УДК 373.5-091.322:517.968

О.В. Гавриліна
м. Ялта, Україна

ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ У ПРОЦЕСІ ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Постановка проблеми. Проблему формування дослідницьких умінь у процесі навчання математики в старшій школі не можна розглядати без урахування вікових психологічних особливостей старшого шкільного віку. В.Давидов зазначає, що «кожному періоду дитинства відповідає своя особлива провідна діяльність, яка обумовлює головні зміни особистості дитини в цьому віці. У старшому шкільному віці – це суспільно-корисна діяльність в сукупності її основних форм (художньої, спортивної, навчальної, трудової)» [6].

Аналіз дослідження. Аналіз психолого-педагогічної літератури з цього питання свідчить про те, що підлітковий вік – це вік допитливого розуму, жадібної тяги до знань, вікової кипучої енергії, бурхливої активності, ініціативи, спраги діяльності. І.Кон і Д.Фельдштейн зазначають: «Помітного розвитку в цей період набувають вольові риси характеру: наполегливість у досягненні мети, уміння долати перешкоди і труднощі. На відміну від молодшого школяра підліток здатний не тільки до окремих вольових дій, а й до вольової діяльності. Він часто може сам ставити перед собою цілі, сам планує їх досягнення, однак, недостатність волі відчувається, насамперед, у тому, що проявляючи наполегливість в одному виді діяльності, підліток не може проявити її в інших видах» [1, с. 367].

Мета статті. Проаналізувати психолого-дидактичні та методичні основи дослідницької діяльності старшокласників у процесі проблемного вивчення елементів інтегрального числення.

Виклад основного матеріалу дослідження. У сучасних умовах завдання навчання виходить за рамки забезпечення учнів необхідним запасом знань і доповнюється новою вимогою – виробити в учнів потребу постійного поповнення та оновлення знань, розвинути навички творчої розумової діяльності. Ця вимога обумовлена станом науково-технічного прогресу і випливає з такої закономірності, як об’єктивна необхідність планомірного та цілеспрямованого розвитку творчих здібностей усіх членів суспільства. Школа має формувати елементи творчості у пізнавальній діяльності. Для залучення всіх учнів у процес творчого пізнання необхідно включати у викладання математики різні види дослідницької діяльності.

Доцільність застосування різноманітних методів навчання диктується психологічними особливостями учнів, пов’язаними з їх підлітковим і юнацьким віком. Згідно з даними психології [4], у цьому віці вимога різноманітної діяльності є рисою особистості учня.

Методами навчання, найбільш відповідними особливостям цього віку, є пошукові, евристичні або частково-пошукові, дослідницькі методи, які надають молоді можливість самим шукати шляхи вирішення навчальних проблем. В. Крутецьким був проведений аналіз вікових особливостей розвитку математичних здібностей школярів за наступними параметрами: формалізоване сприйняття математичного матеріалу, узагальнення математичного матеріалу, згорнутість математичного мислення, тенденція мислити в процесі математичної діяльності згорнутими структурами, гнучкість розумового процесу, прагнення до своєрідної економії розумових зусиль, до витонченості рішень, математична пам’ять [2].

У старшому шкільному віці учні здатні емпірично узагальнювати конкретний матеріал. На прикладі методики навчання рішенню задач це виглядає так. Учням пропонують вирішити велику серію однотипних задач, у процесі їх рішення вони йдуть до усвідомлення способу вирішення даного типу. Наприклад, пропонуючи учням вирішити кілька прикладів:

1. Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 3x^2 - x + 5;$

2) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x;$

3) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + x^2$ проміжку $(0; +\infty);$

4) $f(x) = \left(6x + \dfrac{1}{2}\right)^3;$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right);$

Інші потребують деяких незначних перетворень:

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty; 0);$

7) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1};$

8) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ на проміжку $(0; +\infty);$

9) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty; 0);$

10) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$ на проміжку $(-\infty; 2].$

Розв'язавши дані приклади, учні приходять до висновку, що під час знаходження первісної функції іноді достатньо використовувати таблицю первісних функцій. На більш складніших прикладах вираз треба підготувати для використання певної формули із таблиці первісних.

За висновками В. Крутецького, такий тип узагальнень характерний для учнів із середніми здібностями і не здатних до математики. А для здібних до математики старших школярів характерні не тільки емпіричні узагальнення, а й змістовні. На прикладі методики навчання рішенню задач змістове узагальнення, як зазначає В. Осинська, відбувається наступним чином: «Виділяється опорне, вузлове завдання даного типу. Після цього необхідно навчити школярів розв'язувати цю задачу особливим способом. Коли учні проаналізують істотні зв'язки умови задачі і принципи вирішення задач подібного типу, то вони будуть вирішувати всі аналогічні завдання, підводячи їх умову під відомий їм тепер загальний спосіб дії» [3]. Звертаючись до вивчення елементів інтегрального числення, прикладом опорного завдання можу бути такі завдання:

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty);$

Проблема. У даному випадку пряме використання таблиці первісних неможливе.

Гіпотеза. Для використання таблиці первісних треба розбити даний дрібний вираз на складові частини, для яких можливо знайти первісну, використовуючи таблицю первісних функцій.

Доказ гіпотези. Застосуємо «Метод розкладання»:

$$\int (a\ f_1(x) + b\ f_2(x))\,dx = a\int f_1(x)\,dx + b\int f_2(x)\,dx, \qquad a, b \neq 0. \qquad (1)$$

Використовуючи формулу (1) отримуємо такий вираз:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = x - 2 + \frac{1}{x};$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| + C.$$

Відповідь $: \dfrac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| + C.$

Приклад 11) є пропедевтичним етапом перед рішенням більш складних виразів, його актуально розібрати учителю разом із учнями на дошці для розуміння алгоритму застосування «Методу розкладання».

Покажемо на прикладах 12), 13) рішення більш складних завдань «Методом розкладання»:

12) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x - 1}$ на проміжку $(1; +\infty)$;

Проблема. У даному випадку пряме використання таблиці первісних неможливе, тому маємо можливість використовувати «Метод розкладання». Як дану функцію розкласти на складові частини, коли знаменник дробу є двочленом.

Гіпотеза 1. А тоді як дану функцію перетворити у дріб так, щоб не змінилось значення виразу та одночасно призвести дріб до скорочення для використовування формули скороченого множення.

Гіпотеза 2. Приклад 12 також можливо розв’язати діленням многочлена на многочлен.

Доказ гіпотез.

1) Розбиваємо вираз на складові:

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - 1} = \frac{x^3}{x - 1} + \frac{x}{x - 1} + \frac{1}{x - 1};$$

Готуємо чисельник для використання формули скороченого множення:

$$\frac{x^3 - 1 + 1}{x - 1} + \frac{x - 1 + 1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{\left(x^3 - 1\right)}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x - 1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = x^2 + x + 1 + 1 + \frac{3}{x - 1} =$$

$$= x^2 + x + 2 + \frac{3}{x - 1}.$$

Застосовуємо таблицю первісних:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x - 1| + C.$$

Відповідь: $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x - 1| + C$

Висновок: Гіпотеза 1 – істинна.

2) Доведемо істинність Гіпотези 2.

$x^3+x+1 \mid x-1$

$-\qquad\qquad |x^2+x+2$

x^3-x^2

x^2+x+1
-
x^2-x
$2x+1$
-
$2x-2$

$$x^2+x+2+\frac{3}{x-1}.$$

3 Результат обчислення:
Застосовуємо таблицю первісних:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+C.$$

Відповідь: $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|+C$

Висновок: Використовуючи метод поділу многочленів, отримали функцію, первісну якої можна знайти табличним способом, отже Гіпотеза 2 - істинна.

13) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x}$ на проміжку (-∞;-3).

Проблема. Як на даному прикладі застосувати «Метод розкладання» на складові, якщо дана дріб відрізняється від попередніх тим, що чисельник константа.

Гіпотеза. Перетворити дріб так, щоб у чисельнику дробу з'явилась змінна.

Доказ гіпотез.

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot\left(x^2+3x\right)}=\frac{3+x-x}{3\cdot(x^2+3x)}=\frac{x+3}{3\cdot(x^2+3x)}-\frac{x}{3\cdot(x^2+3x)}=$$

$$=\frac{x+3}{3x\cdot(x+3)}-\frac{x}{3x\cdot(x+3)}=\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\cdot(x+3)};$$

$$F(x)=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+3|+C=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{|x|}{|x+3|}\right)+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\left(\ln\frac{|x|}{|x+3|}\right)+C.$

Розв'язуючи ці приклади, учні приходять до розуміння необхідності аналізу трьох можливих випадків, і тоді всі інші приклади вирішують без особливих зусиль.

В. Крутецький також відзначає, що в старшому шкільному віці потреба в узагальненні набагато вище і «в разі вибору між витонченим, але єдиним рішенням і більш складним, але загальним, багато учнів схильні до другого, настільки високо вони цінують фактор спільності» [2]. Наші спостереження також показали, що для середніх і відстаючих у навчанні старшокласників характерний досить високий рівень здібностей до узагальнення. Тільки на відміну від здібних учнів, для яких характерний шлях змістових, теоретичних узагальнень, для них характерний шлях емпіричних узагальнень, а для вивчення елементів інтегрального обчислення важливим є як побудова емпіричних узагальнень, так і змістових.

Однією зі структурних складових навчальної дослідницької діяльності є мотиваційний компонент. У зв'язку з цим відзначаємо важливість мотивації навчальної дослідницької діяльності. Для педагога істотним завданням у роботі зі старшокласниками є знайти найбільш адекватні їх віку мотиви. У старшокласників інтерес до школи значно зростає. Створюється нова мотиваційна структура, центральне місце в якій займають мотиви, пов'язані з самовизначенням і підготовкою до самостійного життя. У старшокласників є необхідні умови для перетворення пізнавального інтересу в стійку рису особистості. Цьому сприяє розвиток саморегуляції та самосвідомості учнів, високий рівень розумової діяльності. Таким чином, однією з важливих передумов формування навчальних дослідницьких умінь у старшокласників є формування позитивних мотивів навчання, що в свою чергу обумовлює потребу й інтерес до дослідницької діяльності. Розумові дії (операції) за ступенем їх використання в різних галузях людської діяльності поділяються на загальні та специфічні. До загальних розумових дій належать аналіз, синтез, порівняння, абстрагування і конкретизація, узагальнення та спеціалізація, порівняння, встановлення і використання аналогій, систематизація, зокрема класифікація та ін.

До специфічних розумових дій належать: дія підведення під поняття, дія з переходу до системи властивостей об'єкта, в залежності від приналежності об'єкта до даного поняття. Розумові операції, які необхідні для успішного перебігу навчальної діяльності найбільш повно розкриті в роботах С. Рубінштейна. Він показав провідну роль аналізу і синтезу в процесі мислення. Спочатку рішення проблемної ситуації підлягає аналізу, тобто всі умови задачі в цілому. У міру його здійснення виділяється більш вузька зона, яка тісно пов'язана з пошуком. Це відбувається за рахунок зіставлення актуалізованих учнями математичних положень (понять, теорем) з умовою задачі, при цьому аналіз «з інтенсивного стає все більш інтенсивним» [5]. Як правило, одночасно з аналізом діє й інша складова механізму мислення - синтез. Оскільки аналізу підлягає не тільки частини об'єктів і їх окремі властивості, а й взаємозв'язки і відносини між ними, то зрозуміло, що передбачається перетворення всіх цих компонентів у синтез. Узагальнення цих розумових дій дозволяє учневі подумки зіставляти елементи минулого досвіду (раніше засвоєні поняття, теореми, прийоми та методи розв'язання задач і т.д.) до вирішуваних завдань, бачити відоме в нових ситуаціях. Використання аналізу та синтезу для розв'язання дослідницьких завдань допомагає розкрити зв'язки між даними і шуканими величинами, фактами, звужуючи зону пошуків рішення. Ефективним способом у вирішенні школярем дослідницьких завдань є важлива форма аналізу – аналіз через синтез, яку виділяє С. Рубінштейн. Суть його полягає в тому, що об'єкт у процесі мислення, включаючись у нові зв'язки, починає виступати в нових якостях і, в зв'язку з цим, у ньому виявляються нові властивості [5]. Використання аналізу через синтез щодо умов і вимог навчальної дослідницької задачі допомагає глибше зрозуміти суть пошуку, уявити чітко етапи рішення дослідницького завдання як систему більш простих підзадач. Ця система стає основою попереднього плану, намічає шляхи реалізації плану рішення. Аналіз через синтез передбачає всебічне використання даних дослідницької задачі, встановлення істотних зв'язків між ними. Це знаходить своє зовнішнє вираження у висуненні гіпотез, модифікації умов завдання, її переформулюванні, наочно-практичному перетворенні геометричної моделі задачі. Окрім цього, здійснення аналізу через синтез, звужуючи зону пошуку рішення, одночасно здійснює вибір його можливих шляхів. Відбувається перехід від знань умов завдання до знань понять, теорем, які необхідні для реалізації кожного етапу рішення дослідницької задачі (встановлення необхідних зв'язків, залежностей). Для формування дослідницьких умінь учнів необхідно цілеспрямовано навчати їх прийому аналізу через синтез.

Висновки. Проведений нами аналіз дає підставу стверджувати, що рішення навчальних дослідницьких завдань – це той вид діяльності, який за своїм характером відповідає віковим особливостям старшокласників. Саме в учнів старшої школи доцільно формувати дослідницькі вміння, оскільки до цього віку сформовані необхідні структурні компоненти математичних здібностей, мова про які йшла у статті.

Література:

1. Кон И. С., Фельдштейн Д. И. Отрочество как этап жизни и некоторые психолого-педагогические характеристики переходного возраста. – В кн. : Хрестоматия по психологии. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / сост. В. В. Мироненко ; под ред. А.В. Петровского. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Просвещение, 1987. – 447 с.
2. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1968. – 432 с.
3. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике : кн. для учителя / В.Н.Осинская. – К. : Рад.шк., 1989. – 192 с.
4. Петровский А. В. Психология : учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений / А. В. Петровский, М. Г. Ярошевская. – М. : Академия ; Высшая школа, 2001. – 512 с.
5. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии / С. Л.Рубинштейн. – М. : Уч.пед.изд., 1946. – 416 с.
6. Формирование учебной деятельности школьников / под ред. В. В. Давыдова, И. Ломшера, А. К. Марковой ; Науч.-исслед. ин-т общей и педагогической психологии. Акад.пед.наук ГДР. – М. : Педагогика, 1982. – 216 с.
7. Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу : пробний підручник для 11 кл. шкіл та класів з поглибленим вивченням математики / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара. – К. : Освіта, 1994.– 303 с.

У статті розглядаються психолого-педагогічні та методичні аспекти формування дослідницьких математичних умінь у вивченні елементів інтегрального числення у класах з поглибленим вивченням математики.
Ключові слова: *дослідницька діяльність.*

В статье рассматриваются психолого-педагогические и методические аспекты формирования исследовательских математических умений при изучении элементов интегрального исчисления в классах с углубленным изучением математики.
Ключевые слова*: исследовательская деятельность.*

The article deals with the psychological and pedagogical and methodological aspects of the formation of mathematical research skills in the study of the elements of integral calculus in classes with profound study of mathematics.
Keywords*: research activities.*