УДК 517.51 + 517.98

ПЕРЕХІДНІСТЬ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ *n*-ЛІНІЙНИХ І ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

В. К. Маслюченко, В. В. Нестеренко
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;
58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського 2;
e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; v.nesterenko@gmail.com

Доведено, що для n-лінійних і поліноміальних відображень перехідність рівносильна неперервності.

Ключові слова: *перехідність, слабка властивість Дарбу, n-лінійне відображення, поліноміальне відображення.*

1. Вступ. У праці [1], яка розвивала ідеї статті [2], було введене поняття перехідного відображення $f: X \to Y$, що діє в загальних топологічних просторах. З допомогою цього поняття в [1] було отримана загальна теорема про декомпозицію неперервності, яка охоплювала багато попередніх результатів. Взагалі кажучи, перехідність – це властивість, що значно слабша від неперервності, але в роботі [3] було зауважено, що перехідність для лінійного відображення рівносильна неперервності. Виникає природне питання про зв'язок між перехідністю і неперервністю і для n-лінійних та поліноміальних відображень.

Ми показуємо тут, що кожне перехідне n-лінійне відображення $f: X_1 \times ... \times X_n \to Y$, де X_1, X_2, ..., X_n, Z – топологічні векторні простори (коротко ТВП), є неперервним так само як і довільне перехідне поліноміальне відображення $f: X \to Y$, що діє в топологічних векторних просторах є неперервним.

2. Перехідні відображення і слабка властивість Дарбу. Нехай X і Y – топологічні простори. Кажуть, що відображення $f: X \to Y$ *перехідне в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y існують окіл U точки x_0 в X і відкритий окіл W точки y_0 в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \bigcup \left(Y \setminus \overline{W} \right)$, і просто перехідним, якщо воно є таким у кожній точці x_0 з X.

Відображення $f: X \to Y$ має */слабку/ властивість Дарбу*, якщо воно кожну /відкриту/ зв'язну множину в X переводить у зв'язну підмножину простору Y. Ми будемо використовувати теорему про декомпозицію неперервності з праці [1].

Теорема А. *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і Y – довільний топологічний простір. Відображення $f: X \to Y$ буде не-*

перервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне і має слабку властивість Дабу.

3. *n*-лінійні відображення. Нехай $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ – добуток векторних просторів над полем $\mathbf{K}$ дійсних чи комплексних чисел і Y – векторний простір над $\mathbf{K}$. Відображення $f : X \to Y$ називається n-*лінійним* або *нарізно лінійним*, якщо для кожного фіксованого елемента $a = (a_1, ..., a_n) \in X$ і довільного індексу $k = 1, ..., n$ відображення $f_{\hat{a}_k} : X_k \to Y$, яке задається формулою

$$f_{\hat{a}_k}(x_k) = f(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n),$$

є лінійним.

Лема 1. *Нехай* $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ – *добуток ТВП* X_k, $a = (a_1, ..., a_n)$ *і* $b = (b_1, ..., b_n)$ – *точки з* X, Y – *ТВП і* $f : X \to Y$ – n-*лінійне відображення. Тоді функція* $\omega(t) = f(a + t(b - a))$, $\alpha \le t \le \beta$, *це поліном степеня* $\le n$ *з коефіцієнтами з простору* Y.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n.

Нехай $n = 1$. Тоді f – лінійне відображення і

$$\omega(t) = f(a + t(b - a)) = f(a) + tf(b - a),$$

отже, ω – це поліном степеня ≤ 1.

Припустимо, що $n > 1$ і наше твердження справедливе для $(n-1)$-лінійних функцій. Доведемо, що воно виконується і для n-лінійних функцій як у формулюванні леми.

Використовуючи лінійність відносно останнього аргументу отримаємо, що

$$\omega(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), ..., a_{n-1} + t(b_{n-1} - a_{n-1}), a_n + t(b_n - a_n)) =$$
$$= f(a' + t(b' - a'), a_n) + tf(a_1 + t(b_1 - a_1), b_n - a_n),$$

де $a' = (a_1, ..., a_{n-1}) \in X' = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}$ і $b' = (b_1, ..., b_{n-1}) \in X'$. Відображення $g : X' \to Y$ і $h : X' \to Y$, що визначаються формулами $g(x') = f(x', a_n)$ і $h(x') = f(x', b_n - a_n)$, є $(n-1)$-лінійними. Тому за індуктивним припущенням існують такі многочлени

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k y_k \text{ і } \psi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k z_k$$

з коефіцієнтами y_k і z_k з Y, що

$$g(a' + t(b' - a')) = \varphi(t) \text{ і } h(a' + t(b' - a')) = \psi(t)$$

на $\alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$\omega(t) = g(a' + t(b' - a')) + th(a' + t(b' - a')) = \varphi(t) + t\psi(t)$$

на $\alpha \le t \le \beta$, отже, ω – це многочлен степеня $\le n$.

Теорема 1. *Для довільних ТВП* X_1, ..., X_n *і* Y *кожне* n-*лінійне відображення* $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ *має слабку властивість Дарбу.*

Доведення. Нехай G – це область в добутку $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Доведемо, що її образ $H = f(G)$ є зв'язною множиною у просторі Y. Нехай c і d – довільні точки з H. Тоді існують точки a і b з G, такі, що $f(a) = c$ і $f(b) = d$. За лемою 3.2 з [3] існує ламана $l:[\alpha, \beta] \to G$, що $l(\alpha) = a$ і $l(\beta) = b$. Розглянемо розбиття $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n = \beta$ відрізка $[a,b]$, таке, що для кожного $k = 1,...,n$ звуження $l_k = l|_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}$ – це лінійна функція. За лемою 1 функція $\omega_k = f \circ l_k$ – це многочлен з коефіцієнтами з простру Y. Покладаючи $\omega(t) = \omega_k(t)$ при $\alpha_{k-1} \le t \le \alpha_k$ ми одержимо неперервну функцію $\omega:[\alpha, \beta] \to H$, для якої $\omega(\alpha) = c$ і $\omega(\beta) = d$. Таким чином, встановлено, що множина H навіть лінійно зв'язна, а значить, і зв'язна.

Теорема 2. *Нехай* $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ *– добуток ТВП,* Y *– ТВП і* $f: X \to Y$ *–* n*-лінійне відображення. Тоді* f *буде перехідним у тому і тільки в тому випадку, коли* f *неперервне.*

Доведення. Зауважимо, що з неперервності відображення випливає його перехідність [1, теорема 5]. Нехай відображення f перехідне. Зауважимо, що добуток X є локально зв'язним простором, адже він є ТВП (див. лему 3.1 з [3]). За теоремою 1 відображення f має слабку властивість Дарбу. Тому за теоремою А відображення f неперервне.

4. Поліноміальні відображення. Нагадаємо, що відображення $f: X \to Y$ між векторними просторами над полем $\mathbf{K}$ називається n*-однорідним поліномом*, якщо існує таке n-лінійне відображення $g: X^n \to Y$, що $f(x) = g(x,...,x)$ на X. *Поліном* $f: X \to Y$ степеня $\le n$ – це сума $f = \sum_{k=0}^{n} f_k$, де $f_k: X \to Y$ – це k-однорідні поліноми при $k = 0,1,...,n$.

Лема 2. Н*ехай* X *і* Y *– ТВП,* a *і* b *– точки з* X *і* $f: X \to Y$ *– поліном степеня* $\le n$*. Тоді функція* $\omega(t) = f(a + t(b-a))$*,* $\alpha \le t \le \beta$*, це поліном степеня* $\le n$ *з коефіцієнтами з* Y*.*

Доведення. Нехай f – це n-однорідний поліном. Тоді існує таке n-лінійне відображення $g: X^n \to Y$, що $f(x) = g(x,...,x)$ на X. В такому разі

$$\omega(t) = g(a + t(b-a),...,a + t(b-a))$$

при $\alpha \le t \le \beta$ і за лемою 1 функція ω є поліномом степеня $\le n$ з коефіцієнтами з Y.

Нехай $f = \sum_{k=0}^{n} f_k$, де f_k – це k-однорідні поліноми при $k = 0,1,...,n$. Функції $\omega_k(t) = f_k(a + t(b-a))$ – це поліноми степеня $\le k$ з коефіцієнтами з Y для кожного $k = 0,1,...,n$. Але

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} \omega_k .$$

Тому ω – це теж поліном з коефіцієнтами з Y, степінь якого не перевищує n.

Наступний результат виводиться з леми 2 так само як теорема 1 з леми 1.

Теорема 3. Н*ехай* X *і* Y *– ТВП і* $f : X \to Y$ *– поліном степеня* $\leq n$. *Тоді* f *має слабку властивість Дарбу.*

Звідси випливає

Теорема 4. Н*ехай* X *і* Y *– ТВП і* $f : X \to Y$ *– поліном степеня* $\leq n$. *Тоді* f *буде перехідним у тому і тільки в тому випадку, коли* f *неперервне.*

Література

1. Маслюченко В.К. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення / В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – **8**. – С. 132-150.
2. Маслюченко В.К. Неперервність за Стеллінґзом, нарізна неперервність та функції із замкненим графіком / В.К. Маслюченко, В.І. Крецу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 50-54.
3. Маслюченко В.К. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах / В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко // Карп. мат. публ. – 2013. – 5, 1. – С. 79-88.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.12.2017 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

TRANSITION AND CONTINUITY OF *n*-LINEAR AND POLYNOMICAL TRANSFORMERS

V. K. Maslyuchenko, V. V. Nesterenko
Chernivtsi National University named by Yuri Fedkovych;
58012, Chernivtsi, Kotsyubinsky str., 2;
e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; v.nesterenko@gmail.com

It is proved that the transitivity for n-linear and polynomial transformers is equivalent to continuity.

Key words: transitivity, weak property of Darboux, n-linear transformers, n-linear and polynomial transformers..