УДК 517.53
DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-17-20

СТІЙКІСТЬ ДЕФЕКТІВ ЦІЛОЇ КРИВОЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

І. Є. Овчар, Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. (03422) 42123; e-mail: mh@nung.edu.ua

При лінійному перетворенні аргумента природно очікувати незмінності основних характеристик цілої кривої, зокрема, й дефектів. Питаннями зміни дефектів мероморфної функції при лінійному перетворенні аргумента займалися Дюге, Гольдберг та ін. Отримано неочікувані, на перший погляд, результати про зміну дефектів мероморфної функції при лінійному перетворенні аргумента. Авторами цієї статті раніше побудовано цілу криву нескінченного порядку, для якої при лінійному перетворенні аргумента величина дефекта для фіксованого вектора змінюється. В даній статті побудовано цілу криву першого порядку, для якої певний вектор не буде неванліннівським дефектним, а при лінійному перетворенні аргумента уже є дефектним.

Ключові слова: *мероморфна функція, ціла крива, характеристика росту, функція наближення, неванліннівський дефектний вектор, величина дефекта.*

В даній статті використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1]. Розглядаємо цілі криві з лінійно незалежними компонентами без спільних нулів.

В роботі [2] вивчалось питання щодо зміни величин дефектів при переході від цілої кривої $\vec{G}(z): \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$ до $\vec{G}(\lambda z+\beta)$, де $\lambda, \beta \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \neq 0$. Показано, що при переході від $\vec{G}(z)$ до $\vec{G}(\lambda z)$ дефекти в розумінні Неванлінни та Валірона не змінюються для трансцендентних цілих кривих. Тому множини неванліннівських та валіронівських і, тим більше, пікарівських та борелівських виключних значень для $\vec{G}(z)$ і $\vec{G}(\lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ співпадають.

Отже, достатньо обмежитись порівнянням дефектів для цілих кривих $\vec{G}(z)$ і $\vec{G}(z+h)$.

В [2] побудовано цілу криву $\vec{G}(z)$ нескінченного порядку, для якої величина дефекта інша, ніж для кривої $\vec{G}_h(z)=\vec{G}(z+h)$ для одного і того ж вектора.

В даній роботі ми побудуємо цілу криву $\vec{G}(z)$ першого порядку, таку, що $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)=0$, $\delta\left(\vec{a},\vec{G}_{-2}\right)=1$ для вектора $\vec{a}=\left(1,0,\dots,0,0\right)\in \boldsymbol{C}^p$.

Розглянемо мероморфну функцію

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{r_k}\right)^{n_k}\right)\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{m_j},$$

де послідовності (r_κ), (n_κ), (a_j), (b_j), (m_j) виберемо такими, щоб функція $f(z)$ була першого порядку максимального типу і

$$\delta(\infty,f)=0,\ \ \delta(\infty,f_{-2})=1, \tag{1}$$

де $f_{-2}(z)=f(z-2)$ (див. приклад 2 на ст. 201 в [3]). Для зручності беремо усі $a_j\neq 0$. Зауважимо, зокрема, що, відповідно до побудови $f(z)$ в [3], маємо:

$$N(r_k,\infty,f)\sim T(r_k,f),\quad r_\kappa\to\infty \ \text{ при } \ \kappa\to\infty, \tag{2}$$

$$N(r,\infty,f_{-2})=o\left(T(r,f_{-2})\right),\ \ r\to\infty. \tag{3}$$

Візьмемо цілу функцію (ст. 15 в [4])

$$g(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(F\left(\frac{z}{a_j};s_j\right)\right)^{m_j},$$

де послідовність натуральних чисел (s_j) така, щоб ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_j}\right|^{s_j+1}$ рівномірно збігався в будь-якій обмеженій області, а

$$F(u;s)=(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u_s}{s}},\ \ G(u;0)=(1-u).$$

Очевидно, нулі функції g, з врахуванням їхньої кратності, співпадають з полюсами функції f, отже,

$$N(r,0,g)=N(r,\infty,f), \tag{4}$$

$$N(r,0,g_{-2})=N(r,\infty,f_{-2}). \tag{5}$$

Також зрозуміло, що функція $g(z)\cdot f(z)$ є цілою і не має спільних нулів з функцією $g(z)$.

Покажемо, що ціла крива

$$\vec{G}(z)=\left(g(z),z\cdot g(z),\dots,z^{p-2}\cdot g(z),g(z)\cdot f(z)\right) \tag{6}$$

є шуканою.

Легко переконатись, що компоненти цієї цілої кривої лінійно незалежні та не мають спільних нулів.

Враховуючи, що $\ln r = o\left(T\left(r,f\right)\right)$ при $r\to\infty$, маємо:

$$T\left(r,\vec{G}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2\left(1+\left|re^{i\varphi}\right|^2+\ldots+\left(\left|re^{i\varphi}\right|^{p-2}\right)^2+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2\right)\right)^{1/2}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\left(1+r^2+\ldots+\left(r^{p-2}\right)^2+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2\right)\right)^{1/2}d\varphi .$$

За теоремою Ієнсена ([4], ст. 24), і, враховуючи (4), маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\left(1+r^2+\ldots+\left(r^{p-2}\right)^2+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2\right)\right)^{1/2}d\varphi=$$

$$=N\left(r,0,g\right)+O\left(\ln r\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=N\left(r,\infty,f\right)+O\left(\ln r\right)+m\left(r,\infty,f\right).$$

Отже,

$$T\left(r,\vec{G}\right)=T\left(r,f\right)+O\left(\ln r\right)=\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r,f\right),\quad r\to\infty . \tag{7}$$

Аналогічно отримуємо

$$T\left(r,\vec{G}_{-2}\right)=\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r,f_{-2}\right),\quad r\to\infty . \tag{8}$$

Очевидно, для вектора $\vec{a}=\left(1,0,\ldots,0,0\right)$ маємо $\vec{G}\left(z\right)\cdot\vec{a}=g\left(z\right)$, $\vec{G}_{-2}\left(z\right)\cdot\vec{a}=g_{-2}\left(z\right)$. Тому, враховуючи (4) та (5), дістаємо

$$N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)=N\left(r,0,g\right)=N\left(r,\infty,f\right), \tag{9}$$

$$N\left(r,\vec{a},\vec{G}_{-2}\right)=N\left(r,0,g_{-2}\right)=N\left(r,\infty,f_{-2}\right). \tag{10}$$

Тоді із (2), (7) та (9) знаходимо

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{N\left(r_\kappa,\vec{a},\vec{G}\right)}{T\left(r_\kappa,\vec{G}\right)}=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{N\left(r_\kappa,\infty,f\right)}{\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r_\kappa,f\right)}=1,\text{ звідки}$$

$$\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)}{T\left(r,\vec{G}\right)}=1-1=0 .$$

Із (3), (8) та (10) отримуємо

$$\delta\left(\vec{a},\vec{G}_{-2}\right)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\vec{a},\vec{G}_{-2}\right)}{T\left(r,\vec{G}_{-2}\right)}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\infty,f_{-2}\right)}{\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r,f_{-2}\right)}=$$

$$=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{o\left(T\left(r,f_{-2}\right)\right)}{\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r,f_{-2}\right)}=1-0=1 .$$

Ми показали, що для цілої кривої (6) вектор $\vec{a} = (1, 0, \dots, 0, 0)$ не буде дефектним в розумінні Неванлінни, а $\delta\left(\vec{a}, \vec{G}_{-2}\right) = 1$.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые. Ч.: Вища школа, – 1984. – 136 с.
2. Овчар І.Є., Савчук Я.І. Стійкість дефектів цілої кривої скінченного порядку // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2018. – №1(45). – с. 17-20.
3. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М., ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Чижиковим І.Е.*** *(м. Львів)*

STABILITY OF THE DEFECTS OF A FIRST-ORDER WHOLE CURVE

I. Ye. Ovchar, Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpathians str., 15;
ph. +380 (3422) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

When linearly transforming the argument of a whole curve, it is naturally to expect the invariability of the main characteristics of the curve, particularly its defects. The questions of the change of defects of meromorphic functions with linear transformation of the argument were taken by Dyugo, Goldberg and others. The unexpected, at first glance, results of a change in the defects of a meromorphic function under linear transformation of the argument, are obtained. The authors of this article have previously constructed a whole curve of infinite order, for which the magnitude of the defect of a given vector under the linear transformation of the argument is being changed. In this paper, the first order whole curve is constructed, such that, on the one hand, a certain vector will not be Nevanlinna's defective , while on the other hand, it is defective under the linear transformation of the argument.

Key words: *meromophic function, whole curve, growth's characterisric, approximation function, Nevanlinna's defective vector, magnitude of a defect.*