УДК 378 **А.І. Закусило**
м. Київ, Україна

ПРО ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПІД ЧАС МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ В ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАГІСТРІВ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Європейський вибір України в умовах бурхливого сучасного науково-технічного прогресу суттєво підвищує вимоги до професійної підготовки майбутніх учителів технологій. Це зумовлює необхідність посилення фізико-математичного компонента такої підготовки, особливо її практичної складової, тобто формування практичних умінь і навичок розв'язання задач прикладного змісту.

З огляду на те, що фізико-технічні дослідження потребують вивчення та аналізу результатів експерименту, майбутній магістр технологічної освіти має вміти знаходити розв'язки задач на відшукання емпіричних залежностей між досліджуваними величинами. Такі задачі можна успішно розв'язувати за допомогою побудови математичних моделей (ММ) методом найменших квадратів (МНК), який є класичним методом розв'язування таких задач. Вивчення алгоритму МНК за допомогою комп'ютера допоможе майбутньому фахівцю ефективно та оперативно вирішувати проблему відшукання емпіричних залежностей між досліджуваними величинами. МНК застосовується як один із найбільш універсальних і ефективних методів вирівнювання емпіричних рядів у кореляційно-регресійному аналізі.

Очевидно, що сучасні можливості комп'ютера зумовлюють необхідність його використання студентами нематематичних спеціальностей для застосування МНК. Вибір табличного процесора ***Excel*** як інструментарію для знаходження параметрів залежностей методом найменших квадратів зумовлений тим, що його використання не потребує додаткових інструктажів та витрат на придбання і встановлення спеціальних комп'ютерних програм, оскільки він входить до складу пакету ***MS Office***. Окрім того, останнім часом збільшується кількість студентів, які володіють комп'ютером на достатньому рівні і, зокрема, знайомі з можливостями редактора електронних таблиць ***MS Excel***. Це пояснюється тим, що у програмах з інформатики загальноосвітніх навчальних закладів тема «Табличний процесор» є обов'язковою для вивчення. Широкі можливості процесора ***Excel*** добре викладені, наприклад, в [3].

Очевидними є наступні переваги використання комп'ютера під час застосування МНК:

– це дозволяє на практиці ознайомити студентів зі специфікою використання математико-статистичних методів для обробки експериментальних даних, організації та проведення експериментальних досліджень, правильної інтерпретації отриманих результатів;

– це формує у студентів уміння раціонально проводити самостійні експериментальні дослідження в процесі виконання курсових і дипломних робіт бакалаврів та магістерських робіт, що є особливо актуальним і важливим в умовах різнорівневої підготовки фахівців з точки зору їх практичної підготовки;

– це сприяє усвідомленню професійного спрямування навчального матеріалу та розвитку позитивної мотивації навчальної діяльності майбутніх фахівців.

Вивчення алгоритму побудови математичних моделей методом найменших квадратів з використанням комп'ютера враховує низку особливостей, зумовлених специфікою даного напрямку підготовки майбутніх учителів технологій, а саме:

– недостатній рівень базової математичної підготовки студентів-технологів;

– обмежений час на вивчення вищої математики в цілому та даної теми зокрема;

– необхідність на достатньому рівні ознайомити студентів з великою різноманітністю математичних моделей, що використовуються в фізико-технічних дослідженнях;

– прикладна спрямованість навчальної дисципліни, націлена на формування фахових практичних вмінь та навичок;

– необхідність навчити студентів не тільки будувати математичні моделі, а й аналізувати та давати їх змістовну інтерпретацію;

– знання, уміння, навички, одержані студентами під час опанування цієї теми, є ключовими для їх становлення як висококваліфікованих фахівців у майбутній професійній діяльності.

У процесі вивчення різних питань з багатьох галузей людської діяльності (природознавства, техніки, економіки тощо) доводиться на основі великої кількості дослідних даних виявляти суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об’єкт, а також встановлювати форму зв’язку між різними величинами (ознаками), зв’язаними одна з одною певними залежностями.

Нехай у результаті експериментальних досліджень одержали таку таблицю деякої функціональної залежності:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Треба знайти аналітичний вигляд функції $y = f(x)$, яка добре відображала б цю таблицю дослідних даних. Функцію $y = f(x)$ можна шукати у вигляді інтерполяційного полінома. Але інтерполяційні поліноми не завжди добре відображають характер поведінки функції, заданої таблично. Тому шукають таку функцію $y = F(x)$, значення якої при $x = x_i$ є досить близькими до табличних значень y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Формулу $y = F(x)$ називають *емпіричною*, або *рівнянням регресії* y на x.

Емпірична формула $y = F(x)$ – це математична модель шуканої залежності між величинами X та Y.

Емпіричні формули мають велике практичне значення: вдало підібрана емпірична формула дає змогу не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, «згладжуючи» одержані значення, а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень величини X.

Процес побудови емпіричних формул складається з двох етапів:

1) встановлення загального виду цієї формули;

2) визначення найкращих її параметрів.

Щоб встановити вигляд емпіричної формули, на площині будують точки з координатами (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Деякі з цих точок сполучають плавною кривою, яку проводять так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх даних точок. Після цього візуально визначають, графік якої з відомих нам функцій найкраще підходить до побудованої кривої. Звичайно, намагаються підібрати найпростіші функції: лінійну, квадратичну, дробово-раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну.

Слід особливо наголосити, що не існує універсального методу знаходження емпіричної формули найкращого аналітичного вигляду для довільного ряду експериментальних даних (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Можна лише здогадуватись про підходящу форму рівняння за формою кривої, одержаної з цього ряду. Однак існують способи, що дають можливість перевірити, наскільки вдалою є наша гіпотеза.

Встановивши вигляд емпіричної формули, треба знайти її параметри (коефіцієнти). Найточніші значення коефіцієнтів емпіричної формули визначають *методом найменших квадратів*.

Нехай між даними (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ існує лінійна залежність. Тоді емпіричну формулу шукають у вигляді $y = ax + b$, де a та b – невідомі коефіцієнти.

Відомо, що ці коефіцієнти можна обчислити методом найменших квадратів за формулами:

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},$$

або за еквівалентними формулами:

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n\sigma_x^2},\quad b=\bar{y}-b_1\bar{x}. \qquad (1)$$

Отже, так одержують математичну модель шуканої залежності у вигляді рівняння $y=ax+b$, яке називають ***рівнянням регресії*** Y ***на*** X **.**

На практиці зустрічаються різноманітні типи емпіричних залежностей. Однак їх практична реалізація є громіздкою і вимагає великих затрат часу.

Тому доцільно провести відповідні лабораторні заняття з метою опрацювання і засвоєння алгоритму побудови математичних моделей методом найменших квадратів та знаходження параметрів лінійної залежності методом найменших квадратів за допомогою комп'ютерних програмних засобів. У [2] запропонована методика проведення таких занять з використанням табличного процесора ***MS Excel***.

На таких заняттях студенти матимуть можливість:

– навчитись використовувати табличний процесор ***MS Excel*** для створення таблиць експериментальних даних і виконання допоміжних обчислень, необхідних для створення ММ;

– навчитися будувати графік емпіричної залежності двох змінних системі прямокутних координат за допомогою *«Мастера диаграмм»*;

– засвоїти методику аналізу одержаного графіка з метою вибору ММ, що найкраще відображає форму зв'язку між змінними;

– навчитися визначати параметри ММ за допомогою *«Мастера функций»*;

– отримати за дослідними даними емпіричне рівняння залежності між змінними величинами ;

– навчитися аналізувати одержане рівняння, формулювати змістовні висновки, робити прогнози.

Зауважимо, що слід акцентувати увагу на використанні раціональних прийомів роботи з електронними таблицями, зокрема, використання функцій *«Копировать – Вставить»*, майстра побудови графічних об'єктів *«Мастер диаграмм»* тощо.

Загальний алгоритм виконання практичних завдань знаходження параметрів емпіричних залежностей методом найменших квадратів складається з таких основних етапів: 1) підготовчий етап; 2) попередній аналіз; 3) застосування методу найменших квадратів; 4) аналіз моделі та висновки.

Розглянутий далі приклад побудови математичної моделі (для лінійної залежності) може бути використаний під час як аудиторної, так і самостійної роботи студентів. На його основі можна розробити власний алгоритм для інших різних залежностей між X та Y.

Приклад. Дослідити залежність ваги Y неоднорідного стержня від його довжини X. Побудувати модель цієї залежності методом найменших квадратів.

Експериментальні дані наведено у таблиці:

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8
Довжина стержня, X (*см*)	7	8	9	10	11	12	13	14
Вага стержня, Y (*Г*)	16	20	23	25	28	29	30	31

Скористаємось алгоритмом, наведеним вище.

І. Підготовчий етап.

Побудуємо електронну таблицю:

– запустимо програму ***Excel***;

– збережемо файл у свою робочу папку під назвою *МНК. xls*;

– перейменуємо робочий аркуш *«Лист 1»* у *«Лінійна залежність»*;

– на аркуші *«Лінійна залежність»* створимо електронну таблицю за дослідними даними згідно умови задачі, увівши до діапазону комірок *B3:B10* та *C3:C10* відповідні значення X та Y:

	A	B	C
1			
2		Xi	Yi
3		7	16
4		8	20
5		9	23
6		10	25
7		11	28
8		12	29
9		13	30
10		14	31

Рис. 1.

Побудуємо точкову діаграму за допомогою *«Мастера диаграмм»*:

– виділимо діапазон комірок *B3:C10* із дослідними даними;

– на панелі інструментів натиснемо кнопку *«Мастер диаграмм»*;

– у вікні *«Мастер диаграмм»* на першому кроці вкажемо тип діаграми *«Тип: Точечная»* і оберемо вигляд *«Вид: Точечная диаграмма, на которой значения соединены отрезками»*;

– наступними кроками знехтуємо, натискаючи кнопки для покрокового переходу *«Далее»* та *«Готово»*:

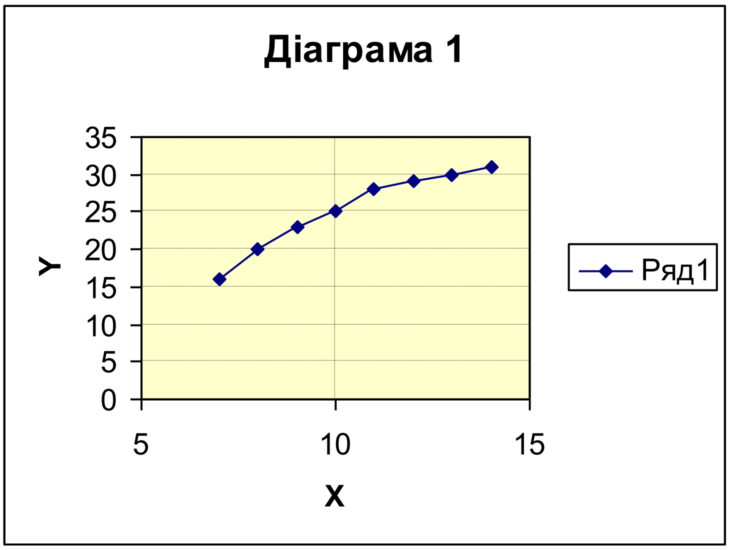


Рис. 2.

II. Попередній аналіз.

Перевіримо наявність лінійного кореляційного зв'язку між X та Y:

Розрахуємо лінійний коефіцієнт кореляції між X та Y. Для цього виконаємо розрахунки у таблиці (рис. 3):

	Xi	Yi	Xi-X	Yi-Y	(Xi-X)^2	(Yi-Y)^2	(Xi-X)(Yi-Y)
	7	16	3,5	9,25	12,25	85,5625	32,375

	8	20	2,5	5,25	6,25	27,5625	13,125
	9	23	1,5	2,25	2,25	5,0625	3,375
	10	25	0,5	0,25	0,25	0,0625	0,125
	11	28	0,5	2,75	0,25	7,5625	1,375
	12	29	1,5	3,75	2,25	14,0625	5,625
	13	30	2,5	4,75	6,25	22,5625	11,875
	14	31	3,5	5,75	12,25	33,0625	20,125
Сума	84	202			42	195,5	88
Середнє	10,5	25,25			5,25	24,4375	11
σ^2	5,25	24,44					
σ	2,29	4,94				r =	0,971146

Рис. 3.

– для розрахунку значень у рядку «Сума» скористаємось кнопкою «*Автосумма*» або функцією =***СУММ****(...)*;

– значення у рядку «Середнє значення» обчислимо, розділивши відповідні значення у рядку «Сума» на кількість спостережень або за допомогою функції =***СРЗНАЧ****(...)*;

– обчислюємо дисперсії за формулами:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{42}{8} = 5{,}25; \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{195{,}5}{8} \approx 24{,}44;$$

– обчислюємо середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29; \quad \sigma_y = \sqrt{24{,}44} \approx 4{,}94;$$

– коефіцієнт кореляції між X та Y обчислимо за формулою

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y} \approx 0{,}971146.$$

Коефіцієнт кореляції між X та Y можна знайти також за допомогою «*Мастера функций*» табличного процесора ***MS Excel***. Для цього слід вибрати функцію ***КОРРЕЛ*** (яка повертає коефіцієнт кореляції між двома множинами даних) і скористатись кнопкою «*Справка по этой функции*». Далі, виконуючи інструкції наведеного там *Прикладу*, одержимо $r = 0{,}971146$.

Оскільки значення коефіцієнта кореляції є досить близьким до одиниці, то зв'язок між X та Y є досить тісним.

За графіком (рис. 2) можна зробити такі висновки:

1) характер залежності – лінійний (експериментальні точки розташовані приблизно вздовж прямої лінії);

2) математична модель має вигляд $y = ax + b$ (лінійна функція).

ІІІ. Застосування МНК

Значення параметрів лінійної залежності знайдемо за формулами (1), використовуючи розрахункову таблицю (рис. 3). Одержимо:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x^2} = \frac{88}{8 \cdot 5{,}25} = \frac{11}{5{,}25} = 2{,}095... \approx 2{,}10;$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 25{,}25 - 2{,}095 \cdot 10{,}5 = 3{,}2525 \approx 3{,}25.$$

Значення параметрів a та b можна знайти також за допомогою *«Мастера функций»* табличного процесора ***MS Excel***. Для цього слід вибрати функцію «***ЛИНЕЙН***» (яка повертає параметри лінійного наближення за методом найменших квадратів) і скористатись кнопкою

«*Справка по этой функции*». Далі, виконуючи інструкції *Прикладу 1* «***Наклон и Y-пересечение***», одержимо:

$a = 2{,}09524; \quad b = 3{,}25$.

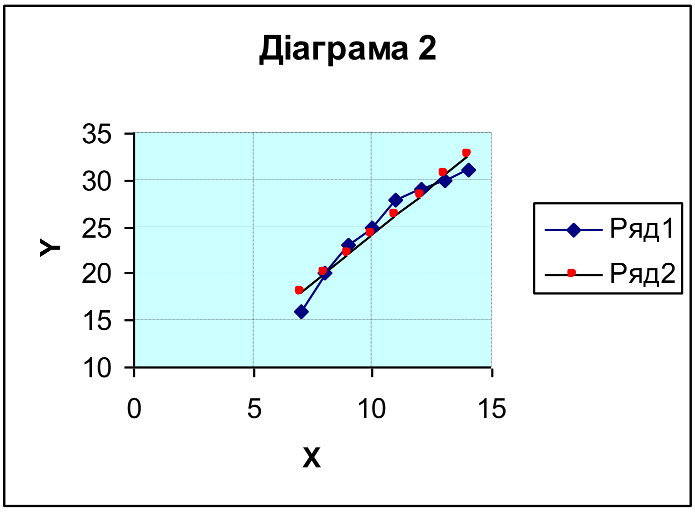
Отже, математичною моделлю шуканої залежності є рівняння $y = 2{,}10x + 3{,}25$, яке є *рівнянням регресії* Y *на* X.

Побудуємо в одній системі координат графік емпіричної залежності (див. рис. 2) і теоретичну лінію регресії – пряму $y = 2{,}10x + 3{,}25$.

Побудуємо два ряди точок:

Xi	**Yi (емпір)**	**Yi* (теор)**
7	16	17,95
8	20	20,05
9	23	22,15
10	25	24,25
11	28	26,35
12	29	28,45
13	30	30,55
14	31	32,65

Далі за допомогою «*Мастера диаграмм*» одержимо:



IV. Аналіз моделі та висновки

1) вага стержня зростає із збільшенням його довжини приблизно прямо пропорційно;

2) числове значення параметра a, який для нашого прикладу дорівнює 2,10, свідчить про те, що з приростом довжини стержня на 1 *см* його вага зростає в середньому на 2,10 *Г*.

Отже, емпіричне рівняння, що виражає залежність між змінними величинами X та Y має вигляд:

$y = 2{,}10x + 3{,}25$.

Комп'ютерна підтримка вивчення математики є одним із важливих факторів стимулювання студентів до активної навчально-пізнавальної діяльності. Комп'ютерний супровід робить математику більш доступною та цікавою, що зумовлює добрий педагогічний ефект під час викладання математики. Тому безперечно, що комп'ютерні технології навчання слід широко впроваджувати під час викладання математики в усіх навчальних закладах. Зауважимо, що комп'ютерна підтримка вивчення математики в університетах може успішно здійснюватись практично на всіх видах занять, однак особливо слід наголосити на ***лабораторних*** заняттях.

Наразі існує цілий ряд програмних засобів, що призначені для розв'язування різного типу математичних задач різного рівня складності. Особливе місце в цьому ряду займає табличний процесор ***MS Excel.***

Зрозуміло, що ефективність опанування комп'ютерних технологій значною мірою залежить від належної забезпеченості студентів індивідуальними робочими місцями під час проведення лабораторно-практичних занять, наявністю сучасного комп'ютерного обладнання та програмного забезпечення.

У статті [1] зазначено, що ще в далекі радянські (але вже цілком «комп'ютерні») часи з'явилася книга [4], де в передмові зазначено, що цей лабораторний практикум складений відповідно до **510**-годинною (!) програмою курсу «Вища математика» для вищих технічних навчальних закладів і містить **23** (!) лабораторні роботи з цього курсу. Мимоволі виникає бажання повернутись у це «прекрасне минуле».

На жаль, нині у навчальних планах багатьох університетів України на лабораторні роботи з вищої математики не відведено жодної години, хоча цілковита доцільність лабораторного практикуму з вищої математики є очевидною.

Отже, з огляду на сучасні світові тенденції комп'ютеризації техніки, науки і освіти виглядає цілком слушною думка про необхідність збільшення у навчальних планах університетів годин, що передбачено на проведення змістовного циклу ***лабораторних занять*** з фізико-математичних дисциплін, особливо для студентів нематематичних спеціальностей університетів.

Література*:*

1. Закусило А.І. Про комп'ютерну підтримку викладання математики в університетах / А.І. Закусило // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. – Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – Випуск 21. – С. 76-81. – (Серія 5. Педагогічні науки : реалії та перспективи).
2. Овсієнко Ю.І., Флегантов Л.О. Методика вивчення алгоритму побудови математичних моделей методом найменших квадратів із використанням комп'ютерної техніки [Електронний ресурс] / Ю.І. Овсієнко, Л.О. Флегантов // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2010. – № 4(18) [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журн. : http://www.ime.edu-ua.net/em.html.
3. Орвис В. Excel для ученых, инженеров и студентов / В.Орвис. – К. : Юниор, 1999.
4. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике / А.И.Плис, Н.А.Сливина. − М. : Высшая школа, 1983. − 208 с.

Обгрунтовано необхідність посилення фізико-математичного компонента професійної підготовки майбутніх магістрів технологічної освіти. Наведено конкретний приклад використання табличного процесора Excel у процесі вивчення методу найменших квадратів. Аргументовано доцільність збільшення у навчальних планах університетів годин, що передбачено для проведення лабораторних занять з дисциплін фізико-математичного циклу.

Ключові слова*: експеримент, математична модель, метод найменших квадратів, комп'ютер, Excel, магістр, лабораторні заняття.*

Обоснована необходимость усиления физико-математического компонента профессиональной подготовки будущих магистров технологического образования. Приведен конкретный пример использования табличного процессора Excel при изучении метода наименьших квадратов. Аргументирована целесообразность увеличения в учебных планах университетов часов, отводимых для проведения лабораторных занятий по дисциплинам физико-математического цикла.

Ключевые слова*: эксперимент, математическая модель, метод наименьших квадратов, компьютер, Excel, магистр, лабораторные занятия.*

The necessity of intensification of physics and mathematics component of future masters of technological education skill training has been proved. The concrete example of the use of table processor Excel during least-squares method study has been given. The expedience of the increase of physics and mathematics discipline laboratory studies witch are given in the curriculum of the universities has been argued for.

Keywords*: experiment, simulator, least-squares method, computer, Excel, master, laboratory studies.*