УДК 517.53

УЗАГАЛЬНЕННЯ СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНИМИ ДОДАТНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

І. Є. Овчар[1], Я. І. Савчук[1], О. Б. Скасків[2]

[1]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ; вул. Карпатська, 15*

[2]*Львівський національний університет імені І. Франка; 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1*

Для цілого ряду Діріхле $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}$ *з довільною немонотонною послідовністю показників* $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset \mathsf{R}_+$, *встановлено умови, за яких* $\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\to 0$ *при* $x\to+\infty$ $(x\notin E, \int_E d\ln x<+\infty)$, *де* $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathsf{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n\ge 0\}$ $(x\in\mathsf{R})$.

Ключові слова: *ряд Діріхле, співвідношення Бореля, максимальний член, максимум модуля, логарифмічна міра.*

Вступ

У цій статті розглядаємо цілі функції F, задані абсолютно збіжними у всій комплексній площині рядами Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda=(\lambda_n)$ – довільна послідовність попарно різних невід'ємних дійсних чисел, тобто $\lambda_n\ne\lambda_k$ $(n\ne k)$, $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset\mathsf{R}_+\stackrel{def}{=}[0,+\infty)$. Через D_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a=\{z: Rez<a\},\quad a\le+\infty,$$

рядів Діріхле вигляду (0.1), де $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset\mathsf{R}_+$. Зрозуміло, що $D\stackrel{def}{=}D_{+\infty}$ – клас цілих рядів Діріхле вигляду (1).

Через D^{Δ}, $\Delta\in(0,+\infty]$, позначимо клас цілих рядів Діріхле з класу D, показники яких задовольняють умову

$$(\forall\, n\ge 0): \lambda_n<\sup\{\lambda_j : j\ge 0\}\stackrel{def}{=}\beta,\quad \text{де } \beta\le\Delta. \tag{2}$$

Нехай $D^+(\lambda)$ та $D_0^+(\lambda)$ – підкласи класів D та D_0 відповідно, тобто у ці підкласи входять ряди Діріхле вигляду (1) з фіксованою монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)$, такою, що

$$0 \le \lambda_0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty \quad (1 \le n \to +\infty).$$

Для $F \in D_a$, $a \le +\infty$, та $x < a$ позначимо

$$M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathrm{R}\},$$

$$\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n \ge 0\}.$$

У статті [1] доведено таку теорему, яка містить необхідну і достатню умову для того, щоб співвідношення Бореля на додатному дійсному промені виконувалось зовні деякої множини скінченної міри Лебега для кожної цілої функції $F \in D^+(\lambda)$.

Теорема А [1]. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in D^+(\lambda)$ *співвідношення Бореля*

$$\ln M(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F) \tag{3}$$

виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри Лебега необхідно і достатньо, щоб для $\mu_n = \lambda_n$ $(n \ge 0)$ виконувалась умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\mu_n} < +\infty. \tag{4}$$

У статті [2] встановлений такий аналог Теореми А для функцій з класу $D_0^+ = \bigcup_{\lambda} D_0^+(\lambda)$.

Теорема Б [2]. *Нехай* $F \in D_0^+$. *Якщо для коефіцієнтів* (a_n^*) *її мажоранти Ньютона виконується умова (4) з* $\mu_n = \ln a_n^*$, *то*

$$\ln M(x, F) = o\left(\frac{1}{|x|} \ln \mu(x, F)\right),$$

при $x \to -0$ зовні деякої множини E_1 скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[-1, 0)$ (тобто, $\ln_0 - -\mathrm{meas}(E_1 \cap [-1; 0)) \overset{def}{=} \int_{E_1 \cap [-1;0)} \frac{dx}{|x|} < +\infty$).

Якщо додатково вимагати виконання умови

$$(\exists q > 0) : |x|^q \ln \mu(x, F) \uparrow \quad (x_0 \le x < 0),$$

то при $x \to -0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[-1, 0)$ справджується співвідношенння Бореля (3).

У статті [3] подібне твердження отримане у класі $D^{+\infty}$.

Додатну послідовність (x_n) назвемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta > 0$ така, що $x_m \le \delta x_n$ для всіх $n \ge n_1$ і $m \ge n + 1$.

Теорема Г [3]. *Нехай* $F \in D^{\Delta}$, $\Delta \le +\infty$, $\mu_n \overset{def}{=} -\ln|a_n|$. *Якщо* $\Phi_1 \in L_1$, *послідовність* $(\ln n/\mu_n)$ *майже монотонно спадна і виконується умова (4), то співвідношення (3) виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.*

Для доведення основних результатів цього дослідження використовуватимемо оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу D через максимальний член цього ряду, яку отримано в статті [3]. Використаємо наступні позначення.

Нехай L – клас додатних неперервних функцій $\psi : \mathsf{R}_+ \to \mathsf{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$; L_0 – клас функцій $\Phi \in \mathsf{L}$ таких, що $\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x))$ $(x \to +\infty)$;

L^+ – підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функції;

L_1 – клас функцій $\psi \in \mathsf{L}$ таких, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$; $\mathsf{L}_1^+ = \mathsf{L}_1 \cap \mathsf{L}^+$;

L_2 – клас диференційовних вгнутих функцій $\omega \in \mathsf{L}^+$ таких, що $\frac{1}{t} = O(\omega'(t))(t \to +\infty)$.

Для функції $F \in D^{+\infty}$, такої, що $\Phi_1 \in \mathsf{L}_0$, де $x\Phi_1(x) = \ln \mu(x,F)$, визначимо таку сталу

$$K = K_F \overset{def}{=} \sup\{\frac{1}{\Phi_1(x)} \int_0^x \frac{\Phi_1(t)}{t} dt : x \ge x_0\} < +\infty, \tag{5}$$

де $x_0 = \max\{x : \mu(x,F) = 1\}$. Зауважимо, що для $x \in (0, x_0]$

$$\int_0^x \frac{\Phi_1(t)}{t} dt = 0 = \Phi_1(x). \tag{6}$$

З опуклості функції $\ln \mu(x,F)$ на проміжку $[0,x]$, $x > 0$, отримаємо, що для $x_1 > x_2 > x_0$

$$\Phi_1(x_1) = \frac{\ln \mu(x_1,F) - \ln \mu(0,F)}{x_1 - 0} > \frac{\ln \mu(x_2,F) - \ln \mu(0,F)}{x_2 - 0} = \Phi_1(x_2),$$

тобто, Φ_1 монотонно зростає на $[x_0,+\infty)$. Тому для функції

$$\Phi_1 : [x_0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

існує обернена функція

$$\varphi_1 : [0,+\infty) \to [x_0,+\infty).$$

Подібно, для функції $\Phi(x) = \ln \mu(x,F)$, визначеної на проміжку $[x_0,+\infty)$, існує обернена функція

$$\varphi:[0,+\infty)\to[x_0,+\infty),\quad \varphi(0)=x_0.$$

Логарифмічною мірою вимірної множини $E\subset[1,+\infty)$ назвемо величину

$$\ln-meas(E)\overset{def}{=}\int_E d\ln x.$$

Теорема B [3]. *Нехай функція* $F\in D^{+\infty}$, *така що* $\Phi_1\in L_1$, *а* $v(t)$ – *невід'ємна на* $[0,+\infty)$ *і додатна при* $t\to+\infty$ *функція, така, що* $\int_0^{+\infty}v(t)dt<+\infty$. *Якщо* $\ln n=o(\ln|a_n|)\,(n\to+\infty)$, *то існує функція* $c_1(t)\uparrow+\infty$ $(t\to+\infty)$ *така, що для всіх* $n\ge 0$ *і для всіх* $x>0$ $(x\notin E,\ln-meas(E)<+\infty)$ *виконується нерівність*

$$|a_n|\,\mathrm{e}^{x\lambda_n}\le\mu(x,F)\exp\left\{-xe^{-2K}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n-t)\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}v(4t)dt\right\},\tag{7}$$

де $\mu_n=-\ln|a_n|$, а $\nu=\nu(x,F)=\max\{n:|a_n|e^{x\lambda_n}=\mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

У статті [4] для цілих рядів з довільною системою комплексних показників доведено теорему, подібну до Теореми B.

Узагальнення співвідношення Бореля

Позначимо через L_3 – клас додатних неперервно диференційовних на $[0,+\infty)$ функцій ω із спадною похідною

$$\omega'(x)\downarrow 0\quad(x\uparrow+\infty).$$

Для функції $\omega\in\mathsf{L}_1$ через $k(x)$ позначимо обернену функцію до функції $\dfrac{1}{\omega'(x)}$. Зрозуміло, що

$$k(x)\uparrow+\infty\quad(x\uparrow+\infty).$$

Для прикладу, описані щойно умови задовольняють такі функції

$$\omega(x)=(\ln\ln x)^{\alpha}\quad(x>e^2),\alpha>0,\quad \omega(x)=(\ln x)^{\alpha}\quad(x>e),\alpha>0,$$
$$\omega(x)=x^{\alpha}\quad(x>1),\alpha\in(0,1).$$

Для них, відповідно,

$$k(x)=\frac{\alpha x(\ln\ln x)^{\alpha-1}}{\ln x},\quad k(x)=\alpha x(\ln x)^{\alpha-1}\quad(x\to+\infty),$$
$$k(x)=(\alpha x)^{1/(1-\alpha)}\quad(x>1).$$

Тепер доведемо таке нове твердження про узагальнення співвідношення типу Бореля в класі $D^{+\infty}$.

Теорема 1. *Нехай* $F\in D^{+\infty},\omega\in\mathsf{L}_3$. *Якщо існує додатна зростаюча до* $+\infty$ *при* $t\to+\infty$ *функція* $c(t)$ *така, що виконується умова*

$$\int_1^{\infty}\frac{k(c(t)\ln n_1(t))}{t^2}dt<+\infty,\ n_1(t)=\sum\nolimits_{\mu_n\le t}1\tag{8}$$

і існує невід'ємна функція $\alpha_1(t)$ така, що $\frac{\alpha_1(t)}{t}\downarrow\ (t\to+\infty)$ і

$$\ln n_1(t)=O(\alpha_1(t))\,(t\to+\infty),\ \int^{\infty}\frac{\alpha_1(t)}{t^2}dt<+\infty, \tag{9}$$

де $\mu_n=-\ln|a_n|$, $\frac{1}{x}\ln\mu(x,F)\in \mathrm{L}_0$, то при $x\to+\infty$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри виконується співвідношення

$$\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\to 0. \tag{10}$$

Зазначимо, що умови достатні для того, щоб виконувалось узагальнення співвідношення Бореля (10) встановлювались раніше в класі $D^{+}(\lambda)$ в [5] (подальшу бібліографію див також в [6]). Метод доведення, який при цьому використовується, відмінний від методу даної статті, який у свою чергу є близьким до методу, що використовується в [2, 6] для доведення подібних тверджень в класах абсолютно збіжних рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників.

Доведення Теореми 1. З умови (8) випливає, що Теорему B можна застосувати з функцією

$$v(t)=16t^{-2}k(c(t)\ln n_1(t)).$$

Покладаючи в (7) $n=0$ для всіх $x>0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри маємо

$$\ln\mu(x,F)\ge x\int_0^{\mu_\nu}\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\frac{k(c(4t)\ln n_1(4t))}{t}dt\ge x\int_{\mu_\nu/2}^{\mu_\nu}\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\frac{k(c(4t)\ln n_1(4t))}{t}dt\ge$$

$$\ge\frac{x}{\varphi(\mu_\nu)}c_1\left(\frac{\mu_\nu}{2}\right)k(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu))\ln 2\ge\frac{2x}{\varphi(\mu_\nu)}k(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)), \tag{11}$$

де $\varphi(t)$ – функція, обернена до функції $\Phi(x)=\ln\mu(x,F)$.

Умова (9) надає можливість використати Теорему B з функцією $v(t)=16t^{-2}\alpha_1(t)$. Згідно монотонності $\frac{t}{\varphi(t)}\uparrow$ і $\frac{\alpha_1(4t)}{t}\downarrow t\to+\infty$, для всіх $x>0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-x\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\frac{\mu_n-t}{t^2}\alpha_1(4t)dt\right\}\le$$

$$\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-c_1(4\mu_\nu)\frac{\mu_\nu x}{\varphi(\mu_\nu)}\frac{\alpha_1(4\mu_n)}{\mu_n}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^2}dt\right\},$$

де $\nu=\nu(x,F)$ – центральний індекс. Нескладно обчислити, що $\max\left\{\frac{\ln x}{x}:x>0\right\}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, тому для $\mu_n\ge 2\mu_\nu$ отримаємо

$$\frac{\mu_\nu}{\mu_n}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^2}dt=1-\frac{\mu_\nu}{\mu_n}-\frac{\mu_\nu}{\mu_n}\ln\frac{\mu_n}{\mu_\nu}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{e}>0. \qquad (12)$$

З допомогою нерівності (12) при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної логарифічної міри, отримаємо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{\frac{-x\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{\varphi(\mu_\nu)}\alpha_1(4\mu_n)\right\}, \qquad (13)$$

де $\widetilde{c}_1(\mu_\nu)=c_1(4\mu_\nu)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$. Зауважимо тепер, що для всіх досить великих x з нерівності $0\le\ln\mu(x,F)=-\mu_\nu+x\lambda_\nu$ отримаємо $x\ge\frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu}$, а за означенням максимального члена для всіх n при $x=\varphi(\mu_n)$

$$\lambda_n\le\frac{\ln\mu(x,F)+\mu_n}{x}=\frac{\Phi(x)+\mu_n}{x}=\frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)},$$

тому

$$x\ge\frac{1}{2}\varphi(\mu_\nu). \qquad (14)$$

Отже, з (11) і (13)при $x\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$\ln\mu(x,F)\ge k(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)). \qquad (15)$$

Згідно першої частини умови (9) з деякою сталою $C>0$ отримаємо таку нерівність

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-\frac{\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{2}\alpha_1(4\mu_n)\right\}\le$$

$$\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-\frac{\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{2C}\ln n_1(4\mu_n)\right\}\le$$

$$\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-\frac{\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{2C}\ln(n+1)\right\}=o(1). \qquad (16)$$

З нерівності (16) послідовно при $x\to+\infty$ ($x\notin E$, E – скінченної логарифмічної міри) отримуємо

$$\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\le$$

$$\le\omega\Big(\sum_{\mu_n\le2\mu_\nu}|a_n|e^{x\lambda_n}+\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}|a_n|e^{x\lambda_n}\Big)-\omega(\ln\mu(x,F))\le$$

$$\le\omega(\ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1))+\ln\mu(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F)).$$

Звідси за теоремою Лагранжа про скінченні прирости, використовуючи при цьому монотонність похідної ω' і нерівність (15), при $x\to+\infty$ ($x\notin E$, E – скінченної логарифмічної міри) остаточно отримаємо

$$\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln \mu(x,F))\le \ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1))\omega'(\ln \mu(x,F))\le$$

$$\le \ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1))\omega'\big(k\big(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)\big)\big)=\frac{\ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1))}{c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)}=o(1).$$

Теорему 1 доведено.

Відзначимо, що на наш погляд умови (9) Теореми 1 відіграють тільки допоміжну роль і, тому є суто технічними. На це вказує і той факт, що їх можна замінити на таку умову

$$(\exists\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\exists q>0)(\exists u_0\ge 0)(\forall u\ge u_0):\int_{2u}^{+\infty}e^{-\delta t/u^{\varepsilon}}\,dn_1(t)\le (n_1(2u))^q \qquad (17)$$

яка має дещо інший характер, де $n_1(t)$ – лічильна функція послідовності (μ_n), $\mu_n=-\ln|a_n|$.

Твердження. *Нехай* $F\in D$. *Якщо виконується умова і існує додатна зростаюча до* $+\infty$ *при* $x\to+\infty$ *функція* $c(x)$ *така, що виконується умова (8), а* $\frac{1}{x}\ln\mu(x,F)\in \mathrm{L}_0$, *то при* $x\to+\infty$ *зовні деякої множини* E_2 *скінченної логарифмічної міри виконується співвідношення (10).*

Доведення Твердження. Застосуємо Теорему В з функціями

$$v(t)=\begin{cases}V_0\cdot 4^{1+\varepsilon}t^{-1-2\varepsilon} & t\ge 1,\\ 0, \quad 0\le t<1,\end{cases}\qquad c_1(t)=t^{\varepsilon}\ (t\ge 0),$$

де $V_0>0$ – деяка стала, яку ми виберемо нижче. За монотонністю $\frac{t}{\varphi(t)}\uparrow$ та нерівністю (14) для всіх $x>0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри послідовно отримаємо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-V_0x\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{t}{\varphi(t)}\frac{\mu_n-t}{t^{2+\varepsilon}}dt\right\}\le$$

$$\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-V_0\frac{\mu_\nu x}{\varphi(\mu_\nu)}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^{2+\varepsilon}}dt\right\}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-V_0\frac{\mu_\nu}{2}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^{2+\varepsilon}}dt\right\}. \qquad (18)$$

Проведемо наступні перетворення:

$$\mu_\nu\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^{2+\varepsilon}}dt=\mu_\nu\Big(\frac{\mu_n}{(1+\varepsilon)\mu_\nu^{1+\varepsilon}}-\frac{1}{(1+\varepsilon)\mu_n^{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon\mu_n^{\varepsilon}}-\frac{1}{\varepsilon\mu_\nu^{\varepsilon}}\Big)=$$

$$=\frac{\mu_n}{(1+\varepsilon)\mu_\nu^{\varepsilon}}\Big(1-\Big(\frac{\mu_\nu(1+\varepsilon)}{\varepsilon\mu_n}-\frac{\mu_\nu^{1+\varepsilon}}{\varepsilon\mu_n^{1+\varepsilon}}\Big)\Big)=\frac{\mu_n}{(1+\varepsilon)\mu_\nu^{\varepsilon}}\Big(1-\frac{h(u)}{\varepsilon}\Big), \qquad (19)$$

де $h(t)=t(1+\varepsilon)-t^{1+\varepsilon}$. Оскільки для похідної функції виконується $h'(t)=(1+\varepsilon)(1-t^{\varepsilon})>0$ $(t\in(0,1))$, то для $u\in[0,1/2]$ маємо $0=h(0)\le h(u)\le h(1/2)=\frac{1}{2}(1+\varepsilon-2^{-\varepsilon})$.

Переконаємось, що $h_0 = 1 - \frac{h(1/2)}{\varepsilon} > 0.$ Справді, $h_0 = (2^{-\varepsilon} - (1-\varepsilon))/(2\varepsilon),$ але оскільки $y = 1 - x\ln 2$ – дотична до графіка $y = 2^{-x}$ у точці $x = 0$, то з опуклості графіка функції $y = 2^{-x}$ отримаємо $2^{-\varepsilon} > (1 - \varepsilon\ln 2) > (1-\varepsilon)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Тому, з (18) і (19) для всіх $x > 0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри, вибираючи сталу $V_0 = \delta\frac{2(1+\varepsilon)}{h_0},$ за умовою (17), отримаємо

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)} \le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-V_0 h_0 \frac{\mu_n}{2(1+\varepsilon)\mu_\nu^\varepsilon}\right\} =$$

$$= \int_{2\mu_\nu}^{+\infty} \exp\{-V_0 h_0 \frac{t}{2(1+\varepsilon)\mu_\nu^\varepsilon}\} dn_1(t) = \int_{2\mu_\nu}^{+\infty} \exp\{-\frac{t\delta}{\mu_\nu^\varepsilon}\} dn_1(t) \le (n_1(2\mu_\nu))^q.$$

Звідси, подібно як і вище, за допомогою (15), при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри отримуємо

$$\omega(\ln M(x,F)) - \omega(\ln\mu(x,F)) \le$$
$$\le \omega(\ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q) + \ln\mu(x,F)) - \omega(\ln\mu(x,F)) \le$$
$$\le \ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q)\omega'(\ln\mu(x,F)) \le$$
$$\le \ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q)\omega'\big(k\big(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)\big)\big) =$$
$$= \frac{\ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q)}{c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)} = o(1).$$

Твердження доведено.

Насамкінець висловимо такі припущення.

Припущення.

1. *Умови (9) у Теоремі 1 можна зняти.*

2. *Умова (8) є і необхідною для того, щоб співвідношення (10) виконувалось зовні деякої множини скінченної міри для кожної функції* $F \in D^{+\infty}$ *з фіксованою послідовністю* $(|a_n|)$.

Літератрура

1. Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / О.Б. Скаскив // Матем. заметки. – 1985. – Т.37, 1. – С. 41-47.
2. Скаскив О.Б. О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости / О.Б. Скаскив // Укр. мат. ж. – 1989. – Т.41, 11. – С.1532-1541.
3. Овчар І. Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками / І. Овчар, О. Скасків // Вісн. Львів. ун-ту., сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 232-242.

4. Овчар І. Теорема типу Вімана-Валірона для цілого ряду Діріхле з довільною комплексною послідовністю показників / І. Овчар, Я. Савчук, О. Скасків // Буковинський матем. журн. – 2016. – Т.4, 1-2. – С. 130-135.
5. Скаскив О.Б. О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле / О.Б. Скаскив // Матем. заметки. – 1999. – Т.66, 2. – С. 282-292.
6. Скасків О.Б. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції / О.Б. Скасків, А.І. Бандура. – Львів-Івано-Франк.: пп. Голіней, 2015. – 108 с.
7. Овчар І.Є. Теореми типу Вімана-Валірона для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками / І.Є. Овчар, О.Б. Скасків // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математ. аналізу". Ворохта, 23-28.02.2011 р.: тези доповідей. – Івано-Франк., 2011. – С. 6-7.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2017 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

GENERALISATION OF BOREL'S RELATION FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH ARBITRARY POSITIVE EXPONENTS

I. Ye. Ovchar[1], Ya. I. Savchuk[1], O. B. Skaskiv[2]
[1]Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpatska Str., 15
[2]Ivan Franko National University of L'viv;
79000, Lviv, Universytetska Str., 1

For a entire Dirichlet series $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ *with arbitrary unbounded sequence of exponents* $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset \mathrm{R}_+$, *conditions for* $\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln \mu(x,F))\to 0$ *as* $x\to+\infty$ $(x\notin E, \int_E d\ln x<+\infty)$, *where* $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|: y\in \mathrm{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n\ge 0\}$ $(x\in \mathrm{R})$ *are established.*

Key words: *Dirichlet series, Borel's relation, maximal term, maximum of the modulus, logarithmic measure.*