{k+1} \nearrow +\infty$ *при* $k_0 \le k \to \infty$ *і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(k)-\alpha(k-1))\beta_1\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{A_k}\right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty}\frac{dt}{\beta(t)},$$

$A_k = \max\{|a_K| : \|K\| = k\}$, $K = (k_1, \dots, k_p)$, $\|K\| = k_1 + \dots k_p$.

3. Доведення основного результату.

Зауваження 2. Якщо $\alpha \in L_1$, то [6]

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\alpha(qx)}{\alpha(x)} = c(q) < +\infty$$

для будь-якого $q \in [1, +\infty)$.

Для фіксованих функцій $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ скажемо, що ціла функція $f \in \mathrm{E}^1 := \mathrm{E}$ належить до узагальненого класу збіжності $\mathrm{E}_{\alpha\beta\mu}$, якщо

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{\alpha(\ln\mu(r,f))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty. \tag{9}$$

Зі сказаного вище маємо такі твердження.

Твердження 1. *Для кожної цілої функції* f *і довільних функцій* $\beta \in L$, $\alpha \in L_1$:

1^0. $f \in \mathrm{E}_{\alpha\beta} \Leftrightarrow f \in \mathrm{E}_{\alpha\beta\mu}$,

2^0. $\displaystyle\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\beta(\ln r)}{r\alpha(\ln M_f(r))}dr < +\infty \Leftrightarrow \int_{r_0}^{+\infty}\frac{\beta(\ln r)}{r\alpha(\ln \mu_f(r))}dr < +\infty.$

Твердження 2. *Для кожної цілої функції* $f \in \mathrm{E}^p$ *і будь-яких функцій* $\alpha \in L_2$ *та* $\beta \in L_2$

$$f \in \mathrm{E}^p_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \int_{R_0}^{\infty}\frac{\alpha(\ln\mu_G(R,f))}{\beta(\ln R)}d\ln R < +\infty,$$

$$f \in \underline{\mathrm{E}}^n_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \int_{R_0}^{\infty}\frac{\beta(\ln R)}{\alpha(\ln\mu_G(R,f))}d\ln R < +\infty.$$

Лема 1 [7]. *Нехай* $B_0 = |a_{0,\dots,0}|$, *а для* $k \ge 0$, $R > 0$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_p) \in \mathbb{C}^p$,

$$B_k = \max\{|a_{k_1,\dots,k_p}| d_G(k_1,\dots,k_p) : k_1 + \dots + k_p = k\},$$

$$P_k(\tau_1,\dots,\tau_p) = \sum\nolimits_{k_1+\dots+k_p=k} a_{k_1,\dots,k_p}\tau_1^{k_1}\cdots\tau_p^{k_p},$$

$$F_1(R) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} M_G(1, P_k)R^k.$$

Тоді,

$$B_k \le M_G(1,P_k) \le B_k(k+1)^p,$$

$$\mu_{F_1}(R) = \max\{M_G(1,P_k)R^k : k \ge 0\} \le M_G(R,f) \le F_1(R).$$

Доведення твердження 2. За лемою 1

$$\mu_G(R,F) =$$

$$= \max\{|a_{k_1,\dots,k_p} z_1^{k_1}\dots z_p^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R, K=(k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}_+^p\} =$$

$$= \max\{|a_{k_1,\dots,k_p}| \max\{|z_1^{k_1}\dots z_p^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R,\} : K \in \mathbb{Z}_+^p\} =$$

$$= \max\{|a_{k_1,\dots,k_p}| d_G(k_1,\dots,k_p)R^k : K \in \mathbb{Z}_+^p, \|K\| = k \ge 0\} =$$

$$= \max\{\max\{|a_{k_1,\dots,k_p}| d_G(k_1,\dots,k_p) : K \in \mathbb{Z}_+^p, \|K\| = k\}R^k :$$

$$k \ge 0\} = \max\{B_k R^k : k \ge 0\} \le$$

$$\le \max\{M_G(1,P_k)R^k : k \ge 0\} = \mu_{F_1}(R) \le M_G(R,f),$$

тобто, отримали нерівність Коші. З іншого боку,

$$M_G(R,f) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \sum_{\|K\|=k} |a_{k_1,\dots,k_p}| \max\{|(2z_1)^{k_1}\cdots(2z_p)^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R,\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \sum_{\|K\|=k} |a_{k_1,\dots,k_p}| \max\{|(z_1)^{k_1}\cdots(z_p)^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_{2R},\} \le$$

$$\le \mu_G(2R,F)\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}(k+1)^p = c\mu_G(2R,F),\ c = c(p) < +\infty.$$

Власне, ми довели, що для будь-якого $R > 0$

$$\mu_G(R,F) \le M_G(R,f) \le c\mu_G(2R,F).$$

Звідси негайно отримуємо твердження 2.

Зауваження 3. У доведенні твердження 2 ми встановили тотожну рівність

$$\mu_G(R,F) = \max\{B_k R^k : k \ge 0\}.$$

Безпосередньо з леми 1 отримуємо також таке твердження.

Лема 2. *Нехай* $F_2(R) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k R^k, R > 0.$ *Тоді,*

$$\ln\mu_{F_2}(R) \le \ln\mu_{F_1}(R) \le \max\{\ln B_k + pk + k\ln R : k \ge 0\} =$$

$$= \max\{\ln B_k + k(\ln R + p) : k \ge 0\} = \ln\mu_{F_2}(Re^p)$$

З лем 1 і 2 за допомогою твердження 2 отримуємо таке твердження.

Твердження 3. *Для кожної цілої функції* $f \in \mathrm{E}^p$ *і будь-яких функцій* $\alpha \in L_2$ *та* $\beta \in L_2$

$$F_1 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_2 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_1 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta\mu} \Leftrightarrow F_2 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta\mu},$$

$$F_1 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_2 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_1 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta\mu} \Leftrightarrow F_2 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta\mu}.$$

Зауважимо, що для $\mathbf{G}_R = C_p(R)$ маємо

$$d_{C_p}(k_1,\ldots,k_p) = 1.$$

Твердження 4. *Припустимо, що область* $\mathbf{G}_1$ *є обмеженою. Тоді, існують числа* $l > 0$ *і* $L > 0$ *такі, що*

$$l^k \le d_G(k_1,\ldots,k_p) \le L^k,$$

$$A_k l^k \le B_k \le A_k L^k \quad (k = k_1 + \ldots + k_p \ge 0)$$

де $A_k = \max\{|a_{k_1,\ldots,k_p}| : k_1 + \ldots + k_p = k\}$.

Доведення. За зауваженням 1.2 $(\exists l > 0, L > 0)$:

$$|C_p(l)| = \{r : r_1 < l,\ldots,r_p < l\} \subset |G_1| \subset |C_p(L)| = \{r : r_1 < L,\ldots,r_p < L\}.$$

Тому, враховуючи, що $\max\{r_1^{k_1}\cdots r_p^{k_p} : r \in |C_p(l)|\} = l^k d_{C_p}(k_1,\ldots,k_p) = l^k$, отримуємо

$$l^k \le d_G(k_1,\ldots,k_p) \le L^k.$$

Звідси,

$$A_k l^k \le \max\{a_{k_1,\ldots,k_p} d_G(k_1,\ldots,k_p) : k_1 + \ldots + k_p = k\} = B_k \le A_k L^k.$$

З твердження 4 негайно отримуємо таке твердження.

Твердження 5. *Нехай* $f \in \mathrm{E}^p$, *а*

$$F_2(R) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} B_k R^k, \qquad F_3(R) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} A_k R^k.$$

Припустимо, що область G_1 *є обмеженою. Тоді,*

$$\mu_{F_3}(lR) \le \mu_{F_2}(R) \le \mu_{F_3}(LR),$$

$$F_3(lR) \le F_2(R) \le F_3(LR),$$

де

$$A_k = \max\{|a_K| : \|K\| = k\}, \qquad B_k = \max\{|a_K| d_G(K) : \|K\| = k\}.$$

Безпосередньо з твердження 5, з огляду на зауваження 2, отримуємо таке твердження.

Твердження 6. *Для кожної цілої функції* $f \in \mathrm{E}^p$ *і будь-яких функцій* $\alpha \in L$ *та* $\beta \in L_1$

$$F_2 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_2 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_2 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta\mu} \Leftrightarrow F_3 \in \mathrm{E}^1_{\alpha\beta\mu},$$

$$F_2 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_3 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta} \Leftrightarrow F_2 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta\mu} \Leftrightarrow F_3 \in \underline{\mathrm{E}}^1_{\alpha\beta\mu}.$$

З теореми 1 та твердження 6 негайно отримуємо теорему 2.

4. Про класи збіжності для рядів Діріхле і одна умова типу Гольдберга [8].

Припустимо, що функції $\alpha, \beta \in L$ і розглянемо умови, за яких цілий ряд Діріхле $F \in D(\lambda_+)$ вигляду

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k e^{z\lambda_k}, \quad \lambda_+=(\lambda_k), 0\le\lambda_k\uparrow+\infty,$$

задовольняє умову

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{\beta(x)}{\alpha(\ln\mu(x,F))}dx<+\infty, \quad \mu(x,F)=\max\{|a_k|e^{x\lambda_k}:k\ge 0\}.$$

Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\alpha(x)\equiv\ln x, x>0$. Нехай (a_n^0) коефіцієнти мажоранти Ньютона F_H заданого цілого ряду Діріхле, тобто, такого ряду Діріхле $F_H(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k^0 e^{z\lambda_k}$, що

1) $\sigma_n:=\dfrac{\ln a_{n-1}^0-\ln a_n^0}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}$ зростає до $+\infty(1\le n\uparrow+\infty)$

2) $\mu(x,F)=\mu(x,F_H)=a_n^0e^{x\lambda_n}$ $(\sigma_n,\sigma_{n-1}])$;

3) $(\forall n\ge 0):|a_n|\le a_n^0$.

Зауважимо, що

$$M(x,F)\le F_H(x) \quad (\forall x\in\mathrm{R}).$$

а також, що

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{\beta(x)}{\ln\ln\mu(x,F)}dx=\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d\beta_*(x)}{\ln\ln\mu(x,F)}dx<+\infty, \tag{10}$$

де вжито позначення

$$\beta_*(x)=\int_0^x\beta(t)dt.$$

За критерієм Коші нескладно доводимо, що $\beta_*(x)/\ln\ln\mu(x,F)\to 0$ $(x\to+\infty)$, тому інтегруючи частинами отримуємо

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{\beta(x)}{\ln\ln\mu(x,F)}dx<+\infty=\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d\beta_*(x)}{\ln\mu(x,F)\ln^2\ln\mu(x,F)}.$$

Зауважимо, що $\ln a_n^0=\ln a_{n-1}^0-\sigma_n(\lambda_n-\lambda_{n-1})\le-\sigma_n(\lambda_n-\lambda_{n-1})$, а також

$$\ln a_n^0=-\sum_{k=1}^{n}\sigma_k(\lambda_k-\lambda_{k-1}),$$

тому

$$\ln\mu(\sigma_n,F)=-\sum_{k=1}^{n}\sigma_k(\lambda_k-\lambda_{k-1})+\sigma_n\lambda=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sigma_n-\sigma_k)(\lambda_k-\lambda_{k-1})\ge(\sigma_n-\sigma_{n-1})\lambda_{n-1},$$

$$\ln\mu(\sigma_{n+1},F)=\ln a_{n+1}^0+\sigma_{n+1}\lambda_{n+1}\le-\sigma_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)+\sigma_{n+1}\lambda_{n+1}=\sigma_{n+1}\lambda_n.$$

Звідси

$$\mathrm{T}:=\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d\beta_*(x)}{\ln\mu(x,F)\ln^2\ln\mu(x,F)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{[\sigma_n,\sigma_{n+1})}\frac{\beta_*(x)}{\ln\mu(x,F)\ln^2\ln\mu(x,F)}dx.$$

Звідки отримаємо, що якщо $\mathrm{T} < +\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{\sigma_{n+1}\lambda_n \ln(\sigma_{n+1}\lambda_n)} < +\infty. \tag{11}$$

Якщо ж

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{(\sigma_n - \sigma_{n-1})\lambda_{n-1} \ln((\sigma_n - \sigma_{n-1})\lambda_{n-1})} < +\infty, \tag{12}$$

то $\mathrm{T} < +\infty$. Отже ми довели таке твердження.

Теорема 3. *Для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле $F \in D(\lambda_+)$ виконувалась умова (10) достатньо, щоб виконувалась умова (12) і необхідно, щоб виконувалась умова (11).*

Для цілих функцій $f \in \mathrm{E}^p$ розглянемо тепер клас збіжності інтеграла

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{\ln\ln M_G(r, F)} d\ln r. \tag{13}$$

Тоді, з огляду на отримані вище у п. 3 твердження, можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 4. *Для того, щоб для кожної цілої функції $f \in \mathrm{E}^p$ виконувалась умова (13) достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{(\sigma_n - \sigma_{n-1})(n-1) \ln((\sigma_n - \sigma_{n-1})(n-1))} < +\infty,$$

і необхідно, щоб виконувалась умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{\sigma_{n+1} n \ln(\sigma_{n+1} n)} < +\infty,$$

де $\sigma_n = \ln A_{n-1}^0 - \ln A_n^0$, а (A_k^0) − коефіцієнти мажоранти Ньютона цілої функції $\sum_{k=0} A_k R^k$, $A_k = \max\{| a_K | : \| K \| = k\}, K = (k_1, \ldots, k_p), \| K \| = k_1 + \ldots k_p$.

Відзначимо, що подібні твердження отримано в [9] також для рядів типу Тейлора-Діріхле.

Література

1. Valiron G. General theory of integral functions / G. Valiron. − Toulouse, 1923.− 382 p.
2. Мулява О.М. Класи збіжності в теорії рядів Діріхле / О.М. Мулява // Доп НАНУ. − 1999. − 3. − С. 35-39.
3. Мулява О.М. Про класи збіжності рядів Діріхле / О.М. Мулява // Укр. матем. ж. − 1999. − Т.51, 11. − С.1485-1494.
4. Mulyava O.M. On the convergence classes for entire functions of several complex variables / O.M. Mulyava, M.M. Sheremeta // Mat. Stud. − 2016. − V.46, 1. − C. 67-71.
5. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л.И. Ронкин. − М.: Наука, 1971 − 432 с.

6. Sheremeta M.M. On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristic of entire functions / M.M. Sheremeta // Mat. Stud. − 2003. − V. 19, 1. − P. 73-82.
7. Гольдберг А.А. Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных / А.А. Гольдберг // ДАН Арм. ССР. − 1959. − V.29, 4. − С. 145-152.
8. Gol'dberg A.A. Sets on which the modulus of an entire function is bounded below / A.A. Gol'dberg // Siberian Math. J. − 1980. − V.20. − P.360-364.
9. Скасків О.Б. Про класи збіжності рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле / О.Б. Скасків, О.Ю. Тарновецька // Буковинський матем. журн. − 2015. − Т.3, №3-4. − С.170-172.

Стаття надійшла до редакційної колегії 6.12.2017 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.**,*
*д.ф.-м.н., професором **Чижиковим І.Е.** (м. Львів)*

THE CONVERGENCE CLASSE FOR ENTIRE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

O. B. Skaskiv[1], O. Yu. Tarnovecka[2], T. M. Salo[3]
[1]Ivan Franko National University of Lviv;
79001, Lviv, Universytetska Str., 1; e-mail: olskask@gmail.com
[2]Chernivtsi Dept. Nat. Tech. Univ. "Kharkiv Polytechnic Institute";
58018, Chernivtsi, Holovna Str., 203-a; e-mail: savinskaolga@gmail.com
[3]National University "Lvivs'ka Polytehnika";
79013, Lviv, Stepan Bandera Str., 12; e-mail: tetyan.salo@gmail.com

In article it is obtained sufficient and necessary conditions for belonging to generalized convergence classes entire functions of several complex variables.

Key words: *convergence classes, entire functions, several complex variables*