УДК: 372.851.75

В.С. Гарвацький, І.В Калашніков, С.В Лужанська
м. Вінниця, Україна

ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

Стаття присвячена питанням введення дійсних чисел у шкільний курс алгебри, оскільки наявні шкільні підручники повною мірою їх не висвітлюють.

Одним із ключових питань, яке постає перед побудовою множини дійсних чисел, це питання розширення множини раціональних чисел, яка може здаватися, повністю задовольняє потреби людини. На перший погляд, здається, що множина раціональних чисел є неперервною, оскільки між будь-якими двома раціональними числами можемо вставити деяке раціональне число. Насправді, цей факт не означає, що множина раціональних чисел неперервна, але це означає, що вона *щільна*, тобто між будь-якими нерівними раціональними числами α і β міститься, по крайній мірі, одне раціональне число.

Методику аргументації того факту, що множина раціональних чисел є неперервною і що є зміст її розширювати до неперервної множини дійсних чисел ми і поставили за **мету даної статті.**

Перед послідовним викладом вище зазначеного матеріалу нам буде потрібне розуміння читачем поняття щільної множини, яке було описане вище, інтуїтивно зрозумілого поняття упорядкованої множини раціональних чисел за відношенням «$\le$» і архімедівськи розміщеної множини.

Означення 1. Множина раціональних чисел архімедівськи розміщена, якщо для будь-яких раціональних чисел $\alpha=\dfrac{a}{b}$ *і* $\beta=\dfrac{c}{d}$, *де* a,b,c,d *– цілі числа і* $b\neq 0,\ d\neq 0$, *причому* $\beta>0$, *існує натуральне число* n, *таке, що* $\beta\cdot n>\alpha$.

Існують різні рівносильні, між собою шляхи визначення неперервності розміщеної множини, зокрема, множини раціональних чисел. Для розгляду одного з них доцільно скористатися поняттям перерізу Дедекінда.

Означення 2. Перерізом Дедекінда упорядкованої множини M *називається пара підмножин* M_1 *і* M_2 *множини* M, *які задовольняють умовам:*

1. M_1, M_2 *– непорожні підмножини, тобто* $M_1\neq\varnothing$, $M_2\neq\varnothing$;

2. Кожен елемент множини M *належить одній і тільки одній з цих підмножин, тобто:* $M_1\bigcup M_2=M,\ M_1\bigcap M_2=\varnothing$;

3. Кожен елемент множини M_1 *менший будь-якого елемента множини* M_2, *тобто, якщо* $\alpha\in M_1$ *і* $\beta\in M_2$ *то* $\alpha<\beta$.

Для спрощення подальших записів переріз Дедекінда позначатимемо так: (M_1, M_2).

Без коментарів розглянемо приклади, які роз'яснюють суть цього означення на прикладі множини натуральних чисел N, яка упорядкована відношенням «$\le$».

Приклад 1. $(\mathrm{N};\le)$ $N_1=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5\},\quad N_2=\{6,7,8...\},\ (N_1,N_2)$ – переріз Дедекінда.

Приклад 2. $(\mathrm{N};\le)$ $N_1=\{1;3;5;7;...\},\quad N_2=\{2;4;6;8...\}\quad (N_1,N_2)$ – не є перерізом Дедекінда.

Якщо (M_1, M_2) – переріз Дедекінда упорядкованої множини M, то M_1 часто називають нижнім класом перерізу, а M_2 верхнім класом перерізу, відповідно до цього можуть бути такі випадки:

1. У нижньому класі M_1 є найбільший елемент, а у верхньому класі є найменший. У цьому випадку говорять, що переріз зв'язаний із стрибком;
2. У нижньому класі є найбільший елемент, а у верхньому немає найменшого;
3. У нижньому класі немає найбільшого елемента, а у верхньому є найменший; у цих двох випадках, другому і третьому, говорять, що перерізи мають межу або зв'язані з межею.
4. У нижньому класі немає найбільшого елемента, а у верхньому найменшого. Кажуть, що переріз зв'язаний з розривом.

Відповідно до вище зазначених чотирьох ситуацій сформулюємо деякі теореми.

Теорема 1. Не існує перерізу розміщеної множини Q раціональних чисел, зв'язаного із стрибком.

Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що (Q_1, Q_2) – переріз розміщеної множини Q, зв'язаний із стрибком. Це означає, що в Q_1 є найбільший елемент α, а в Q_2 – найменший елемент β, (мал. 1), причому $\alpha < \beta$. Тоді матимемо:

$$\alpha < \beta;$$

$$\alpha + \alpha < \beta + \alpha;$$

$$2\alpha < \beta + \alpha;$$

$$\alpha < \frac{\beta + \alpha}{2} \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{2} \in Q_2;$$

$$\alpha < \beta;$$

$$\beta + \alpha < \beta + \beta;$$

$$\beta + \alpha < 2\beta;$$

$$\frac{\beta + \alpha}{2} < \beta \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{2} \in Q_1.$$

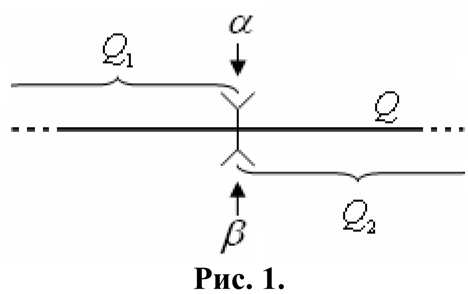

Рис. 1.

Отже, наше припущення хибне, оскільки один і той самий елемент не може належати двом множинам одночасно, другий пункт означення перерізу Дедекінда, таким чином теорему доведено.

Теорема 2. Існують перерізи розміщеного поля Q раціональних чисел, зв'язані з межею.

Доведення. Віднесемо наприклад, до нижнього класу Q_1 всі від'ємні раціональні числа, число нуль і всі додатні числа, менші $\frac{5}{2}$, а до верхнього класу Q_2 – всі інші раціональні числа. $\frac{5}{2}$ – це межа перерізу (Q_1, Q_2), отже теорему доведено.

Теорема 3. Існують перерізи розміщеного поля Q, зв'язані з розривом.

Доведення. Покажемо спочатку, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Достатньо встановити цей факт для невід'ємних раціональних чисел. До речі, серед невід'ємних цілих чисел такого числа не існує, дійсно нехай $a \in Z$, якщо $a \le 1$, то $a^2 \le 1^2 < 2$, якщо $a \ge 2$ то $a^2 \ge 2^2 > 2$, тобто $a^2 \ne 2$.

Припустимо, що серед невід'ємних дробових чисел є таке число α, що $\alpha^2 = 2$. Зрозуміло, що число α можна визначити різними дробами; серед них виберемо дріб $\frac{p}{q}$ – дріб з найменшим знаменником, причому p і q – натуральні числа, цей факт є наслідком того, що істинність теореми достатньо встановити для невід'ємних раціональних чисел. Дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний, оскільки p і q взаємно прості; інакше, скоротивши б його, ми отримали б дріб із ще меншим знаменником. По припущенню $\alpha^2 = 2$, тобто $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, звідки $\frac{p^2}{q^2} = 2$, $p^2 = 2q^2$. Остання рівність означає, що $p^2 \vdots 2$, тоді $p \vdots 2$, звідси $p = 2m$, тобто $p^2 = 4m^2$. Порівнявши $2q^2$ і p^2 маємо $2q^2 = 4m^2$, $q^2 = 2m^2$, звідси $q^2 \vdots 2$, а тому $q \vdots 2$. Отримали: p і q діляться на 2, а це суперечить тому, що дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний.

Отримана суперечність свідчить про те, що наше припущення неправильне, а тому $\alpha^2 \ne 2$, тобто квадрат будь-якого раціонального числа або більший за 2, або менший за 2. Фактично ми вказали на розрив у множині Q і тим самим побачили що множина раціональних чисел не є неперервною.

Приступимо тепер до доведення теореми безпосередньо. До нижнього класу Q_1 віднесемо всі від'ємні раціональні числа, нуль і будь-які додатні раціональні числа, квадрат яких менший за 2, а до верхнього класу Q_2 – всі додатні раціональні числа, квадрат яких більше за 2. Зрозуміло, що

(Q_1, Q_2) – буде перерізом Дедекінда розміщеного поля Q, тому, що:

1. $Q_1 \ne \varnothing,\ Q_2 \ne \varnothing$;
2. $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing,\ Q_1 \cup Q_2 = Q$;
3. $\alpha \in Q_1\ \beta \in Q_2 \Rightarrow \alpha < \beta$.

Покажемо, що переріз (Q_1, Q_2) поля Q зв'язаний із розривом, тобто у нижньому класі Q_1 немає найбільшого елемента, а у верхньому класі Q_2 немає найменшого.

Покажемо, що у нижньому класі Q_1 немає найбільшого елемента. Припустимо протилежне, тобто, що у нижньому класі Q_1 є найбільший елемент a, цим самим ми визначаємо, що $a > 0$ і $a^2 < 2$. Побудуємо раціональне число $a_1 = \dfrac{a(a^2+4)}{2(a^2+1)}$. Встановимо, до якого класу воно належить. Для цього знайдемо різницю $a_1 - a = \dfrac{a(a^2+4)}{2(a^2+1)} - a = \dfrac{a(2-a^2)}{2(a^2+1)}$, очевидний факт, що чисельник і знаменник цього дробу більші за нуль, тому і весь дріб більший нуля. Якщо $a_1 - a > 0$, то $a_1 \in Q_2$.

В той же час, якщо розглянути різницю $a_1^2 - 2$ то матимемо

$$a_1^2 - 2 = \frac{a^2(a^4+8a^2+16)}{4(a^4+2a^2+1)} - 2 = \frac{a^6+8a^4+16a^2-8a^4-16a^2-8}{4(a^2+1)^2} = \frac{a^6-8}{4(a^2+1)^2} < 0$$

Якщо $a_1^2 - 2 < 0$, то слідує, що $a_1^2 < 2$, тобто $a_1 \in Q_1$. Один і той самий елемент належить двом різним класам, що суперечить другій умові означення перерізу Дедекінда. Припущення, що у нижньому класі Q_1 є найбільший елемент – хибне, отже, в Q_1 немає найбільшого елемента.

Припустимо тепер, що у верхньому класі Q_2 є найменший елемент b. Розглянемо раціональне число виду $b_1 = \dfrac{b(b^2+4)}{2(b^2+1)}$, аналогічно можна показати, що $b_1 \in Q_1$ і $b_1 \in Q_2$, що знову суперечить другій умові означення перерізу Дедекінда.

Отже, наш переріз (Q_1, Q_2) зв'язаний з розривом, тобто не має межі, теорему доведено.

Зауваження. Межею цього перерізу є дійсне число $\sqrt{2}$, але $\sqrt{2}$ не є раціональним числом, це нами було доведено вище.

Таким чином побудований нами переріз (Q_1, Q_2) не має в Q границі, тобто немає у множині раціональних чисел числа, яке б зробило цей переріз. Ще раз повторимось, що цей переріз зв'язаний з розривом, і тому множина раціональних чисел перервна.

Відзначимо, що у множині раціональних чисел існує скільки завгодно таких перерізів. Можна замість числа 2 взяти будь-яке інше просте число, або добуток простих чисел, довівши, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює якому-небудь із цих чисел. Замість квадрата можна розглядати й інші степені.

На основі вище викладених міркувань дамо означення неперервної числової множини.

Означення 3. Числова множина називається неперервною, якщо будь-який переріз Дедекінда цієї множини має межу, яка належить цій самій множині.

Із теореми 3 і означення 3 слідує, що множина раціональних чисел не володіє властивістю неперервності. Звідси і постає задача – розширити множину раціональних чисел так, щоб нова множина була неперервною, саме архімедівськи розміщена неперервна множина, яка вміщує множину Q, якраз і називається множиною дійсних чисел.

У статті розглядаються питання пов'язані із розширенням множини раціональних чисел до множини дійсних чисел в курсі алгебри середньої школи.

The article deals with the questions connected with the enlargement of the set of rational real numbers in the course of algebra of secondary school.