

МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.53

АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ В $D \times C$ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

А. І. Бандура¹, О. Б. Скасків², В. Л. Цвігун²

¹Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: andriykoranytsia@gmail.com

²Львівський національний університет ім. Івана Франка
м. Львів, вул. Університетська, 1;
e-mail: olskask@gmail.com, 12ivan@ukr.net

Поняття обмеженості L -індексу за сукупністю змінних узагальнено для аналітичних функцій в $D \times C$. Доведено критерій обмеженості L -індексу за сукупністю змінних, який описує локальне поведіння частинних похідних таких функцій та дає оцінку максимуму модуля цих похідних кістяку бікруга через їх значення в центрі бікруга.

Ключові слова: аналітична функція, бікруг, обмежений L -індекс за сукупністю змінних, максимум модуля, частинна похідна, інтегральна формула Коші.

1. Вступ. Поняття цілої функції обмеженого L -індексу в C^n у найзагальнішому вигляді стосовно вектор-функції $L: C^n \rightarrow R_+^n$ введено у статті [1]. Воно, з однієї сторони, зберігає всі характеристичні властивості класів цілих функцій обмеженого індексу в C^n , а з іншої сторони, природньо узагальнює і містить в собі подібні класи в сенсі всіх попередніх означень, а також є природним узагальненням відповідних понять у випадку функцій від однієї змінної (бібліогр. див. [2-8]). У випадку аналітичних функцій в одиничному крузі відповідне поняття введено і досліджене у статтях [9, 10] (див. також. [2]).

У даному повідомленні ми розглядаємо аналітичні функції $F: T := D \times C \rightarrow C$ і вводимо для них відповідне поняття, яке є комбінацією згаданого вище поняття цілої функції обмеженого L -індексу за сукупністю змінних з **Ошибка! Источник ссылки не найден.** і аналітичної функції обмеженого l -індексу в одиничному крузі. Зазначимо, що аналітичні у полікрузі функції обмеженого L -індексу за сукупністю змінних вивчалися в [11].

2. Означення і позначення. Нам потрібно ввести деякі стандартні позначення. Нехай для $R = (r_1, r_2) \in R_+^2$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in C^2$, $T(z^0, R) = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : |z_1 - z_1^0| = r_1, |z_2 - z_2^0| = r_2\}$, $D = \{z \in C : |z| < 1\}$, $T = D \times C$, $\mathbf{0} = (0, 0) \in D \times C$, $\mathbf{1} = (1, 1) \in D \times C$.

Для $A = (a_1, a_2) \in R^2$, $B = (b_1, b_2) \in R^2$, вживаємо такі скорочення запису

$$AB = (a_1 b_1, a_2 b_2), A/B = (a_1/b_1, a_2/b_2), b \neq \mathbf{0}, A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2}, b \in Z_+^2,$$

а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ для $j \in \{1, 2\}$; співвідношення $A \leq B$ означаємо подібно. Для $K = (k_1, k_2) \in Z_+^2$ вживаємо також позначення $\|K\| = k_1 + k_2$, $K! = k_1! k_2!$, а для часткових похідних аналітичної функції F в T пишемо

$$F^{(K)}(z) = F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2) := \frac{\partial^{k_1+k_2} F(z_1, z_2)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}, z \in T.$$

Нехай $L(z) = L(z_1, z_2) = (l_1(z_1, z_2), l_2(z_1, z_2)): T \rightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція. Аналітичну функцію $F: T \rightarrow C$ називатимемо *функцією обмеженого L -індексу (за сукупністю змінних)*, якщо існує $n_0 \in Z_+$ таке, що $\forall (z_1, z_2) \in T$ і $\forall (p_1, p_2) \in Z_+^2$

$$\frac{1}{p_1! p_2! l_1^{p_1}(z_1, z_2) l_2^{p_2}(z_1, z_2)} \leq \max \left\{ \frac{1}{k_1! k_2! l_1^{k_1}(z_1, z_2) l_2^{k_2}(z_1, z_2)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq n_0 \right\}. \quad (1)$$

Найменше з таких n_0 називатимемо L -індексом за сукупністю змінних функції F і позначатимемо $N(F, L, T) = n_0$.

Якщо $F(z_1, z_2) \equiv f_1(z_1)$, $l_1(z_1, z_2) \equiv l(z_1)$ то ми приходимо до поняття аналітичної функції обмеженого l -індексу в одиничному крузі, якщо ж $F(z_1, z_2) \equiv f_2(z_2)$, $l_1(z_1, z_2) \equiv l(z_2)$ то ми приходимо до поняття цілої функції обмеженого l -індексу (при $l(z_2) \equiv 1$ приходимо до поняття цілої функції обмеженого індексу).

У даному повідомленні для спрощення викладок обмежимося випадком $L(z) = (l(z), 1)$ і з огляду на цю обставину вживатимемо термін обмежений l -індекс. При цьому вважатимемо, що l задовольняє таку умову (див. [2, 9])

$$(\forall (z_1, z_2) \in \Gamma): \quad l(z_1, z_2) > \frac{\beta}{1 - |z_1|},$$

де $\beta > 1$ – деяка стала, а також належить до класу \mathcal{Q} функцій l , які задовольняють умову

$$(\forall R = (r_1, r_2) \in [0, 1) \times [0, +\infty)): \quad 0 < \lambda_1(R) \leq 1 \leq \lambda_2(R) < \infty,$$

де

$$\lambda_1(R) = \inf_{(z_1^0, z_2^0) \in \Gamma} \inf \left\{ \frac{l(z_1, z_2)}{l(z_1^0, z_2^0)} : |z_1 - z_1^0| \leq r_1 / l(z_1^0, z_2^0), |z_2 - z_2^0| \leq r_2 \right\}, \quad (2)$$

$$\lambda_2(R) = \sup_{(z_1^0, z_2^0) \in \Gamma} \sup \left\{ \frac{l(z_1, z_2)}{l(z_1^0, z_2^0)} : |z_1 - z_1^0| \leq r_1 / l(z_1^0, z_2^0), |z_2 - z_2^0| \leq r_2 \right\}. \quad (3)$$

3. Один критерій обмеженості L-індексу. У цьому підрозділі доведемо один критерій обмеженості l -індексу.

Позначимо $T_\beta = [0, \beta) \times [0, +\infty)$, $\beta > 1$. Нехай $l \in \mathcal{Q}$. Для того, щоб аналітична функція F в Γ мала обмежений l -індекс необхідно і досить, щоб для кожного $R \in T_\beta$ існували $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ і $p_0 > 0$ такі, що для кожного $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \Gamma$ існує $(k_1^0, k_2^0) \in \mathbb{Z}_+^2$, $0 \leq k_1^0 + k_2^0 \leq n_0$, і

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2)} : k_1 + k_2 \leq n_0, |z_1 - z_1^0| = r_1 / l(z_1^0, z_2^0), |z_2 - z_2^0| = r_2 \right\} \leq \\ \leq \frac{p_0}{k_1^0! k_2^0!} \frac{|F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1^0, z_2^0)|}{l^{k_1^0}(z_1^0, z_2^0)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доведення. Нехай F має обмежений l -індекс $N = N(F, l, \Gamma) < \infty$. Для кожного фіксованого $R \in T_\beta$ позначимо

$$q = q(R) = \lfloor 2(N+1)(r_1 + r_2)(\lambda_1(R))^{-N} (\lambda_2(R))^{N+1} \rfloor + 1,$$

де $\lfloor x \rfloor$ – ціла частина дійсного числа x . Для $p \in \{0, \dots, q\}$ і $z^0 \in \Gamma$ позначимо

$$\begin{aligned} S_p(z^0, R) = \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N, |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\}, \\ S_p^*(z^0, R) = \max \left\{ \frac{|F^{(k)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1^0, z_2^0)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N, |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\}. \end{aligned}$$

Використовуючи (2), виводимо

$$\begin{aligned} S_p(z^0, R) = \\ = \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)| l^{k_1}(z_1^0, z_2^0)}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2) l^{k_1}(z_1^0, z_2^0)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N, |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq S_p^*(z^0, R) \max \left\{ \frac{l^N(z_1^0, z_2^0)}{l^N(z_1, z_2)} : |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\} \leq S_p^*(z^0, R)(\lambda_1(R))^{-N}.$$

також для (3), ми маємо

$$\begin{aligned} S_p^*(z^0, R) &= \\ &= \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)| l^{k_1}(z_1, z_2)}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2) l^{k_1}(z_1^0, z_2^0)} : k_1 + k_2 \leq N, |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2)} (\lambda_2(R))^{k_1} : k_1 + k_2 \leq N, |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\} \leq \\ &\leq S_p(z^0, R)(\lambda_2(R))^N. \end{aligned} \quad (5)$$

Нехай $K^{(p)} = (k_1^{(p)}, k_2^{(p)})$, $k_1^{(p)} + k_2^{(p)} \leq N$ і $(z_1^{(p)}, z_2^{(p)})$,
 $|z_1^{(p)} - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}$, $|z_2^{(p)} - z_2^0| = \frac{pr_2}{q}$, таке, що

$$S_p^*(z^0, R) = \frac{|F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)})}(z_1^{(p)}, z_2^{(p)})|}{k_1^{(p)}! k_2^{(p)}! l^{k_1^{(p)}}(z_1^0, z_2^0)}. \quad (6)$$

Вибираємо $\tilde{z}_1^{(p)} = z_1^0 + \frac{p-1}{p}(z_1^{(p)} - z_1^0)$ і $\tilde{z}_2^{(p)} = z_2^0 + \frac{p-1}{p}(z_2^{(p)} - z_2^0)$.

Тоді отримаємо

$$|\tilde{z}_1^{(p)} - z_1^0| = \frac{p-1}{p} |z_1^{(p)} - z_1^0| = \frac{p-1}{p} \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |\tilde{z}_2^{(p)} - z_2^0| = \frac{p-1}{p} |z_2^{(p)} - z_2^0| = \frac{(p-1)r_2}{q}, \quad (7)$$

$$|\tilde{z}_1^{(p)} - z_1^{(p)}| = |z_1^0 + \frac{p-1}{p}(z_1^{(p)} - z_1^0) - z_1^{(p)}| = \frac{1}{p} |z_1^0 - z_1^{(p)}| = \frac{r_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, \quad (8)$$

$$|\tilde{z}_2^{(p)} - z_2^{(p)}| = |z_2^0 + \frac{p-1}{p}(z_2^{(p)} - z_2^0) - z_2^{(p)}| = \frac{1}{p} |z_2^0 - z_2^{(p)}| = \frac{r_2}{q}.$$

З умови (7) ми маємо

$$S_{p-1}^*(z^0, R) \geq \frac{|F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)})}(\tilde{z}^{(p)})|}{k_1^{(p)}! k_2^{(p)}! l^{k_1^{(p)}}(z_1^0, z_2^0)}.$$

З умови (6) ми маємо

$$\begin{aligned} 0 \leq S_p^*(z^0, R) - S_{p-1}^*(z^0, R) &\leq \frac{|F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)})}(z^{(p)})| - |F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)})}(\tilde{z}^{(p)})|}{k_1^{(p)}! k_2^{(p)}! l^{k_1^{(p)}}(z_1^0, z_2^0)} = \\ &= \frac{1}{k_1^{(p)}! k_2^{(p)}! l^{k_1^{(p)}}(z_1^0, z_2^0)} \int_0^1 \frac{d}{dt} |F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)})}(\tilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \tilde{z}^{(p)}))| dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0, z_2^0)} \int_0^1 (|z_1^{(p)} - \tilde{z}_1^{(p)}| \cdot |F^{(k_1^{(p)}+1, k_2^{(p)})}(\tilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \tilde{z}^{(p)}))| + \\ &\quad + |z_2^{(p)} - \tilde{z}_2^{(p)}| \cdot |F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)}+1)}(\tilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \tilde{z}^{(p)}))|) dt = \\ &= \frac{1}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0, z_2^0)} (|z_1^{(p)} - \tilde{z}_1^{(p)}| \cdot |F^{(k_1^{(p)}+1, k_2^{(p)})}(\tilde{z}^{(p)} + t^*(z^{(p)} - \tilde{z}^{(p)}))| + \\ &\quad + |z_2^{(p)} - \tilde{z}_2^{(p)}| \cdot |F^{(k_1^{(p)}, k_2^{(p)}+1)}(\tilde{z}^{(p)} + t^*(z^{(p)} - \tilde{z}^{(p)}))|), \end{aligned}$$

де $0 \leq t^* \leq 1$ і $|\tilde{z}_1^{(p)} + t^*(z_1^{(p)} - \tilde{z}_1^{(p)}) - z_1^0| \leq \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)},$

$|\tilde{z}_2^{(p)} + t^*(z_2^{(p)} - \tilde{z}_2^{(p)}) - z_2^0| \leq \frac{pr_2}{q}.$ Для (z_1, z_2) таких, що

$|z_1 - z_1^0| \leq \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| \leq \frac{pr_2}{q}$ і $j = (j_1, j_2), j_1 + j_2 \leq N + 1$ ми маємо

$$\begin{aligned} &\frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1, z_2)| l^{j_1}(z_1, z_2)}{j_1! j_2! l^{j_1}(z_1^0, z_2^0) l^{j_1}(z_1, z_2)} \leq \\ &\leq (\lambda_2(R))^{j_1} \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N \right\} \leq \\ &\leq (\lambda_2(R))^{N+1} (\lambda_1(R))^{-N} \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1^0, z_2^0)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N \right\} \leq \\ &\leq (\lambda_2(R))^{N+1} (\lambda_1(R))^{-N} S_p^*(z^0, R). \end{aligned}$$

З умови (9) і (8) ми отримуємо

$$\begin{aligned} &0 \leq S_p^*(z^0, R) - S_{p-1}^*(z^0, R) \leq \\ &\leq (\lambda_2(R))^{N+1} (\lambda_1(R))^{-N} S_p^*(z^0, R) ((k_1^{(p)}+1)l_1(z_1^0, z_2^0) |z_1^{(p)} - \tilde{z}_1^{(p)}| + (k_2^{(p)}+1) |z_2^{(p)} - \tilde{z}_2^{(p)}|) = \\ &= (\lambda_2(R))^{N+1} (\lambda_1(R))^{-N} \frac{S_p^*(z^0, R)}{q(R)} ((k_1^{(p)}+1)r_1 + (k_2^{(p)}+1)r_2) \leq \\ &\leq (\lambda_2(R))^{N+1} (\lambda_1(R))^{-N} \frac{S_p^*(z^0, R)}{q(R)} (N+1)(r_1 + r_2) \leq \frac{1}{2} S_p^*(z^0, R). \end{aligned}$$

З цього випливає нерівність $S_p^*(z^0, R) \leq 2S_{p-1}^*(z^0, R)$, а зважаючи на нерівності (5) і (6), ми отримуємо

$$S_p(z^0, R) \leq 2(\lambda_1(R))^{-N} S_{p-1}^*(z^0, R) \leq 2(\lambda_1(R))^{-N} (\lambda_2(R))^N S_{p-1}(z^0, R).$$

Тому,

$$\max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1, z_2)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N, |z_1 - z_1^0| = \frac{pr_1}{ql(z_1^0, z_2^0)}, |z_2 - z_2^0| = \frac{pr_2}{q} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= S_p(z^0, R) \leq 2(\lambda_1(R))^{-N} (\lambda_2(R))^N S_{p-1}(z^0, R) \leq \dots \leq \\
&\leq (2(\lambda_1(R))^{-N} (\lambda_2(R))^N)^p S_0(z^0, R) = \\
&= (2(\lambda_1(R))^{-N} (\lambda_2(R))^N)^p \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z_1^0, z_2^0)} : 0 \leq k_1 + k_2 \leq N \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

З умови (10) ми отримали (4) для $p_0 = (2(\lambda_1(R))^{-N} (\lambda_2(R))^N)^q$ і деякого $k^0 = k_1^0 + k_2^0 \leq N$. Необхідність умови (4) є доведеною.

Доведемо достатність. Припустимо, що для кожного $R \in T_\beta$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+, p_0 > 1$ таке, що $\forall z_0 \in \Gamma$ і деякого $k_0 \in \mathbb{Z}_+, k_1^0 + k_2^0 \leq n_0$, нерівність (4) виконується.

З формули Коші випливає, що для $\forall z^0 \in \Gamma \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\frac{F^{(k_1+s_1, k_2+s_2)}(z_1^0, z_2^0)}{s_1! s_2!} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma(z^0, \frac{R}{L(z^0)})} \frac{F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)}{(z_1 - z_1^0)^{s_1+1} (z_2 - z_2^0)^{s_2+1}} dz_1 dz_2.$$

Тому, застосовуючи (4), ми маємо

$$\begin{aligned}
\frac{|F^{(k_1+s_1, k_2+s_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{s_1! s_2!} &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma(z^0, \frac{R}{L(z^0)})} \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)|}{|z_1 - z_1^0|^{s_1+1} |z_2 - z_2^0|^{s_2+1}} |dz_1| |dz_2| \leq \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma(z^0, \frac{R}{L(z^0)})} |F^{(k_1, k_2)}(z_1, z_2)| \frac{l^{s_1+1}(z^0)}{r_1^{s_1+1} r_2^{s_2+1}} |dz_1| |dz_2| \leq \\
&\leq \int_{\Gamma(z^0, \frac{R}{L(z^0)})} |F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1^0, z_2^0)| \frac{k_1! k_2! p_0 (\lambda_2(R))^{n_0} l^{s_1+k_1+1}(z^0)}{(2\pi)^2 k_1^0! k_2^0! r_1^{s_1+1} r_2^{s_2+1} l^{k_1^0}(z^0)} |dz_1| |dz_2| = \\
&= |F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1^0, z_2^0)| \frac{k_1! k_2! p_0 (\lambda_2(R))^{n_0} l^{s_1+k_1}(z^0)}{k_1^0! k_2^0! r_1^{s_1} r_2^{s_2} l^{k_1^0}(z^0)}.
\end{aligned}$$

З цього випливає

$$\frac{|F^{(k_1+s_1, k_2+s_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{(k_1+s_1)! (k_2+s_2)! l^{s_1+k_1}(z^0)} \leq \frac{(\lambda_2(R))^{n_0} p_0 k_1! k_2! s_1! s_2! |F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1^0, z_2^0)|}{(k_1+s_1)! (k_2+s_2)! r_1^{s_1} r_2^{s_2} k_1^0! k_2^0! l^{k_1^0}(z^0)}. \quad (11)$$

Очевидно, що

$$\frac{k_1! k_2! s_1! s_2!}{(k_1+s_1)! (k_2+s_2)!} = \frac{s_1!}{(k_1+1) \dots (k_1+s_1)} \frac{s_2!}{(k_2+1) \dots (k_2+s_2)} \leq 1.$$

Вибираємо $r_1 \in (1, \beta]$, $r_2 = \beta$.

$$\text{Отже, } \frac{(\lambda_2(R))^{n_0} p_0}{r_1^{s_1} r_2^{s_2}} \rightarrow 0 \text{ при } s_1 + s_2 \rightarrow +\infty.$$

Таким чином, існує s_0 таке, що при $s_1 + s_2 \geq s_0$ справедлива нерівність:

$$\frac{(\lambda_2(R))^{n_0} p_0 k_1! k_2! s_1! s_2!}{(k_1 + s_1)!(k_2 + s_2)! r_1^{s_1} r_2^{s_2}} \leq 1.$$

Тоді із нерівності (11) випливає така нерівність

$$\frac{|F^{(k_1+s_1, k_2+s_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{(k_1 + s_1)!(k_2 + s_2)! l^{k_1+s_1}(z^0)} \leq \frac{|F^{(k_1^0, k_2^0)}(z_1^0, z_2^0)|}{k_1^0! k_2^0! l^{k_1^0}(z^0)}.$$

Це означає, що для кожного $j \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\frac{|F^{(j_1, j_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{j_1! j_2! l^{j_1}(z^0)} \leq \max \left\{ \frac{|F^{(k_1, k_2)}(z_1^0, z_2^0)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z^0)} : k_1 + k_2 \leq s_0 + n_0 \right\}.$$

де s_0 і n_0 не залежать від z_0 . Тому, функція F має обмежений l -індекс $N \leq s_0 + n_0$.

Література

1. Bandura A.I., Bordulyak M.T., Skaskiv O.B. *Sufficient conditions of boundedness of L-index in joint variables*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 12–26. dx.doi.org/10.15330/ms.45.1.12-26
2. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, Lviv: VNTL Publishers, 1999, 141 p.
3. Bandura A., Skaskiv O. *Entire functions of several variables of bounded index*, Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2016, 128 p.
4. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analytic functions in the unit ball of bounded L-index: asymptotic and local properties*, Mat.Stud. **48** (2017), no. 1, 37–73. dx.doi.org/10.15330/ms.48.1.37-73
5. Bandura A., Skaskiv O. *Entire functions of bounded L-index: Its zeros and behavior of partial logarithmic derivative*, Journal of Complex Analysis, **2017** (2017), Article ID 3253095, 10 p. doi: 10.1155/2017/32530953253095
6. Bandura A., Skaskiv O. *Analytic in an unit ball functions of bounded L-index in joint variables*, J. of Math. Sci. **227** (2017), no. 1, 1–12. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3570-6
7. Bandura A., Skaskiv O. *Analytic functions in the unit ball. Bounded L-index in joint variables and solutions of systems of PDE's*. Beau-Bassin: LAP Lambert Academic Publishing, 2017, 100 p.
8. Gopala J. Krishna, S.M. Shah *Functions of bounded indices in one and several complex variables*, In: Mathematical essays dedicated to A.J. Macintyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio, 1970, 223–235.
9. Строчик С.Н., Шеремета М. М., Аналітичні в одиничному крузі функції обмеженого індексу, Допов. Акад. Наук України **1** (1993), 19–22.
10. V. O. Kushnir and M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded l-index*, Mat. Stud. **12** (1999), no. 1, 59–66.

11. A.I. Bandura, N.V. Petrechko, O.B. Skaskiv, *Analytic in a polydisc functions of bounded L-index in joint variables*, Mat.Stud. **46** (2016), no. 1, 72-80. dx.doi.org/10.15330/ms.46.1.72-80

*Стаття надійшла до редакційної колегії 14.06.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,
д.ф.-м.н., професором Чижиковим І.Е. (м. Львів)*

ANALYTIC FUNCTIONS IN $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ OF BOUNDED INDEX IN JOINT VARIABLES

A. I. Bandura¹, O. B. Skaskiv², V. L. Tsvigun²

¹*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*

76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 15;

e-mail: andriykopanytsia@gmail.com

²*Ivan Franko National University of Lviv;*

Lviv, Universytetska str., 1; e-mail: 12ivan@ukr.net

A concept of boundedness of L-index in joint variables is generalised for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. We proved criteria of boundedness of L-index in joint variables which describes local behaviour of partial derivative of the function and gives an estimate of maximum modulus of the derivative on a skeleton of polydisc by its value at the center of the bidisc.

Key words: *analytic function, bidisc, bounded L-index in joint variables, maximum modulus, partial derivative, Cauchy's integral formula, main polynomial*