УДК 517.98

ОПЕРАЦІЯ ЗГОРТКИ НА ПРОСТОРІ, СПРЯЖЕНОМУ ДО АЛГЕБРИ $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$

Т. В. Василишин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

В роботі визначено і обґрунтовано коректність операції згортки на просторі, спряженому до алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх неперервних $*$-поліномів на комплексному банаховому просторі X відносно метрики, породженої системою рівномірних норм на замкнених кулях простору X.

Ключові слова: *$*$-поліном, згортка функціоналів, алгебра Фреше.*

1. Попередні відомості

Для опису спектрів алгебр диференційовних функцій на банаховому просторі важливою є наявність операції згортки лінійних функціоналів на алгебрі, яка пов'язана із так званим оператором зсуву. В даній роботі побудовано згортку лінійних неперервних функціоналів на алгебрі, породженій $*$-поліномами (див. означення нижче) на комплексному банаховому просторі. Зауважимо, що кожен елемент такої алгебри є диференційовною у дійсному сенсі функцією.

Нехай X – комплексний банахів простір. Відображення $A: X^{p+q} \to \mathbb{C}$, де p і q – цілі невід'ємні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, називають (p,q)-лінійним відображенням, якщо A є лінійним відносно кожного з перших p аргументів і антилінійним відносно кожного з останніх q аргументів. (p,q)-Лінійне відображення, яке є інваріантним відносно перестановок окремо перших p аргументів і останніх q аргументів, називають (p,q)-лінійним симетричним відображенням. Відображення $A: X \to \mathrm{C}$ називають (p,q)-поліномом, якщо воно є звуженням на діагональ деякого (p,q)-лінійного симетричного відображення $A_P: X^{p+q} \to \mathbb{C}$, тобто

$$P(x) = A_P(\underbrace{x,\ldots,x}_{p+q})$$

для кожного $x \in X$. Відображення A_P називають (p,q)-лінійним симетричним відображенням, асоційованим із (p,q)-поліномом P. Зауважимо, що для (p,q)-поліномів виконується наступний аналог біноміальної формули:

$$P(x+y)=\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!}A_P\left(x^j,y^{p-j},x^k,y^{q-k}\right), \qquad (1)$$

де

$$A_P\left(x^j,y^{p-j},x^k,y^{q-k}\right)=A_P\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{j},\underbrace{y,\ldots,y}_{p-j},\underbrace{x,\ldots,x}_{k},\underbrace{y,\ldots,y}_{q-k}\right)$$

для всіх $x,y\in X$. Простір усіх неперервних (p,q)-поліномів на просторі X із нормою

$$\|P\|=\underbrace{\sup}_{\|x\|\le 1}|P(x)|$$

будемо позначати $\mathcal{P}\left({}^{pq}X\right)$. Також для зручності будемо вважати, що $\mathcal{P}\left({}^{00}X\right)=\mathbb{C}$. Зауважимо, що властивості (p,q)-лінійних відображень і (p,q)-поліномів вивчалися у роботах [1], [2], [3].

Відображення $P:X\to\mathbb{C}$ називають $*$-поліномом, якщо його можна подати у вигляді

$$P=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}P_{pq},$$

де M і N – цілі невід'ємні числа і $P_{pq}\in\mathcal{P}\left({}^{pq}X\right)$. Позначимо $\mathcal{P}_*(X)$ алгебру всіх неперервних $*$-поліномів на просторі X.

Для кожного $r>0$ визначимо норму

$$\|P\|_r=\sup_{\|x\|\le r}|P(x)|$$

на алгебрі $\mathcal{P}_*(X)$ Розглянемо зліченну систему норм $\left\{\|\cdot\|_r: r>0, r\in\mathbb{Q}\right\}$ і позначимо $C(\mathcal{P}_*(X))$ алгебру Фреше, яка є поповненням алгебри $\mathcal{P}_*(X)$ відносно метрики, породженої цією зліченною системою норм. В другому розділі даної роботи доведено коректність визначення і неперервність оператора зсуву на алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$, а також введено операцію згортки на $C(\mathcal{P}_*(X))'$ і обґрунтовано її коректність.

2. Основні результати

Доведемо деякі допоміжні твердження.

Твердження 1. *Для кожного неперервного $*$-полінома P на комплексному банаховому просторі X і для кожного фіксованого $x\in X$ функція g_x, визначена формулою $g_x(y)=P(x+y)$, є неперервним $*$-поліномом на X.*

Доведення. Нехай $P=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}P_{pq}$, де $P_{pq}\in\mathcal{P}\left({}^{pq}X\right)$ Тоді, згідно із формулою (1),

$$P(x+y)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!}A_{P_{pq}}\left(x^{j},y^{p-j},x^{k},y^{q-k}\right),$$

де $A_{P_{pq}}$ – це (p,q)-лінійні симетричні відображення, асоційовані із P_{pq}. Зауважимо, що при фіксованому $x\in X$ функція $A_{P_{pq}}\left(x^{j},y^{p-j},x^{k},y^{q-k}\right)$ є неперервним (p,q)-поліномом від y. Тому g_x є неперервним $*$-поліномом від y. ■

Зауважимо, що для кожної функції $f\in C(\mathcal{P}_*(X))$ і кожного фіксованого $x\in X$ виконується нерівність

$$\sup_{\|y\|\le r}\left|f(x+y)\right|\le\sup_{\|z\|\le r+\|x\|}\left|f(z)\right| \tag{2}$$

для кожного $r>0$.

Твердження 2. *Для кожної функції* $f\in C(\mathcal{P}_*(X))$ *і для кожного фіксованого* $x\in X$ *функція* g_x, *визначена формулою* $g_x(y)=f(x+y)$, *належить алгебрі* $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$.

Доведення. Оскільки f належить алгебрі $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$, скрізь щільною підалгеброю якої є $\mathcal{P}_*(X)$, то існує послідовність неперервних $*$-поліномів $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до f відносно кожної з норм $\|\cdot\|_r$. Згідно із твердженням 1, функції $g_{n,x}(y)=f_n(x+y)$ є неперервними $*$-поліномами. Згідно із нерівністю (2),

$$\sup_{\|y\|\le r}\left|g_x(y)-g_{n,x}(y)\right|=\sup_{\|y\|\le r}\left|f(x+y)-f_n(x+y)\right|\le\sup_{\|z\|\le r+\|x\|}\left|f(z)-f_n(z)\right|.$$

Звідси $\|g_x-g_{n,x}\|_r\le\|f-f_n\|_{r+\|x\|}\to 0$ при $n\to\infty$. Тому послідовність неперервних $*$-поліномів $\{g_{n,x}\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до g_x відносно метрики алгебри $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$. Отже, $g_x\in\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$. ■

Для кожного фіксованого $x\in X$ визначимо оператор зсуву $T_x:\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))\to\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$ формулою $(T_xf)(y)=f(x+y)$, де $f\in\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$. Згідно із твердженням 2, функція T_xf належить алгебрі $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$. Із нерівності (2) отримуємо нерівність $\|T_xf\|_r\le\|f\|_{r+\|x\|}$, із якої випливає неперервність оператора T_x.

Теорема 3. Нехай $f\in\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$ і $\varphi\in\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))'$. Тоді функція $h(x)=\varphi(T_xf)$ належить алгебрі $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$.

Доведення. Оскільки $f \in \mathrm{C}(\mathscr{P}_*(X))$, то існує послідовність неперервних $*$-поліномів $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до f. Нехай $h_n(x)=\varphi(T_x f_n)$. Для того, щоб показати, що функція h належить алгебрі $\mathrm{C}(\mathscr{P}_*(X))$, потрібно довести, що h_n є неперервними $*$-поліномами і послідовність $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до h.

Нехай $P=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}P_{pq}$ є неперервним $*$-поліномом. Покажемо, що функція $Q(x)=\varphi(T_x P)$ є неперервним $*$-поліномом. Згідно із формулою (1) для P_{pq}, враховуючи лінійність φ,

$$Q(x)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\varphi\left(y\mapsto A_{P_{pq}}\left(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}\right)\right).$$

Зауважимо, що функція

$$w(x)=\varphi\left(y\mapsto A_{P_{pq}}\left(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}\right)\right)$$

є звуженням на діагональ (j,k)-лінійного симетричного відображення

$$B(x_1,\ldots,x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+k})=\varphi\left(y\mapsto A_{P_{pq}}\left(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}\right)\right),$$

тому w є неперервним (j,k)-поліномом. Отже, Q є неперервним $*$-поліномом. Таким чином, h_n є неперервними $*$-поліномами.

Тепер покажемо, що $h_n \to h$ при $n\to\infty$. Оскільки φ є неперервним лінійним функціоналом, то існує $s>0$, таке, що $\sup\limits_{\|g\|_s\le 1}|\varphi(g)|$ скінченний. Позначимо останній супремум через $\|\varphi\|$. Тоді $|\varphi(g)|\le\|\varphi\|\|g\|_s$ для кожної $g\in\mathrm{C}(\mathscr{P}_*(X))$. Тому для кожного $r>0$

$$\|h-h_n\|_r=\sup_{\|x\|\le r}|\varphi(T_x f)-\varphi(T_x f_n)|=\|\varphi\|\sup_{\|x\|\le r}\sup_{y\le s}|f(x+y)-f_n(x+y)|$$

$$\le\|\varphi\|\sup_{\|z\|\le r+s}|f(z)-f_n(z)|=\|\varphi\|\,\|f-f_n\|_{r+s}.$$

Оскільки $\|f-f_n\|_{r+s}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\|h-h_n\|_r\to 0$ при $n\to\infty$. Отже, $h_n\to h$. Таким чином, $h\in\mathrm{C}(\mathscr{P}_*(X))$. ■

Тепер визначимо згортку лінійних неперервних функціоналів $\psi,\varphi\in\mathrm{C}(\mathscr{P}_*(X))'$ формулою

$$(\psi*\varphi)(f)=\psi(h(x)),$$

де

$$h(x)=\varphi(T_x f).$$

Коректність визначення згортки випливає із теореми 3. Як легко переконатися, $\psi*\varphi\in\mathrm{C}(\mathscr{P}_*(X))'$.

Література

1. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces / J. Mujica // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford. – 1986. – 447 p.
2. Vasylyshyn T.V. Polarization formula for (p,q)-polynomials on a complex normed space / T.V. Vasylyshyn, A. V. Zagorodnyuk // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2011. – V. 17, № 1. – P. 75-83.
3. Василишин Т.В. Поляризаційна формула та поляризаційна нерівність для (p,q)-лінійних відображень. / Т.В. Василишин, А.В. Загороднюк // Карпат. мат. публ. – 2009. – Т. 1, № 2. – С. 128-144.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2017 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
к.ф.-м.н., доцентом ***Бандурою А.І.***

THE CONVOLUTION OPERATION ON THE DUAL SPACE TO THE ALGEBRA $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$

T. V. Vasylyshyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

We define and prove the correctness of the convolution operation on the dual space to the Fréchet algebra $\mathrm{C}(\mathcal{P}_*(X))$*, which is the completion of the algebra of all continuous* $*$*-polynomials on a complex Banach space* X *with respect to the metric, generated by the system of uniform norms on closed balls of the space* X.

Key words: $*$*-polynomial, convolution of functionals, Fréchet algebra.*