УДК 511.4

А.В. Терепа
м. Вінниця, Україна

ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ЧИСЛА π ЧИСЛАМИ ІЗ ПОЛЯ $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Постановка проблеми. Дослідження наближень дійсних чисел раціональними дозволяє багато чого сказати про арифметичну природу чисел. Водночас, з точки зору теорії міри, дійсні числа досить схожі. Наприклад, π, має тип трансцендентності $\leq 2+\varepsilon$ для будь – якого додатного числа ε. Чи можна стверджувати, що тип трансцендентності π рівний 2, невідомо досі, так само як і наближення числа π числами з поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Аналіз попередніх даних. Відомо, що міра ірраціональності будь – якого ірраціонального числа $\mu \geq 2$. До теперішнього часу встановлено достатньо багато оцінок мір ірраціональності значень аналітичних функцій.

Зупинимось детальніше на наближенні раціональними числами класичних констант π і $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

У 1953 р. К. Малер показав, що справедлива оцінка $\left|\pi-\frac{p}{q}\right| \geq q^{-42}$

для будь-яких цілих чисел p і q, де $q \geq 2$. К. Малер також вказав, що показник 42 замінюється на 30 при $q \geq q_0$ $[10, \text{с.} 30]$. Пізніше ця оцінка була покращена до 20 М. Миньотом, а Г. Чудновським – до 19,8899944… До недавнього часу оцінкою знизу для наближення константи π раціональними числами вважався результат М. Хата

$$\left|\pi-\frac{p}{q}\right| \geq q^{-8{,}0161} \text{ і } \left|\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{p}{q}\right| \geq q^{-4{,}6015}.$$

Для знаходження асимптотики інтеграла М. Хата використовує метод сідлових точок (метод перевалу) $[9, \text{с.} 335]$. Цей метод використовується при отриманні асимптотики всіх інтегралів цієї статті і коефіцієнтів побудованих лінійних форм. Суть цього методу полягає у використанні теореми Коші про незалежність комплексного інтеграла від шляху, контур інтегрування деформується таким чином, щоб можна було застосувати теорему Лапласа. Згідно з цим методом, вибираючи спеціальним чином контур інтегрування Г, асимптотику інтеграла можна обчислити через максимальне значення модуля підінтегральної функції $[8, \text{с.} 242]$.Суть асимптотичної формули перевалу полягає у знаходжен
підінтегральної функ

Важливо мати уявлення про характер поверхні $u=u(x,y)$ в околі точок перевалу. У точці перевалу $z=z_0$ порядку p перетинаються $p+1$ ліній, які розбивають достатньо малий окіл точки $z=z_0$ на $2\,p+2$ сектори. Половина з цих секторів – від'ємні, а інша половина – додатні. Контур переходить через точку перевалу, якщо в околі цієї точки він лежить в двох різних за знаком секторах.

У 2008 р. В. Х. Саліхов $[5, \text{с.} 163]$отримав нову оцінку міри ірраціональності числа π:

$$\left|\pi-\frac{p}{q}\right| \geq q^{-7{,}61\ldots}$$

Цей результат на даний момент є найкращим для константи π.

Другий підхід в отриманні оцінок для числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ грунтується на застосуванні поліномів Лежандра $[1, \text{с.} 104]$.

Мета даної роботи – розглянути арифметичні властивості коефіцієнтів лінійної форми, знайти оцінку міри ірраціональності значень числа π, отримати оцінку знизу для

$$\left|\pi-\frac{p_1\sqrt{3}+p_2}{p_3\sqrt{3}+p_4}\right|, \text{де } p_1,p_2,p_3,p_4 \in Z, (p_3,p_4) \neq (0,0)$$

Виклад основного матеріалу. Діофантова апроксимація або Діофантові наближення – розділ теорії чисел, в якому вивчаються питання розв'язання у цілих числах нерівностей або систем нерівностей з дійсними коефіцієнтами. Діофантові наближення вивчають, зокрема, наближення дійсних чисел раціональними. Так, у діофантових наближеннях розглядають добування квадратного кореня з числа, що не є точним квадратом. Одним із напрямків теорії діофантових наближень є отримання оцінок знизу модулів лінійних форм з цілими коефіцієнтами від значень аналітичних функцій.

У цій статті доводиться теорема, в якій об'єднані вказані вище результати Хати.

Теорема 1. Нехай

$$p_1, p_2, p_3, p_4 \in Z, (p_3, p_4) \neq (0,0), P = max(|p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|), P > P_0.$$

Тоді справедлива оцінка

$$\left|\pi - \frac{p_1\sqrt{3} + p_2}{p_3\sqrt{3} + p_4}\right| \geq P^{-10,3567}$$

З теореми простими перетвореннями можна отримати наступне:

Наслідок 1. Нехай $r_1, r_2 \epsilon Q, (r_1, r_2) \neq (0,0)$. Тоді

$$\mu\left(r_1\pi + r_2\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 10,3567.$$

Результат, одержаний у теоремі 1, покращує оцінку Віола і Аморозо. У їхній роботі встановлено аналогічну нерівність, але з показником степеня 46,9065.

Ряд цікавих результатів отримані у роботі $[3, \text{с}. 73]$. Наприклад, отримана оцінка $\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + log3\right) \leq 4,5586$. Дещо раніше та ж оцінка для чисел $\frac{\pi}{\sqrt{3}} \mp log3$ була встановлена у роботі $[6, \text{с}. 111]$.

Коротко зупинимось на основних моментах доведення теореми 1. Метод побудови основного інтеграла в роботі, основаній на ідеї симетрії, вперше був опублікований Саліховим $[5, \text{с}. 164]$. Одним із основних етапів доведення є застосування леми 2 із [5].

У роботі, як і багатьма авторами, використовувалась стандартна схема Чудновського – Хати скорочення простих чисел.

Будемо вважати, що $P_n(x), Q_n(x) -$ многочлени з цілими коефіцієнтами степеня n.

Лема 1. Для всіх $n \epsilon N$ i $\alpha \epsilon R$ справедливі наступні умови:

1) $\sin n\alpha = \sin\alpha \cdot P_{n-1}(2\cos\alpha)$, де $P_{n-1}(x) -$ многочлен, що містить лише $x^j, j \equiv n - 1(mod2)$.

2) $2\cos n\alpha = Q_n(2\cos\alpha)$, де $Q_n(x) -$ многочлен, в якому містяться лише $x^j, j \equiv n\ (mod2)$.

Доведення.

1) При $n = 1, n = 2$ твердження виконується. Далі застосуємо індукцію по n. При $n \geq 2$ маємо:

$$2\sin n\alpha\cos\alpha = \sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha,$$

тобто

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha(2\cos\alpha) - \sin(n-1)\alpha\,, P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot x - P_{n-2}(x).$$

2) При $n = 1$ твердження виконується, при $n = 2$ маємо

$$2\cos 2\alpha = (2\cos\alpha)^2 - 2$$

Далі застосовуємо індукцію по n. При $n \geq 2$ маємо

$$2\cos n\alpha\cos\alpha = \cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha,$$

тобто

$$2\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha \cdot (2\cos\alpha) - 2\cos(n-1)\alpha,$$

Лема доведена.

Розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{i\sin\alpha}I = \frac{1}{i\sin\alpha}\int_{\cos\alpha}^{\cos\alpha + i\sin\alpha} \frac{(x-\cos\alpha)^{2an}\left(-x+e^{i\alpha}\right)^{bn}\left(x-e^{-i\alpha}\right)^{bn}}{x^{cn+1}(2\cos\alpha - x)^{cn+1}}dx \ (1)$$

де $\alpha \epsilon R, a, b, c, n \epsilon N, \cos\alpha \neq 0, a + b > c$.

Для підінтегральної функції інтеграла (1)

$$R(x)=\frac{(x-\cos\alpha)^{2an}\left(-x+e^{i\alpha}\right)^{bn}\left(x-e^{-i\alpha}\right)^{bn}}{x^{cn+1}(2\cos\alpha-x)^{cn+1}}$$

маємо

1) $R(x)-$ матеріальна раціональна функція;

2) $R(2\cos\alpha-x)=R(x)-$ властивість симетрії.

З урахуванням вищесказаного, отримаємо розклад $R(x)$ на суму простих дробів

$$R(x)=P_{dn-2}(x)+\sum_{j=1}^{cn+1}\left(\frac{a_j}{x^j}+\frac{a_j}{(2\cos\alpha-x)^j}\right),(2)$$

де $a_j\epsilon R, d=2a+2b-2c$;

$$P_{dn-2}(x)=\sum_{j=1}^{dn-2}b_jx^j, b_j\epsilon\ R, P_{dn-2}(2\cos\alpha-x)=P_{dn-2}(x),$$

$$a_j=\frac{1}{(cn+1-j)!}\cdot\frac{d^{cn+1-j}}{dx^{cn+1-j}}\left(R(x)\cdot x^{cn+1}\right)\bigg|_{x=0}\quad(3)$$

Лема 2. Для всіх $j=1,\ldots,cn+1$ можливе представлення виду

$$2^{2an}\cdot a_j=(2\cos\alpha)^{2N_j+j_1}\cdot Q((2\cos\alpha)^2),$$

де j_1- лишок j за $mod2, N_j\epsilon\ Z, Q(x)\epsilon\ Z[x]$.

Лема 3. Нехай

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\Lambda_1(n)\cdot\sqrt{g}+\Lambda_2(n)\right|=\gamma_1, \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log\max_{1\le i\le 4}|\Lambda_i(n)|\le\gamma_2,\gamma_1+\gamma_2>0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|l_n|=-\gamma_3,\gamma_3>\gamma_2,$$

$\mu>2\,(\gamma_1+\gamma_3)/(\gamma_3-\gamma_2)$; числа $p_1,p_2,p_3,p_4,P,P_0=P_0(\mu)$ визначені як в теоремі1. Тоді

$$\left|\Theta-\frac{p_1\sqrt{g}+p_2}{p_3\sqrt{g}+p_4}\right|>\frac{1}{P^\mu}$$

Доведення аналогічне доведенню леми 2 статті [7, с. 913].

Виберемо параметри в інтегралі (1) $a=21, b=81, c=68, \alpha=\pi/12$. Скрізь надалі I – це інтеграл (1) з вище вказаними параметрами. Позначимо

$qM=HCK\ (1,2,\ldots,M)$ для $M\epsilon\ \mathbb{N}$.

Лема 4. Справедливе представлення вигляду

$$6\cdot q68n\cdot 2^{42n}\cdot\frac{I}{i\sin\alpha}=\left(\Lambda_1'(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_2'(n)\right)\cdot\pi+\Lambda_3'(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_4'(n),$$

де всі $\Lambda_i'(n)\epsilon\mathbb{Z}$.

Доведення. Обчислимо інтеграл (1) за допомогою представлення (2). При $j=2,\ldots,68n+1$ маємо

$$I_j=\int_{\cos\alpha}^{\cos\alpha+i\sin\alpha}\left(\frac{a_j}{x^j}+\frac{a_j}{(2\cos\alpha-x)^j}\right)dx=$$

$$=-\frac{a_j}{j-1}\left(\frac{1}{x^{j-1}}-\frac{1}{(2\cos\alpha-x)^{j-1}}\right)\Bigg|_{\cos\alpha}^{\cos\alpha+i\sin\alpha}=$$

$$=-\frac{a_j}{j-1}\left(e^{-i(j-1)\alpha}-e^{i(j-1)\alpha}\right)=\frac{a_j}{j-1}2i\sin\left((j-1)\alpha\right).(4)$$

Тепер, в силу п. 1) леми 1

$$\sin\left((j-1)\alpha\right)=\sin\alpha\cdot(2\cos\alpha)^{j_1}P_{(j\ j_1\ 2)/2}((2\cos\alpha)^2).$$

Тоді із (4) і леми 2 отримаємо

$$\frac{1}{i\sin\alpha}\cdot I_j\cdot 2^{42n}\cdot q68n=(2\cos\alpha)^{2N_j}\tilde{P}_j((2\cos\alpha)^2),(5)$$

де $N_j\epsilon\ \mathbb{Z}, \tilde{P}_j\epsilon\ \mathbb{Z}[x]$.

При $j=1$ маємо

$$I_1=a_1\int\limits_{\cos\alpha}^{\cos\alpha+i\sin\alpha}\left(\frac{1}{x}+\frac{a_j}{2\cos\alpha-x}\right)dx=a_1\log\frac{x}{2\cos\alpha-x}\Big|\begin{matrix}\cos\alpha+i\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{matrix}=$$

$$=a_1\log e^{2i\alpha}=i2a_1\alpha.$$

Зазначимо, що тут $j=1$; із леми 2

$$\frac{1}{i\sin\alpha}\cdot I_j\cdot 2^{42n}\cdot q68n=(2\cos\alpha)^{2N_1}\tilde{P}_1((2\cos\alpha)^2)\cdot\frac{\alpha}{\sin 2\alpha},(6)$$

де $N_1\epsilon\ \mathbb{Z}, \tilde{P}_1\epsilon\ \mathbb{Z}[x]$.

Аналогічно, при $d=2a+2b-2c=68$ отримаємо

$$I^*\equiv\int\limits_{\cos\alpha}^{\cos\alpha+i\sin\alpha}\sum_{j=1}^{68n-2}b_jx^j\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\cos\alpha-i\sin\alpha}^{\cos\alpha+i\sin\alpha}\sum_{j=0}^{68n-2}b_jx^j\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{68n-2}\frac{b_j}{j+1}\cdot\left(e^{i\alpha(j+1)}-e^{-i\alpha(j+1)}\right)=$$

$$=i\sin\alpha\sum_{j=0}^{68n-2}\frac{b_j}{j+1}\cdot\Big((2\cos\alpha)^{j_1}\cdot P_{(j-j_1)/2}((2\cos\alpha)^2)\Big).$$

Тоді отримаємо

$$\frac{1}{i\sin\alpha}\cdot I^*\cdot 2^{42n}\cdot q68n=\tilde{P}((2\cos\alpha)^2),\text{де }\tilde{P}\epsilon\ \mathbb{Z}[x].(7)$$

Із останніх трьох результатів, з урахуванням того, що

$$I=I^*+\sum_{j=1}^{68n-2}I_j$$

маємо, що

$$\frac{1}{i\sin\alpha}\cdot 2^{42n}\cdot q68n=(4\cos^2\alpha)^N\cdot\left(T_1(4\cos^2\alpha)+T_2(4\cos^2\alpha)\frac{\alpha}{\sin 2\alpha}\right)\ (8)$$

де $T_1,T_2\epsilon\ \mathbb{Z}[x], N\epsilon\ \mathbb{Z}, N=min_{1\le j\le 68n+1}N_j$.

При $\alpha=\frac{\pi}{12}$ маємо $(2\cos\alpha)^2=2+\sqrt{3}$. Позначимо через K кільце чисел виду $k_1+k_2\sqrt{3}, k_1,k_2\epsilon\ \mathbb{Z}$. Тоді для $N\epsilon\ \mathbb{Z}^+$ маємо $(2\cos\alpha)^{2N}=\left(2+\sqrt{3}\right)^N\epsilon\ K$, для $N=-N_1, N_1\epsilon\ N, (2\cos\alpha)^{2N}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{N_1}}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{N_1}\epsilon\ K$.

Оскільки $\frac{\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\pi}{6}$, то із (8) одержимо

$$6\cdot q68n\cdot 2^{42n}\cdot\frac{I}{i\sin\alpha}=\left(\Lambda_1'(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_2'(n)\right)\cdot\pi+\Lambda_3'(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_4'(n),$$

де всі $\Lambda_{\mathrm{i}}'(n)\epsilon\ \mathbb{Z}$. Лема доведена.

Лема 5. Нехай $B_n/A_n=(34n)!\,(42n)!\,(81n)!/\big((21n)!\,(68n)!\,(68n)!\big)$,

$$A_n,B_n\epsilon\ \mathbb{N},(A_n,B_n)=1,$$

$$l_n=B_n^{-1}\cdot 6\cdot q81n\cdot 2^{42n}\cdot\frac{I}{i\sin\alpha}=\left(\Lambda_1(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_2(n)\right)\cdot\pi+\Lambda_3(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_4(n).(9)$$

Тоді всі $\Lambda_i(n)\epsilon\ \mathbb{Z}$.

Далі обчислимо константу $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$, введені в лемі 3, для лінійної форми (9).

Лема 6. Виконується рівність

$$\gamma_3 = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|l_n| = 240{,}531.$$

$$\gamma_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\Lambda_1(n)\cdot\sqrt{3}+\Lambda_2(n)\right| = 147{,}775.$$

Доведення теореми 1. Знайдені в лемах 5 і 6 значення γ_1, γ_2 і γ_3 дозволяють застосувати лему 3 до лінійної форми (9) і одержати оцінку

$$\mu > 2\frac{\gamma_1+\gamma_3}{\gamma_3-\gamma_2} = 10{,}3567.$$

Теорема доведена.

Висновки. У цій статті деякі існуючі результати вдалося покращити, використовуючи різні модифікації симетризованого інтеграла, введеного в 2007 – 2008 рр. В. Х. Саліховим [5; 6].

Література:

1. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Наука, М.,1973.
2. Василенко О. Н. Об иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика, 1985. - №3. – С. 15-18.
3. Дубицках А. К. Приближение $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ рациональными дробами // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика, 1987. - №6. – С. 73-76.
4. Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функцій с различными параметрами // Математические заметки, 1992. – Т. 52, Вып.6 . – С. 25-31.
5. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук, 2008. – Т. 63, №3. – С. 163-164.
6. Салихов В. Х, Сальникова Е. С. Диофантовы приближения логарифма «золотого сечения», Вести. БГТУ, 2007, №1, С. 111-119.
7. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях числа π числами из поля $Q(\sqrt{3})$ // Математические заметки, 2008. – Т. 83, Вып. 6. – С. 912-922.
8. Федорюк М. В. Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 369с.
9. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith., 1993. – LXIII, Vol. 4. – P. 335-349.
10. Mahler K. On the approximation of π // Nederl/ Akad. Wetensch. Proc. Ser/ A 56, 1953. – P. 30 – 42.

У статті розкрито арифметичні властивості коефіцієнтів лінійної форми, а також здійснено уточнення знаменників коефіцієнтів лінійної форми; проаналізовано основні підходи в отриманні оцінок для числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. *Розглянуто метод перевалу (сідлових точок) для знаходження асимптотики інтеграла.*

Ключові слова: *Міра ірраціональності* $\mu(\gamma)$ *дійсного числа* γ *- це нижня грань чисел* μ *таких, що для будь – якого* $\varepsilon > 0$ *існує додатне число* $q_0(\varepsilon)$, *яке задовольняє наступній умові: нерівність*

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$$

виконується для всіх цілих чисел p і q, *де* $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Точки перевалу – це точки аналітичної функції $f(z)$, *в яких* $f'(z) = 0$.

Порядком точки перевалу називається кратність нулю $f'(z)$.

Поліноми Лежандра — ортогональні поліноми на інтервалі $[-1; 1]$. *Вони є розв'язками диференційного рівняння Лежандра:*

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

В статье раскрыто арифметические свойства коэффициентов линейной формы, а также осуществлено уточнение знаменателей коэффициентов линейной формы; проанализированы основные подходы в получении оценок для числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. *Рассмотрен метод перевала (сидловых точек) для нахождения асимптотики интеграла.*

Ключевые слова: *Степень иррациональности μ (γ) действительного числа γ – это нижняя грань чисел μ таких, что для какого - либо ε> 0 существует положительное число* $q_0(\varepsilon)$, *удовлетворяющее следующему условию: неравенство*

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\,\mu-\varepsilon}$$

выполняется для всех целых чисел p и q*, где* $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Точки перевала - это точки аналитической функции $f(z)$*, в которых* $f'(z) = 0$.

Порядком точки перевала называется кратность нулю $f'(z)$.

Полиномы Лежандра - ортогональные полиномы на интервале [-1, 1]. Они есть решениями дифференциального уравнения Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

The article explores the arithmetic properties of the coefficients of the linear form and by clarifying the denominators of the coefficients of the linear form, basic approaches to obtain estimates for the number $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. *Rozhlanuto method pass (saddle points) for finding the asymptotics of the integral.*

Keywords: *Irrationality measure μ (γ) real number γ - is the bottom line numbers μ such that for any* - which $\varepsilon > 0$ *there is a positive number* $q_0(\varepsilon)$*, which satisfies the following conditions: inequality*

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\,\mu-\varepsilon}$$

holds for all integers p *and* q*, where* $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Point pass - is the point of an analytic function $f(z)$*, where* $f'(z) = 0$.

Procedure point pass is called the multiplicity of zero $f'(z)$.

Legendre polynomials - polynomials orthogonal on the interval [-1, 1]. They are the solutions of the differential equation Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$