УДК 378.14
Т.В. Емельянова
м. Харьков, Украина

О ПРИМЕРЕ РЕАЛАЗАЦИИ ПРИНЦИПА ПРОФЕСИОНАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ В КУРСЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В настоящее время широкое распространение получили вибрационные методы интенсификации технологических процессов. Вибрационное оборудование разрешает легко автоматизировать процесс обработки материалов, объединить несколько операций обработки в одной. Вибрационные машины отличаются высокой надежностью, большим сроком службы, возможностью автоматизации и механизации производственных процессов, обеспечивают решение экологических проблем [1, с. 10].

Когда вибрационные процессы возникают случайно, они наносят большой ущерб оборудованию. Случайные процессы возникают в задачах на выносливость элементов машин, конструкций, автомобилей, дорожных машин, при измерении их параметров и во многих других случаях. Их вредное влияние следует ожидать, уметь прогнозировать и уменьшать. Изучение и расчет случайных процессов, например, вибраций, требуют довольно твердых знаний из области фундаментальных наук, в том числе математических.

Направления совершенствования фундаментальной подготовки в техническом вузе с целью повышения качества обучения широко обсуждаются, в том числе, на многих международных конференциях, например, «Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін» (2012 г.), «Проблеми інтеграції національних закладів вищої освіти до Європейського освітнього середовища» (2012 г.). Их участники имеют свои взгляды на эту проблему. Автор доклада [2, с. 120] полагает, что «фундаментальна підготовка інтелектуала в технічному університеті повинна представляти собою синхронний процес трьох складових: фундаментально-дослідницьку підготовку; спеціально-професійне навчання; гуманітарну підготовку, тому що найважливішою функцією освітньої сфери є досягнення в їх природній інтеграційній взаємодії», далее предлагает «створення нового покоління проблемно-орієнтованих **інтегрованих** курсів, реалізація яких потребує від студентів та викладачів технічного університету міждисциплінарного синтезу і об’ємного полі предметного системного бачення». В условиях непрерывной фундаментальной подготовки в современном вузе углубление фундаментальной подготовки может быть достигнуто за счет совершенствования как содержательной составляющей, так и профессионально-прикладной направленности фундаментальных дисциплин [3, с. 508]. В работе [4, с. 130] авторы подчеркивают, что «особливу значимість має інтеграція процесів відновлення змісту й підвищення рівня викладання фундаментальних дисциплін і інноваційних процесів у профільній (спеціальної) підготовці. В умовах зазначеної міждисциплінарної інтеграції студенти під час вивчення спеціальних дисциплін здобувають навички застосування базових фундаментальних знань у професійній діяльності. Цей процес становить основу неперервної фундаментальної підготовки, що здійснюється спільно кафедрами фізико - математичного профілю й випусковими кафедрами технічного вузу». «Під професійною спрямованістю навчання математиці розуміється такий зміст матеріалу й організація його засвоєння, які, з одного боку, відповідають традиційному формально-логічному підходу в побудові курсу математики, а з іншого боку – моделюють практичні задачі професійної діяльності майбутнього фахівця» [5, с. 132].

Повышение качества фундаментального образования может быть достигнуто совершенствованием содержательной составляющей математической подготовки и включением профессионально-ориентированных задач в курсы фундаментальных дисциплин. В работе предложен вариант изложения вводной части темы «Случайные процессы» дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы» для студентов технического университета направления «Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии» с элементами профессионального содержания. Курс «Теория вероятности и случайные процессы» завершает классическую математическую подготовку. Поэтому используется математический аппарат высшей математики для втузов.

Дисциплина «Теория вероятностей и случайные процессы» начинает формировать направление и технологических приемы профессиональной подготовки студентов, подготовки студентов к выбранной профессии. С учетом этого факта и для облегчения усвоения содержания введено профессионально-ориентированное сопровождение – математические задачи с элементами профессиональной направленности. Примеры подбирались так, чтобы они были близки прикладным, техническим задачам, либо были их частью.

1. Случайная функция

Определение. Случайной называют функцию $X(t)$ аргумента t, значение которой при любом значении t является случайной величиной.

Аргумент t считаем неслучайной величиной. Во многих задачах роль аргумента t играет время.

При изучении случайных функций различают два случая:

– аргумент t может принимать любые значения в заданном промежутке (конечном или бесконечном);

– аргумент t может принимать только определенные дискретные значения.

В первом случае функцию $X(t)$ называют случайным процессом, во втором – случайной последовательностью.

Определение. Случайная функция $X(t)$называется непрерывной по вероятности функцией аргумента t, если при любом ε (ε>0) выполняется соотношение, [6, с. 18]

$$\lim_{\Delta t \to 0} P\{|X(t+\Delta t) - X(t)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

2. Случайный процесс. Реализации случайного процесса

Определение. Процесс $X(t)$ называется непрерывным по вероятности, если при любом ε (ε>0) выполнено соотношение

$$\lim_{\Delta t \to 0} P\{|X(t+\Delta t) - X(t)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Когда каждому результата опыта, проведенного за время Т, можно сопоставить целиком определенную функцию времени $x(t)$, то в этом опыте задается случайный процесс $X(t)$. Функцию времени $x(t)$называют реализацией случайного процесса $X(t)$.

Например, при исследовании случайного процесса $X(t)$ проведено n независимых экспериментов, получено n реализаций, т.е. получено n неслучайных функций времени $(x_1(t), x_2(t),\ldots,x_n(t))$ (пучок кривых на рис.1).

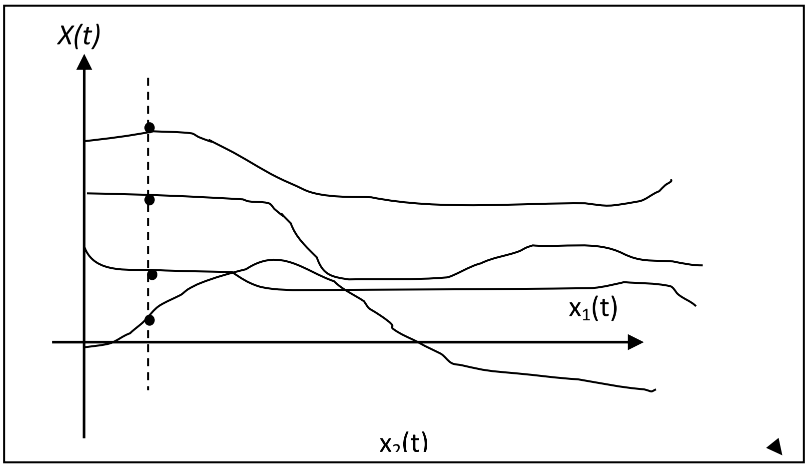

Рис. 1. Пучок реализаций случайного процесса $X(t)$

В момент времени $t=t_0$ случайная функция $X(t)$ превращается в случайную величину $X(t_0)=X_0$, которая принимает значение $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ (рис.1). Случайную величину $X(t_0)$ называют сечением случайного процесса $X(t)$.

3. Закони распределения случайного процесса. Функции распределения

Зафиксируем значение аргумента функции $X(t)$, положив $t = t_1$. Случайная функция $X(t)$ превращается в случайную величину $X_1=X(t_1)$. Эта величина может быть дискретной или непрерывной. Будет считать X_1 непрерывной случайной величиной, распределенной с плотностью вероятности $f(x_1;t_1)$, которая задает функцию $f(x;t)$.

Определение. Функцию $f(x;t)$ называют одномерной плотностью вероятности случайного процесса $X(t)$.

Определение. Функциею распределения вероятности случайного процесса $X(t)$ называют функцию $F(x; t)$

$$F(x;t)=\int_{-\infty}^{x} f(y,t)dy.$$

Пример. На стендовых испытаниях ходовой части автомобиля помехи в электросетях приводят к возмущениям случайного характера

$X(t) = V \cdot t^2 e^{-t}$ $(0<t)$, где V – случайная функция непрерывного типа, равномерно распределенная на [0;3]. Найти одномерную плотность вероятности, одномерную функцию распределения вероятности случайных возмущений.

Решение. В момент $t=t_0$ случайная функция $X(t)$превращается в случайную величину $X(t_0)= V \cdot t_0^2 e^{-t}{}_0$, равномерно распределенную на интервале

$[0;3t_0^2 e^{-t}{}_0]$. Закон равномерного распределения вероятности $X(t_0)$

$$f(x;t_0)=\begin{cases} \dfrac{1}{3t_0^2 e^{-t_0}}, x \in [0;3t_0^2 e^{-t_0}], \\ 0, x \notin [0;3t_0^2 e^{-t_0}]. \end{cases} \tag{1.1}$$

По закону распределения (1.1) определяем функцию распределения $F_x(x;t_0)$ для $X(t_0)$

$$F_X(x;t_0)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x} f(y;t_0)dy=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dy=0, x\in(-\infty;0),\\ \int\limits_{-\infty}^{x} f(y;t_0)dy=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{3t_0^2e^{-t_0}}dy=\frac{x}{3t_0^2e^{-t_0}}, x\in[0;3t_0^2e^{-t_0}],\\ \int\limits_{-\infty}^{x} f(y;t_0)dy=\int\limits_{0}^{3t_0^2e^{-t_0}}\frac{1}{3t_0^2e^{-t_0}}dy=1, x\in(3t_0^2e^{-t_0};+\infty).\end{cases} \quad (1.2)$$

Закон распределения $f(x;t_0)$ и функция распределения $F_x(x;t_0)$ случайной величины $X(t_0)$ задают одномерную (мгновенную) плотность вероятности $f(x;t))$ и одномерную функцию распределения вероятности $F_x(x;t)$:

$$f(x;t)=\begin{cases}\frac{1}{3t^2e^{-t}}, x\in[0;3t^2e^{-t}],\\ 0, x\notin[0;3t^2e^{-t}].\end{cases}; \quad (1.3)$$

$$F_X(x;t)=\begin{cases}0, x\in(-\infty;0),\\ \frac{x}{3t^2e^{-t}}, x\in[0;3t^2e^{-t}],\\ 1, x\in(3t^2e^{-t};+\infty).\end{cases} \quad (1.4)$$

Одномерная плотность вероятности $f(x;t)$не может служить полной характеристикой случайного процесса, поскольку не отражает внутреннюю структуру случайной функции.

Более детальную характеристику случайного процесса дает двумерная плотность вероятности $f(x_1,x_2;t_1,t_2)$. Функция $f(x_1,x_2;t_1,t_2)$ характеризует взаимную зависимость случайных величин X_1 и X_2 в моменты времени t_1 и t_2

Зависимость случайных величин X_1, X_2, X_3 в моменты времени t_1, t_2, t_3 определяет трехмерная плотность вероятности $f(x_1,x_2,x_3; t_1,t_2, t_3)$ и т.д.

Полная вероятностная характеристика случайной функции может быть получена с учетом всех многомерных законов распределения. Однако знание одномерной и двумерной плотности вероятности разрешает получить достаточную информацию о вероятностных характеристиках случайных процессов для построения модели случайных процессов в прикладных профессиональных задачах.

4. Характеристики случайного процесса

В большинстве случаев вместо многомерных законов распределения ограничиваются заданием параметров этих законов. Вероятностные характеристики случайной функции можно получить по параметрам законов распределения. Среди таких параметров наиболее важными считаются моменты первого и второго порядков: математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса.

4.1. Математическое ожидание. Дисперсия случайного процесса

Определение. Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию времени $m_x(t)$, значение которой в каждый момент времени t равняется математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции:

$$m_X(t)=MX(t), \quad (1.5)$$

$$m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;t)dx.$$

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ имеет смысл среднего функции от реализаций случайного процесса (рис. 2).

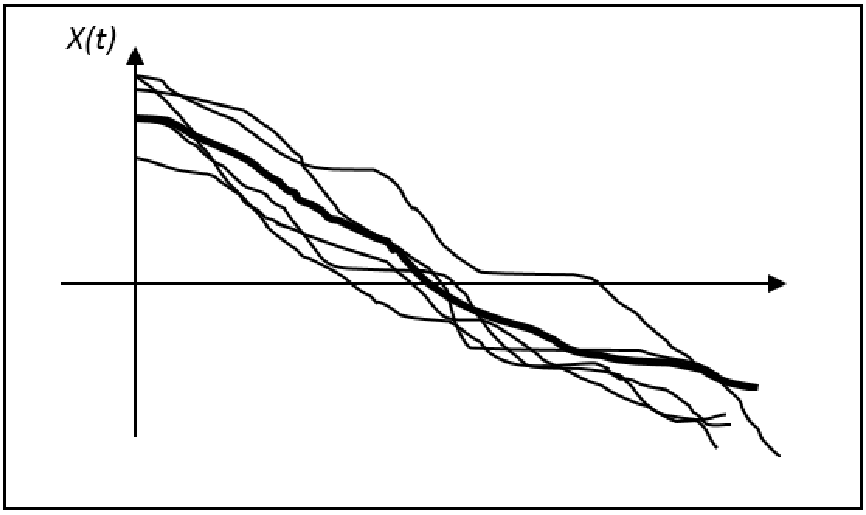

Рис. 2. Математическое ожидание $m_x(t)$случайного процесса $X(t)$

Определение. Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называют неотрицательную неслучайную функцию времени $D_x(t)$, значение которой для каждого момента t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D_x(t)=DX(t), \tag{1.6}$$

$$D_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X(t))^2 f(x;t)dx$$

Дисперсия случайного процесса $D_x(t)$при каждом t характеризует разброс реализаций относительно среднего (рис. 3, 4). Среднее квадратичное отклонение случайного процесса равно $\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}$.

Пример. При испытаниях автомобиля на плавность хода исследуют возникающие вибрационные нагрузки случайного характера. Вычислить математическое ожидание *MX(t)* и дисперсию $D_x(t)$исследуемого случайного процесса *X(t)=Asint +Bcost*; *A, B* - независимые случайные величины с математическим ожиданием $M(A)=2, M(B)=1$ и дисперсией $D(A)=D(B)=1$;

sint, cost – неслучайные функции аргумента t .

Решение. По свойству математического ожидания

$$MX(t)=M(A\sin t+B\cos t)=M(A\sin t)+M(B\cos t)=$$
$$=M(A)\sin t+M(B)\cos t=2\sin t+\cos t$$

По свойству дисперсии для независимых величин

$$DX(t)=D(A\sin t+B\cos t)=D(A\sin t)+D(B\cos t)=D(A)\sin^2 t+D(B)\cos^2 t=1$$

.

Пример. При техническом контроле проводять диагностику плавности хода автомобиля, подвергая его вибрационным нагрузкам случайного характера. Считаем, что одномерная плотность вибрационного процесса $X(t)$ равняется

$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot|\cos t|}e^{-\frac{(x-\sin t)^2}{2\cdot\cos^2 t}}$. Найти: 1)математическое ожидание и дисперсию процесса; 2) вероятность $P\{X(\pi)\in[1;2]\}$.

Решение.

1)В каждый момент времени t случайный процесс распределен по закону Гаусса с дисперсией $D(X)=cos^2 t$ ($\sigma_x(t)=|\cos t|$) и математическим ожиданием $M(X)=sint$.

2)Сечение $X(t=\pi)$ распределено по нормальному закону с $M(X)=sin\,\pi=0$ и $D(X)=cos^2\pi=1$.

$$P\{X(\pi)\in[1;2]\}=\Phi(\frac{2-0}{1})-\Phi(\frac{1-0}{1})=\Phi(2)-\Phi(1)=$$
$$=0,47725-0,34134=0,13591.$$

4.2. Корреляционная функция случайных процессов

Для детального описания случайного процесса недостаточно знать математическое ожидание и дисперсию. На рис.3,4 изображены реализации (тонкие линии) случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Математическое ожидание (жирные линии) $m_x(t)$ и дисперсия $D_x(t)$ обоих процессов приблизительно одинаковы, однако, резко различается поведение реализаций. Разная внутренняя структура случайных процессов, представленных на рис.3 и рис.4, Чтобы различать процессы с разной структурой реализаций вводят корреляционную функцию случайного процесса. Корреляционная функция характеризует степень зависимости случайных величин в разные моменты времени. Чем ближе значения t_1 и t_2, тем сильнее связь между случайными величинами $X(t_1)$ и $X(t_2)$. С увеличением интервала зависимость между $X(t_1)$ и $X(t_2)$ убывает.

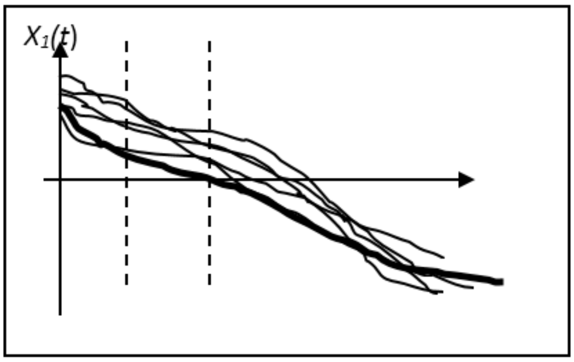

Рис. 3. Реализации случайного процесса $X_1(t)$

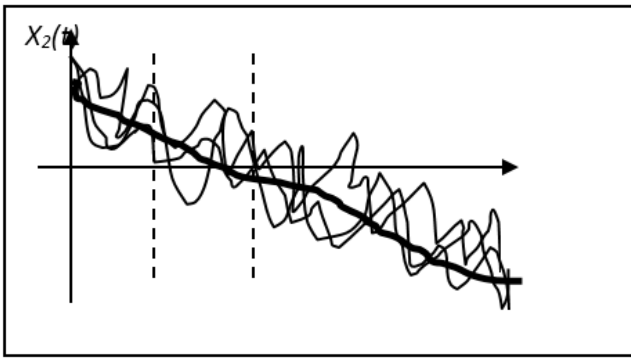

Рис. 4. Реализации случайного процесса $X_2(t)$

Определение

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию двух аргументов $K_x(t_1,t_2)$, значение которой равняется корреляционному моменту сечений в соответствующие моменты t_1,t_2:

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[(X(t_1)-m_x(t_1))\cdot(X(t_2)-m_x(t_2))\right], \quad (1.7)$$

$$K_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_X(t_1))(x_2-m_X(t_2))f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_2)dx_1$$

На практике используют коэффициент корреляции $r_x(t_1,t_2)$ двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$:

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)},$$

(1.8)

из свойств корреляционной функции следует: $\left|r_x(t_1,t_2)\right| \le 1.$

Из явного выражения для математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции следует, что только корреляционная функция зависит от двумерного закона распределения, который содержит информацию о связи случайных величин в разные моменты времени.

Пример. Полигонные испытания автомобиля проводят на полотне дороги с искусственными неровностями типа мелкой гальки. В результате автомобиль испытывает нагрузки случайного характера. Считаем, что случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t)=Vt^2+b$, V – непрерывная случайная величина, которая подчиняется нормальному закону $N(m;\sigma^{2)}$, b – неслучайная величина. Найти одномерную плотность $f(x;t)$и основные характеристики случайного процесса: $m_x(t),\ D_x(t),\ K_x(t_1,t_2)$.

Решение. Математическое ожидание $m_x(t)$случайного процесса $X(t)$

$m_x(t)=M(Vt^2+b)=mt^2+b$

Дисперсия $D_x(t)$случайного процесса $X(t)$

$$D_x(t)=D(Vt^2+b)=D(V)t^4=\sigma^2t^4.$$

Среднее квадратичное отклонение случайного процесса $X(t)$

$$\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}=\sigma t^2$$

Одномерная плотность распределения $f(x;t)$случайного процесса $X(t)$

$$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t^2}e^{-\frac{(x-(mt^2+b))^2}{2\sigma^2t^4}}..$$

Корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$

$$K_x(t_1,t_2)=M\big[(X(t_1)\text{-}m_x(t_1))\cdot(X(t_2)\text{-}m_x(t_2)\big]=D(V)\cdot t_1^2\cdot t_2^2=\sigma^2\cdot t_1^2\cdot t_2^2 \quad .$$

Вероятностные характеристики большинства задач прикладного характера можно получить, оперируя моментами первого и второго порядков: математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией.

Принцип профессиональной направленности темы «Случайные процессы» курса «Теория вероятностей и случайные процессы» осуществляется через специально подобранную систему задач, в которых содержаться элементы профессиональных дисциплин. На младших курсах технического университета междисциплинарные связи, связи фундаментальных и профессиональных дисциплин, способны повышать мотивацию студентов, интегрировать интересы личности в будущую профессию, формировать склонности личности к участию в образовательном процессе и после окончания университета.

Литература:

1. Карасев А.В. Разработка вибрационного метода диагностики плавности хода автомобиля в условиях технического сервиса в агропромышленном комплексе: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.20.03 /А.В.Карасев. – Москва, 2011.

2. Лузік Е.В. Фундаментальна підготовка як основа формування ключових компетентностей майбутніх фахівців у вищих технічних закладах освіти / Е.В.Лузік // Теорія та методика навчання

фундаментальним дисциплінам у вищий школі: збірник наукових праць. Випуск УІІ. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – 250 с. – С.117 – 123.

3. Ярхо Т.О. До питання про поглиблення фундаментальної підготовки в сучасній інженерній освіті / Т.О.Ярхо, Т.В.Ємельянова // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць. / Редкол.: І.А.Зязюн (голова) та ін. – Київ-Вінниця: ТоВ фірма «Планер». 2012. – Вип.30. - С.508-509.

4. Ярхо Т.О. Впровадження елементів професійного змісту в класичні математичні дисципліни як складова неперервної фундаментальної підготовки в технічному внз / Т.О.Ярхо, Т.В.Ємельянова // Проблеми інтеграції національних закладів вищої освіти до європейського освітнього середовища: Збірник матеріалів Міжнародної науково-методичної конференції. Том 2 «Сучасні підходи до забезпечення якості вищої освіти». - Харків: Вид-во «Форт», 2012. – 136 с.- С.130-132.

5. Ярхо Т.А.Принцип непрерывной фундаментальной подготовки в контексте обеспечения качества современного высшего технического образования / Т.А.Ярхо // Проблеми інтеграції національних закладів вищої освіти до європейського освітнього середовища: Збірник матеріалів Міжнародної науково-методичної конференції. Том 2 «Сучасні підходи до забезпечення якості вищої освіти». - Харків: Вид-во «Форт», 2012. – 136 с.-С.132-134.

6. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций / А.А.Свешников. – М.: Наука. – 1968. – 463 с.

У роботі запропоновано варіант вступу до теми «Випадкові процеси» як реалізація професійно-прикладної орієнтації курсу «Теорія ймовірності і випадкові процеси» в контексті принципу професійної спрямованості фундаментальних дисциплін у технічному університеті.

***Ключові слова**: неперервна фундаментальна підготовка, класична математична підготовка, професійно-орієнтовані задачі, випадкова функція, випадковий процес, міждисциплінарні зв’язки.*

В работе предложен вариант изложения введения в тему «Случайные процессы» как реализация профессионально-прикладной ориентации курса «Теория вероятностей и случайные процессы» в контексте принципа профессиональной направленности фундаментальных дисциплин в техническом университете.

***Ключевые слова**: непрерывная фундаментальная подготовка, классическая математическая подготовка, профессионально-ориентированные задачи, случайная функция, случайный процесс, междисциплинарные связи.*

The paper suggests a variant of the description of the introduction into the subject of «Random processes» as realization of professionally-applied orientation of the course «Probability theory and random processes» in the framework of the principle of professional orientation of fundamental disciplines in the technical University.

***Keywords**: continuous fundamental preparation, classical mathematical preparation, professionally-oriented tasks, random function, random process, interdisciplinary communication.*