УДК 378.14 **Т.О. Ярхо**

м. Харків, Україна

ПРИНЦИП ОБҐРУНТОВАНОСТІ ЯК ОСНОВА ПОГЛИБЛЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

Глобальні зміни у науковій, технологічній, соціальній сферах життя сучасного суспільства призвели до необхідності створення нової концепції інженерної освіти, суть якої полягає у фундаменталізації професійної підготовки фахівців. Фундаменталізація професійної технічної підготовки передбачає вивчення спеціальних дисциплін на базі узагальнених, довготермінових ідей і принципів, що є характерними для даної науки. Такий підхід покликаний забезпечувати підготовку нового типу фахівців, які мають високий рівень інженерної культури, володіють методологією інженерної діяльності, є здатними до творчої роботи, інновацій в умовах динамічних технологічних змін [1, с. 17-18; 2, с. 31-32; 3, с. 91].

Фундаменталізація професійної технічної підготовки включає поглиблене вивчення природничо-наукових дисциплін, основою яких є математика. Однак, сучасна математична освіта, за низкою відомих об'єктивних обставин пострадянського часу, характеризується значним зниженням як шкільного, так і вишівського рівнів [4, с. 60; 5, с. 568; 6, с. 304]. В умовах здійсненого скорочення об'єму аудиторних дисциплін, слабкої шкільної математичної підготовки, а також інформаційних перевантажень студентів кафедрами вищої математики технічних ВНЗ повсюдно вимушено було обрано шлях викладу основного курсу вищої математики зі значно скороченою доказовою частиною. Вже стійкою стала тенденція до інформаційного (так званого «рецептурного») стилю викладання навчального матеріалу, при якому студентам часто пропонується для засвоєння набір математичних фактів і тверджень, а також алгоритми розв'язання типових задач [7, с. 52]. При такому підході до викладу принципово неможливо забезпечити необхідний рівень якості математичної підготовки. Дійсно, в математичних знаннях надзвичайно важливим є ґрунтовне оволодіння їх основами, які формують логічне мислення студентів, визначають загальний рівень математичної культури і дають можливість подальшого правильного розуміння складних понять і методів математики. Отже поглиблення фундаментальної математичної підготовки майбутніх інженерів потребує відродження якісного і чіткого оволодіння основами математичних знань. На наш погляд, це досягається, у першу чергу, шляхом упровадження у класичні математичні дисципліни принципу обґрунтованості.

Наведемо приклад викладання одного з найважливіших аспектів базового розділу курсу вищої математики «Невизначений інтеграл» – методу заміни змінної (підстановки). Цей аспект в останній час традиційно розглядається з наступним рівнем довідності [8, с. 190].

Заміна змінної інтегрування.

У випадках, коли $\int f(x)dx$ ($f(x)$ – неперервна функція) не може бути безпосередньо зведеним до табличного, пропонується зробити підстановку

$x = \varphi(t)$ ($\varphi'(t)$ неперервна).

Тоді $f(x) = f(\varphi(t))$; $dx = \varphi'(t)dt$.

Далі стверджується рівність

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

і наводиться приклад застосування підстановки $x=\varphi(t)$.

Пропонується «іноді» замість підстановки $x=\varphi(t)$ застосовувати заміну змінної виду $t=\varphi(x)$. Наводиться приклад застосування заміни змінної.

Робиться зауваження, що у багатьох випадках немає необхідності записувати, який

$$\int \frac{\ell n^3 x}{x}\, dx = \int \ell n^3 x d\left(\ell n x\right) = \frac{\ell n^4 x}{4} + C.$$

У досліджуваній роботі обґрунтовано і докладно викладено метод заміни змінної (підстановки) у невизначеному інтегралі на основі властивості інваріантності формул інтегрування. Роз'яснено операцію введення функції під знак диференціала,засвоєння якої традиційно викликає труднощі у студентів (цю операцію фактично застосовано в розв'язанні наведеного вище прикладу [8, с. 190]).

Метод заміни змінної (підстановки)

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дає змогу звести інтеграл, який не обчислюється безпосередньо, до табличного або відомого інтеграла. Метод ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування.

1. Властивість інваріантності формул інтегрування

Теорема.

Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної *x* довільної функції $t=\varphi\left(x\right)$, що має неперервну похідну, тобто якщо

$$\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C,$$

то

$$\int f\left(t\right)dt = F\left(t\right)+C. \qquad (1)$$

Зауваження

1. Твердження (1) теореми можна записати у розгорнутому вигляді:

$$\int f\left(\varphi\left(x\right)\right)d\left(\varphi\left(x\right)\right) = F\left(\varphi\left(x\right)\right)+C. \qquad (2)$$

2. В основі доведення цієї теореми лежить властивість інваріантності форми першого диференціала.

Приклад 1.

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C$ (табличний інтеграл $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha=2$).

На основі (1) справедливо: $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C$, де $t=\varphi\left(x\right)$ – довільна функція з неперервною похідною $\varphi'\left(x\right)$.

Зокрема, підставляючи послідовно $t=\sin x$, $t=\ln x$, $t=\arcsin x$, маємо

$$\int \sin^2 x\, d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^3 x}{3}+C;$$

$$\int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

$$\int \arcsin^2 x\ d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C$$ і т.д.

Отже, властивість інваріантності формул інтегрування значно розширює таблицю інтегралів.

З відомих формул для диференціалів

$$d(\sin x) = \cos x\, dx;\ d(\ln x) = \frac{dx}{x};\ d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

випливає справедливість наступних рівностей:

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C; \tag{3}$$

$$\int \ln^2 x \frac{1}{x} dx = \int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C; \tag{4}$$

$$\int \arcsin^2 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin^2 x\, d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C. \tag{5}$$

Перехід $\int \underbrace{\sin^2 x}_{(\varphi(x))^2}\ \underbrace{\cos x\, dx}_{\varphi'(x)dx} = \int \underbrace{\sin^2 x}_{(\varphi(x))^2} \underbrace{d(\sin x)}_{d(\varphi(x))}$

називають введенням функцій $\varphi(x) = \sin x$ під знак диференціала. У рівностях виразів (4) і (5) під знак диференціала введено $\varphi(x) = \ln x$ і $\varphi(x) = \arcsin x$, відповідно.

Операція введення функції під знак диференціала виконується з ціллю використання властивості інваріантності формул інтегрування у вигляді (2). Розглянемо умови її застосування і наведемо приклади.

2. Операція введення функції під знак диференціала

Нехай треба знайти складний для безпосереднього інтегрування

$$\int g(x)dx, \tag{6}$$

в якому підінтегральний вираз $g(x)dx$ можливо представити у вигляді:

$$g(x)dx = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx, \tag{7}$$

де для функції $f(x)$ відома первісна $F(x)$, а $\varphi'(x)$ є неперервною функцією. Тоді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

введення функції $\varphi(x)$ під знак диференціала | властивість інваріантності формул інтегрування (2)

Приклад 2. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$; 2) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Розв'язання.

1) $$\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \int (\operatorname{arctg} x)^5 \frac{1}{1+x^2}dx = \int (arctg\, x)^5 (arctg\, x)' \, dx =$$

$$= \int (\operatorname{arctg} x)^5 d(\operatorname{arctg} x) = \left|\int t^5 dt\right| = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C$$

2) $$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}\cos x dx = \int \frac{1}{\sin x}(\sin x)' dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \left|\int \frac{dt}{t}\right| =$$

$$= \ln|\sin x| + C.$$

Зауваження.

1. На практиці часто користуються формулами, які є узагальненнями результатів прикладів 1) і 2), а саме:

$$\int \varphi^n(x)\cdot\varphi'(x)dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C.$$

2. Доцільно пам'ятати наступні формули для диференціалів, що найбільш часто зустрічаються на практиці:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b); \quad xdx = \frac{1}{2}d(x^2);$$

$$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right); \quad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d(\sqrt{x});$$

$$\frac{1}{x}dx = d(\ln x); \quad e^x dx = d(e^x);$$

$$\cos x\, dx = d(\sin x); \quad \sin x\, dx = -d(\cos x);$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x).$$

Таким чином, у випадках, коли треба знайти $\int g(x)dx$, в якому підінтегральний вираз $g(x)dx$ можна представити у вигляді (7), застосовують властивість інваріантності формул інтегрування (2), що дозволяє одержати результат

$$\int g(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Можна користуватися записом (1) цієї властивості

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

в якому $t = \varphi(x)$. Це передбачає введення нової змінної інтегрування t, тобто здійснення заміни змінної так званого першого типу.

3. Перший тип заміни змінної

Функція незалежної змінної $\varphi(x)$ заміняється новою змінною:

$$\boldsymbol{t = \varphi(x)}.$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} \text{Заміна} \\ t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int f(t)dt \quad \underset{\substack{\text{властивість} \\ \text{інваріантності} \\ \text{формул інтегрування (1)}}}{=} \quad F(t) + C \underset{t=\varphi(x)}{=} F(\varphi(x)) + C.$$

Застосуємо заміну змінної до розв'язання прикладу 2.

Приклад 3. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$; 2) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Розв'язання.

1) $$\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg}^5 x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C.$$

2) $$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}\cos x\, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Підкреслимо, що загального «рецепту» вибору тієї чи іншої заміни не існує. Однак, слід мати на увазі наступну рекомендацію: якщо в підінтегральному виразі є готовий диференціал функції $\varphi(x)$ (тобто $\varphi'(x)dx$), або вираз, що відрізняється від $\varphi'(x)dx$ лише сталим множником, то є сенс спробувати заміну $t = \varphi(x)$.

Приклад 4. Знайти інтеграли: 1) $\int x\cos(3 - x^2)dx$; 2) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

Розв'язання.

1) $$\int x\cos\left(3-x^2\right)dx=\int\cos\left(3-x^2\right)x\,dx=\begin{vmatrix} t=3-x^2 \\ dt=-2x\,dx \\ x\,dx=-\dfrac{dt}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=\int\cos t\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=-\frac{1}{2}\sin t+C=-\frac{1}{2}\sin\left(3-x^2\right)+C.$$

2) $$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\begin{vmatrix} t=1-e^{2x} \\ dt=-2e^{2x}dx \\ e^{2x}dx=-\dfrac{dt}{2} \end{vmatrix}=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=-\frac{1}{2}2\sqrt{t}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-e^{2x}}+C.$$

Зауваження. З формул (1) і (2) випливає справедливість рівності

$$\int f(t)dt=\int f\left(\varphi(x)\right)d\left(\varphi(x)\right), \qquad (8)$$

де $t=\varphi(x)$ є функцією з неперервною похідною. Змінюючи місцями букви t і x в формулі (8), одержимо:

$$\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)d\left(\varphi(t)\right). \qquad (9)$$

Отже формула (9) є основою другого типа заміни змінної – підстановки.

4. Другий тип заміни змінної (підстановка)

Незалежна змінна заміняється функцією нової змінної $x=\varphi(t)$,

де $\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$.

Розглянемо у загальному вигляді умови застосування другого типу заміни змінної і наведемо приклади.

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{\substack{\text{інтеграл} \\ \text{складний для} \\ \text{безпосереднього} \\ \text{інтегрування}}}=\underbrace{\begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix}}_{\substack{\text{формула} \\ (9)}}=\int\underbrace{f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)}_{g(t)}dt=\underbrace{\int g(t)dt}_{\substack{\text{для функції } g(t) \\ \text{відома первісна } G(t)}}=$$

$$=G(t)+C=G\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C.$$

$$t=\varphi^{-1}(x)$$

Приклад 5. Знайти інтеграли 1) $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$.

Розв'язання.

1) Розглянемо $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$. Підинтегральна функція визначена на інтервалі $(0,+\infty)$. Щоб позбутися ірраціональності у знаменнику підинтегральної функції, виконаємо підстановку:

$x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)=t^2, \quad t>0$. Функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)=2t$ в своєї області визначення і має обернену функцію $\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Отже,

$$\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{(5t^2+7)\sqrt{t^2}} = \int \frac{2\,dt}{(5t^2+7)} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{5}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{7}{5}}}+C = \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}t+C \underset{t=\sqrt{x}}{=}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5x}{7}}+C.$$

2) $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}} = \begin{vmatrix} x+5=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{1+\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t-\ln|t+1|\right)+C \underset{t=\sqrt{x+5}}{=} 2\left(\sqrt{x+5}-\ln\left(\sqrt{x+5}+1\right)\right)+C.$$

Таким чином, на практиці застосують перший і другий типи заміни змінної. Заміну змінної підбирають так, щоб в результаті перетворень інтеграли були табличними або зводилися до відомих інтегралів.

Після застосування методу заміни змінної завжди необхідно повернутися до заданої змінної інтегрування.

Підводячи підсумок вище викладеному, ще раз підкреслимо важливість принципу обґрунтованості як основи поглибленої фундаментальної математичної підготовки майбутніх інженерів у зв'язку з необхідністю формування правильних уявлень студентів про дійсний рівень строгості математичних міркувань, а також застосування найголовніших математичних методів.

Література:

1. Суханов А.В. Концепция фундаментализации высшего образования и её

отражение в ГОСах / А.В. Суханов // Высшее образование в России.-1996.-№3.-С.17-24.

2. Читалин Н. Проблема обновления содержания и технологий высшего технического образования / Н.Читалин, А. Чугунов, Е. Матухин // Высшее образование в России.-2008.№-7.-С.30-35.

3. Тестов В. Качество и фундаментальность высшего образования, / В. Тестов // Высшее образование в России.-2008.-№10.-С.89-92.

4. Кудрявцев Л. Д. О тенденциях и перспективах математического образования./ Л.Д. Кудрявцев, А.И. Кирилов, М.А. Бураковская, О.В. Зимина. // Образование и общество.- 2002.-№1(12).-С.58-66.

5. Петрова В.Т. Проблема непрерывного математического образования / В.Т. Петрова.// Математическое образование на рубеже веков. Дубна, Сентябрь 2000.-М : МЦНМО; 2000. – 712с.

6. Ярхо Т.А. Методология математической подготовки студентов технического университета в современных условиях. / Т.В. Емельянова, Т.А. Ярхо // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Збірник наукових праць.-2010.-Випуск 25.- С.302-306.

7. Ярхо Т. Концепция преемственности математической подготовки бакалавров , магистров и аспирантов в техническом вузе/ Т.Ярхо // Новый Коллегиум.-2009.-№2.-С.51-53.

8. Баврин И.И. Курс высшей математики / И.И. Баврин. – М: Владос, 2004.- 559с.

У роботі представлено необхідність упровадження в класичні математичні дисципліни принципу обґрунтованості у контексті поглиблення фундаментальної професійної технічної підготовки майбутніх інженерів. Наведено приклад докладного і обґрунтованого викладу методу заміни змінної у базовому розділі курсу вищої математики «Невизначений інтеграл».

***Ключові слова**: фундаменталізація, професійна технічна підготовка, принцип, обґрунтованості, метод заміни змінної, інваріантність формул інтегрування, операція введення функції під знак диференціала, перший тип заміни змінної, другий тип заміни змінної.*

В работе представлена необходимость внедрения в классические математические дисциплины принципа обоснованности в контексте углубления фундаментальной профессиональной технической подготовки будущих инженеров. Приведен пример подробного и обоснованного изложения метода замены переменной в базовом разделе курса высшей математики «Неопределённый интеграл».

***Ключевые слова:** фундаментализация, профессиональная техническая подготовка, принцип обоснованности, метод замены переменной, инвариантность формул интегрирования, операция введения функции под знак дифференциала, первый тип замены переменной, второй тип замены переменной.*

In this paper the need for implementing the principle of substantiation into classic mathematical disciplines in the framework of intensification of fundamental professional technical training of future engineers has been introduced. An example of a detailed and grounded description of the method of variable change in the basic section «Indefinite Integral» of the course of higher mathematics has been provided.

***Keywords**: fundamentalization, professional technical training, the principle of substantiation, the variable substitution method, the invariance of integration formulae, administering function under the differential sign, the first type of variable change, the second type of variable change.*