

Математичне моделювання та обчислювальні методи

УДК 539.385+519.688

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА РОЗДВОЄННЯ МАКСИМУМУ ПОВЕРХНІ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ПЕРЕТИНІВ З ПЕРЕШІЙКАМИ

В.М. Сенічак, Р.Й. Ріпецький, В.В. Сенічак

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська 15;
тел. +38 (0342) 72-71-31; e-mail: math@iung.edu.ua*

В роботі проведено дослідження та комп'ютерний аналіз явища роздвоєння максимуму поверхні напружень Прандтля для круглого та квадратного стержнів з коловими виточками змінного радіуса.

***Ключові слова:** поверхня напружень Прандтля, спосіб переміщення симплексів.*

Мета даної роботи полягає у комп'ютерній реалізації ідеї поєднання мембранної аналогії Прандтля з математичним і програмним забезпеченням, що неперервно удосконалюється разом із прогресом у галузі електронно-обчислювальної техніки. З появою прискореного варіанту методу скінченних елементів (МСЕ) – способу переміщення симплексів (СПС) [1, 2] настала практична можливість не тільки комп'ютерної побудови поверхонь напружень Прандтля в задачах кручення пружних стержнів з поперечними перетинами довільної геометрії, але й наочного уявлення про характер розподілу напружень.

1. Історична довідка

Досліджуючи питання місцезнаходження максимального тангенсiального напруження при крученні Сен-Венан у своїх мемуарах відзначав, що такими точками є ті точки контура перетину, які розміщені найближче до осі скручуваного стержня. Однак у подальшому, в опублікованих в 1858 році статті та примітках до книги Нав'є, Сен-Венан зауважує, що це твердження не може бути узагальнене на будь-які поперечні перетини. Він звертає увагу, наприклад, на випадок рейкового профілю (рис. 1), де небезпечні точки із максимальним напруженням знаходяться не в найвужчому місці перетину, а на контурі у точках A приблизно на віддалі від центру ваги перетину [3].

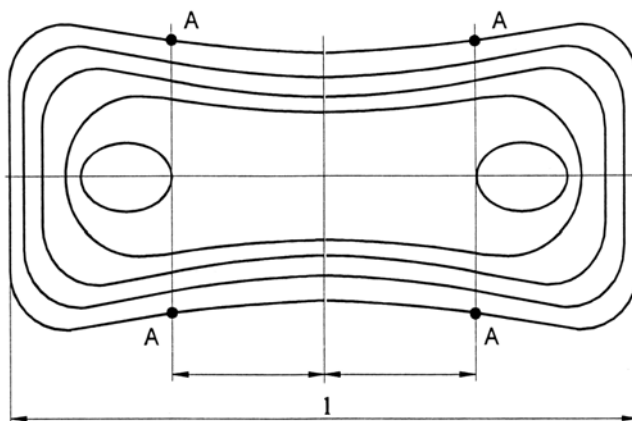


Рис. 1. Рейковий профіль

Подальші дослідження Файлона задачі кручення стержнів з поперечним перетином, обмеженим двома дугами еліпсів і дугами ортогональних до них гіпербол, підтвердили вищенаведені зауваження Сен-Венана. У [3] також відзначено, що, взагалі кажучи, переміщення небезпечних точок із максимальним напруженням найвужчої ділянки перетину може мати місце за наявності вгнутих частин у контурі поперечного перетину скручуваного стержня, тобто у випадку, коли “горб напружень” розпадається на дві окремі опуклі частини, відокремлені одна від одної западиною.

2. Задача Вебера

Розглядається область (рис. 2) [4], що складається з круга радіусом R , від якого відкинута область, утворена при проведенні з точки O на межі круга кола радіусом r .

Використовуючи полярну систему координат, функцію напружень Прандтля $U(x, y)$ вибрано у вигляді:

$$U(x, y) = \mu\tau \left[A\rho \cos \theta + \frac{1}{\rho} B \cos \theta - \frac{1}{2} \rho^2 + C \right], \quad (1)$$

де при $A = R$, $B = r^2 R$, $C = r^2$ функція $U(x, y)$ на межі області перетворюється в нуль, а отже, така функція $U(x, y)$ є розв’язком задачі кручення для даної області. У точці B_1 центральної частини виточки ($\rho = r$) та у точці B_2 ($\rho = 2R$) на випуклій частині контура дотичні напруження σ_{yz} будуть дорівнювати

$$\sigma_{yz}^{(1)} = \mu\tau(r - 2R), \quad \sigma_{yz}^{(2)} = \mu\tau \left(R - \frac{r^2}{4R} \right).$$

Якщо виточка дуже мала ($r \ll R$), то

$$\left| \sigma_{yz}^{(1)} \right| \approx 2\mu\tau R, \quad \left| \sigma_{yz}^{(2)} \right| \approx \mu\tau R.$$

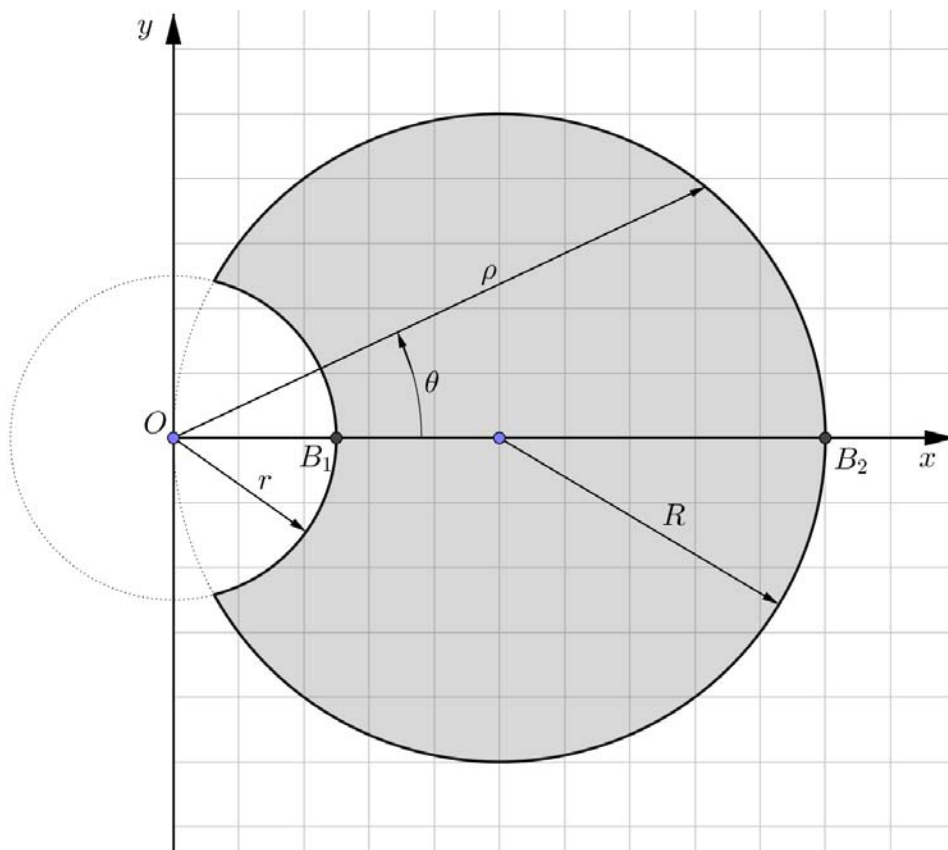


Рис. 2. Круглий стержень радіусом R з коловою виточкою радіусом r

У висновку зазначено, що будь-яка мала виточка практично не змінює напружень $\mu\tau R$ на межі круглого валу, натомість в центрі виточки напруження у два рази більші, тобто наявність навіть мініатюрної виточки суттєво впливає на міцність валу.

3. Комп'ютерний аналіз явища роздвоєння максимуму поверхні Прандтля

Розглянемо область, зображену на рис. 3, що складається з одиничного круга (із центром у початку координат), від якого відкинута область, утворені при проведенні з точок $B_{1(-1;0)}$ і $B_{2(1;0)}$ на межі круга кіл радіусом R_B . Значення R_B будемо надавати з кроком $\Delta R_B = 0,05$ починаючи з $R_B = 0,05$. Одночасно зі зміною R_B будемо слідкувати за зміною значень функції напружень Прандтля у точках A_1, A_2, \dots, A_{21} (у зв'язку із симетрією розглядуваної області відносно осі Ox до уваги беремо тільки верхню половину круга). Основні результати комп'ютерного аналізу подані у табл. 1. Наявні графічні засоби надають можливість візуального спостереження за процесом роздвоєння максимуму поверхні Прандтля на екрані дисплея.

Таблиця 1. Основні результати комп'ютерного аналізу значень функції напружень Прандтля для одиничного круга з коловими виточками радіуса R_B

$R_B - A_1$	0,05	0,2	0,25	0,45	0,5	0,65	0,7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,0488	0,0438	0,0424	0,042	0,0398	0,0357	0,0349
3	0,095	0,0852	0,0824	0,0815	0,0771	0,069	0,0674
4	0,1388	0,124	0,1198	0,1185	0,1119	0,0997	0,0973
5	0,18	0,1603	0,1547	0,153	0,1442	0,128	0,1247
6	0,2188	0,1942	0,1872	0,185	0,174	0,1537	0,1496
7	0,2551	0,2255	0,2171	0,2145	0,2013	0,177	0,1721
8	0,2888	0,2543	0,2445	0,2415	0,2261	0,1977	0,192
9	0,3201	0,2806	0,2695	0,266	0,2485	0,216	0,2094
10	0,3489	0,3045	0,2919	0,288	0,2683	0,2317	0,2244
11	0,3751	0,3258	0,3119	0,3075	0,2856	0,245	0,2368
12	0,3989	0,3446	0,3293	0,3245	0,3004	0,2557	0,2467
13	0,4077	0,361	0,3442	0,3343	0,2958	0,2268	0,2137
14	0,4265	0,364	0,3476	0,3489	0,3094	0,2385	0,225
15	0,4427	0,3787	0,3596	0,3272	0,2967	0,2251	0,2095
16	0,4565	0,39	0,3688	0,3037	0,2654	0,1874	0,1694
17	0,4677	0,3989	0,3741	0,3164	0,278	0,1988	0,1796
18	0,4765	0,4053	0,3793	0,3145	0,2823	0,2033	0,184
19	0,4827	0,4045	0,3725	0,3208	0,2885	0,2147	0,1919
20	0,4896	0,4071	0,3762	0,3245	0,2923	0,2185	0,1987
21	0,4909	0,4084	0,3775	0,3258	0,2935	0,2197	0,2

Аналіз значень функції напружень у точках A_1, A_2, \dots, A_{41} у процесі зміни радіуса колових виточок R_B показує, що для даної кругової області з діаметрально розміщеними коловими виточками роздвоєння максимуму “горба напружень” починається при $R_B > 0,2$, зокрема, при $R_B = 0,25$ максимальне значення отримують точки A_{18} і A_{24} : $U_{\max} = U(A_{18}) = U(A_{24}) = 0,3792981$.

Різниця значень U_{\max} і $U(A_{21})$ при цьому становить $U_{\max} - U(A_{21}) = 0,0018468$, що майже непомітно на екрані дисплея при графічному зображенні поверхні напружень. Подальші дослідження показали, що максимальні значення U_{\max} переміщуються спочатку у точки A_{14} і A_{28} ($0,35 < R_B \leq 0,50$), а потім у точки A_{12} і A_{30} ($0,5 < R_B \leq 0,7$). Зокрема, при $R_B = 0,7$ значення $U_{\max} = U(A_{12}) =$

$= U(A_{30}) = 0,2467271$, а $U(A_{21}) = 0,1999614$. Різниця $U_{\max} - U(A_{21}) = 0,0467657$. При подальшому зростанні R_B початкова область (одиничний круг) фактично розпадеться на дві окремі області з власними центрами ваги. На рис. 3 також відзначені місця виникнення точок A з максимальним дотичним напруженням у випадках $R_B = 0,25, 0,5, 0,65$. Зауважимо принагідно, що величина максимального дотичного напруження τ_{\max} залежить не тільки від геометрії перетину (зокрема, від R_B), але й від матеріалу стержня (межа міцності при крученні для різних металів різна), тому у кожному окремому випадку будуть свої критичні радіуси R_B .

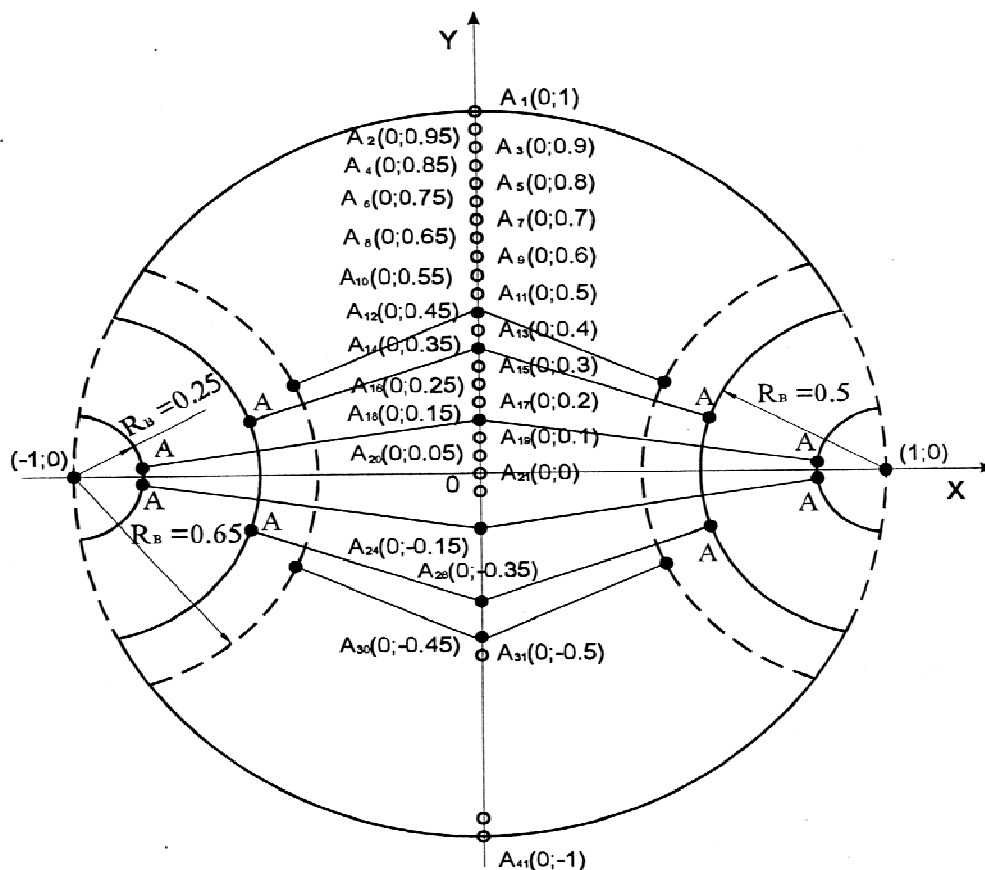


Рис. 3. Кругова область із коловими виточками радіуса R_B

Аналогічні комп'ютерні дослідження явища роздвоєння максимуму поверхні напружень Прандтля при крученні проведені для квадратного перетину зі стороною $a = 2$. Аналіз отриманих результатів у процесі зміни радіуса колових виточок R_B показує, що для квадратної області з діагонально розміщеними коловими виточками роздвоєння

максимуму поверхні Прандтля починається при $R_B > 0,6$, зокрема, при $R_B = 0,65$ максимальне значення отримують точки A_{14} і A_{28} : $U_{\max} = U(A_{14}) = U(A_{28}) = 0,4681537$. При цьому значення функції напружень в центрі кручення $U(A_{21}) = 0,4533052$. Якщо радіус колової виточки $R_B = 0,7$, то максимальне значення функції $U(x, y)$, яке тепер рівне $U_{\max} = 0,4652254$, залишається в точках A_{14} і A_{28} , а в центрі кручення $U(A_{21}) = 0,4528207$. І хоча переміщення максимуму не відбулося, зі зменшенням площі поперечного перетину стержня спостерігаємо логічне зменшення значень функції напружень Прандтля.

У складній області з перешийком відбувається перерозподіл дотичних напружень на межі області і це пов'язано саме з порушенням уні-модальності поверхні Прандтля. СПС добре відчуває це явище, а обчислювальні експерименти дають змогу встановити критичне співвідношення характерних розмірів перетину, при якому можливе роздвоєння максимуму. Всі розрахунки проводились з використанням комп'ютерної програми "Розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона способом переміщення симплексів", написаної мовою програмування високого рівня.

Висновки

Аналіз отриманих комп'ютерних результатів підтверджує дослідження Сен-Венана, Файлона та багатьох інших видатних вчених стосовно виникнення та місцезнаходження точок із максимальним дотичним напруженням для перетинів з перешийками. Практична реалізація мембранної аналогії дає можливість експериментально вивчати напружений стан стержнів, на форму контура яких не накладаються жодні обмеження, та отримати задовільні числові результати для оцінки максимальних дотичних напружень та крутного моменту. Наявність сучасних графічних засобів дає змогу візуально спостерігати за процесом переміщення небезпечних точок на контурі досліджуваної області та роздвоєнням і переміщенням максимуму поверхні Прандтля.

Література

1. Сенічак В.М. Побудова базисних функцій тривимірного симплекс-елемента / В.М. Сенічак, В.В. Сенічак // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – Івано-Франківськ, 2017. – №1(37). – С. 91-97.
2. Сенічак В.М. Ймовірнісна інтерпретація скінченно-різницевої та скінченно-елементних апроксимацій у крайових задачах еліптичного типу / В.М. Сенічак, В.В. Сенічак // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – Івано-Франківськ, 2017. – №2(38). – С. 57-70.
3. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М.: Физматиз, 1963. – 686 с.

4. Божидарник В.В. Елементи теорії пружності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 08.05.2018 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. **Мойсишиним В.М.**,
к.т.н., доцентом **Левчук К.Г.** (м. Київ)*

**PRANDTL'S SURFACE MAXIMUM'S SPLIT
FOR THE INTERSECTIONS WITH ISTHMUSES**

V. M. Senychak, R. Y. Ripetsky, V. V. Senychak

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua*

The thesis presents a research and computer analysis for the bifurcation phenomenon of the Prandtl's stress surface's maximum for the rounded and square rods with circular rifling of variable radius.

Key words: *Prandtl's stress surface, simplex rotation method.*