УДК 37.01:007+378

М.Є. Зюков, Полтава, Україна / M. Zyukov, Poltava, Ukraine

НАВЧАННЯ ІНТЕГРУВАННЮ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT MATHEMATICS

Анотація. *У статті розглядається використання програми Microsoft Mathematics для навчання інтегральному численню функцій однієї змінної. Описані невизначені інтеграли, що обчислюються автоматично, алгоритми інтегруванням частинами і заміною змінної, розкладання раціональних функцій на прості дроби та їх інтегрування, а також обчислення визначених і невласних інтегралів. На конкретних прикладах демонструються обмеження застосування програми та шляхи подолання цих труднощів. Показано, що використання Microsoft Mathematics дозволяє прискорити формування навичок техніки інтегрування та поглибити знання методів інтегрування.*

Ключові слова*: Microsoft Mathematics, інтегральне числення, інтегрування частинами, заміна змінної, інтегрування раціональних функцій, обчислення визначених і невласних інтегралів.*

Annotation. *The article discusses the use of program Microsoft Mathematics for learning the integral calculus of functions of one variable. Described indefinite integrals, calculated automatically, algorithms integration by parts and variable substitution, decomposition of rational functions in partial fractions and its integration, as well as the calculation of definite and improper integrals. On concrete examples demonstrate the limited use of the program and ways to overcome these difficulties. It is shown that the use of Microsoft Mathematics allows to accelerate the formation of technology integration skills and deepen their knowledge of integration methods.*

Key words*: Microsoft Mathematics, integral calculus, integration by parts, variable substitution, integration of rational functions, calculation of definite and improper integrals.*

Час на вивчення вищої математики неухильно скорочується. Підвищується роль самостійної роботи студентів, яку потрібно забезпечити відповідними програмними засобами для інтенсифікації навчального процесу. Тому звернімо увагу на появу в 2011 р. програми Microsoft Mathematics 4.0 (1), яка безкоштовна, локалізована, має зручний інтерфейс, не вимагає спеціального навчання, а її використання нагадує роботу біля дошки або у зошиті.

Література з використання MS Mathematics у навчальному процесі нам не відома. Найбільш корисними для знайомства з можливостями цієї програми є серія уроків (2), короткий огляд (3) та статті (4-6).

Розглянемо застосування цієї програми під час викладання інтегрального числення функцій однієї змінної. Покажемо, що це дозволить студентам краще розібратися у методах інтегрування та прискорить формування у них технічних навичок. Тоді можна приділити більше уваги застосуванням інтегралів.

Основи роботи у MS Mathematics, як системі комп'ютерної алгебри (СКА) початкового рівня, описані в огляді (4). Обмежена кількість ретельно підібраних команд, їх простий синтаксис та відсутність опцій, є скоріше перевагою цієї програми, бо дозволяє почати працювати з нею без попереднього навчання. Наприклад, для обчислення інтегралів є лише одна функція **integral(f, x, нижня_межа, верхня_межа)**. У разі відсутності меж вона повертає невизначений інтеграл від функції **f** по змінній **x**, тобто суму первісної та довільної сталої, що не завжди зручно. Для швидкого введення функції **integral** користуються кнопками із символом інтеграла в групі Вычисления на панелі калькулятора. Позначення змінної можна редагувати. Результати обчислень не можна повторити автоматично з іншими даними. Робочий аркуш MS Mathematics є лише звітом про виконані команди. Його можна зберегти у файлі, переглянути або надрукувати, але не можна повторно виконати. Для обчислення іншого інтеграла потрібно принаймні редагувати команди робочого аркушу та повторно їх виконати. Це відрізняє MS Mathematics від потужних (і дорогих) СКА, таких як Maple, Mathematica або MathCAD, і не вимагає кардинальних змін у змісті та методиці викладання.

У курсі вищої математики навчання інтегральному численню звичайно починається з невеликої таблиці невизначених інтегралів, методів інтегрування частинами та заміни змінної, інтегрування раціональних дробів і раціоналізуючих підстановок для ірраціональних і трансцендентних функцій. Потім розглядаються визначені та невласні інтеграли й застосування інтегралів.

Наша мета – описати інтеграли, які MS Mathematics обчислює автоматично, алгоритми інтегрування частинами і заміною змінної, розкладання раціональних функцій на прості дроби та їх подальше інтегрування, обчислення визначених і невласних інтегралів. Для ілюстрацій використаємо приклади посібника (7). Перевіримо можливості MS Mathematics розв'язанням прикладів з інтегрального числення Інтернет-класу (8), які мають розв'язки у Mathematica та MathCAD.

Спочатку розглянемо обчислення невизначеного інтеграла. MS Mathematics обчислює табличні інтеграли $\int\frac{dx}{a^2\pm x^2}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ та інтеграли від усіх основних елементарних функцій і деяких їх степенів: $\int(\ln x)^n dx$ для $n=1..8$, $\int(\sin x)^n dx$ і $\int(\cos x)^n dx$ для $n=-2,-1,1..4$, $\int(\tan x)^n dx$ і $\int(\cot x)^n dx$ для $n=1,2$. Для подання тригонометричних виразів вживаються функції секанс $\sec x = 1/\cos x$ і косеканс $\csc x = 1/\sin x$ і обернені до них функції $arc\sec x = \sec^{-1} x$, $arc\csc x = \csc^{-1} x$. Програма також обчислює інтеграли від цих функцій.

У багатьох випадках MS Mathematics може обчислити інтеграл, якщо він зводиться до одного з перелічених вище інтегралів простою підстановкою $t = g(x)$, де $g(x)$ – лінійна або основна елементарна функція. Якщо програма не може виконати команду обчислення інтеграла, то в області виведення цієї команди з'являється його математичний запис.

Формулу інтегрування частинами $\int udv = uv - \int udv$ застосовують за наступною схемою: визначають підінтегральну функцію f і функцію u, обчислюють інтеграл $\int\frac{f}{u}dx$, з якого виключають довільну сталу і визначають функцію v, а потім обчислюють даний інтеграл за формулою $uv-\int v\frac{du}{dx}dx$, де похідну знаходять функцією **deriv**.

Виконаємо приклад $\int xarctgxdx$ інтегрування частинами у MS Mathematics.

1) f:=xarcTan(x)
2) u:=arcTan(x)
3) v:=integral(f/u, x)
4) v:=x2/2
5) I:=uv-integral(vderiv(u, x), x)
6) I_1:=integral((x2+1)/(x2+1),x)-integral(1/(x2+1),x)
7) I:=(-I_1+x2arcTan(x))/2

Зауважимо, що у MS Mathematics запрограмовані обчислення «зворотних» інтегралів $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$ і $\int\sin(\ln x)dx$, $\int\cos(\ln x)dx$, в яких застосування формули інтегрування частинами приводить до того самого інтеграла.

Основним методом інтегрування є заміна змінної або підстановка, що описується формулою $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, де $x=\varphi(t)$ – диференційована функція на відповідному проміжку. Якщо підстановка задається рівнянням, що зв'язує x і t, то його слід розв'язати відносно x функцією **solve**. Підінтегральну функцію $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ після підстановки можна обчислити або безпосередньо, або як похідну визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею. У першому випадку слід присвоїти змінній x значення $\varphi(t)$, обчислити підінтегральну функцію за формулою $g(t) = f(x)\frac{dx}{dt}$ і функцією **clear** очистити змінну x для подальшого використання. У другому випадку буде на дві команди менше, бо $g(t) = \frac{d}{dt}\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx$, де a –

змінна, якій не присвоєно значення. Зауважимо, що MS Mathematics правильно обчислює похідну інтеграла по параметру, якщо підінтегральна функція та межі інтегрування залежать від цього параметра (9, с. 667).

Після обчислення інтеграла $\int g(t)dt$ до змінної x повертаються командою **simplify(*вираз_для_інтеграла*, t=φ⁻¹(x))**, де $t=\varphi^{-1}(x)$ – відповідний розв'язок рівняння $x=\varphi(t)$.

Виконаємо приклад $\int \frac{\sqrt[3]{3+5ctgx}}{\sin^2 x}dx$ підстановкою у MS Mathematics.

1) f:=root(3+5cot(x), 3)/(sin(x))2
2) solve(3+5cot(x)=t3, x)
3) g:=deriv(integral(f, x, a, arcTan(5/(t3-3))), t)
4) I:=integral(g, t)
5) solve(3+5cot(x)=t3, t)
6) I:=simplify(-3t4/20+&c, t=root(5cos(x)/sin(x)+3, 3))

Мета багатьох підстановок – перетворити підінтегральну функцію на раціональний дріб, який інтегрується за відомим алгоритмом. Будь-який раціональний дріб можна подати як суму многочлена і простих дробів двох видів (10, с. 463), які відповідають дійсним або комплексно спряженим кореням знаменника даного дробу. MS Mathematics легко обчислює інтеграли від многочлена і простих дробів першого виду $\frac{A}{(x-a)^m}$. Розглянемо інтегрування простого дробу другого виду $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ із квадратним тричленом q у знаменнику. Рівняння $\frac{dq}{dx}=2at$ визначає лінійну підстановку, що зводить інтеграл від такого дробу до інтеграла виду $\int \frac{Mt+N}{(t^2+d^2)^n}dt$. Якщо програма не обчислює цей інтеграл, то його слід записати як суму інтегралів і обчислити знову. Інтеграл $J_n=\int \frac{dt}{(t^2+d^2)^n}$, який може залишитися, обчислюється за рекурентною формулою (9, с. 35)

$$J_{n+1}=\frac{1}{2nd^2}\frac{t}{(t^2+d^2)^n}+\frac{2n-1}{2nd^2}J_n$$

яка зводить інтеграл J_n до табличного інтеграла J_1 і легко реалізується в MS Mathematics.

Якщо раціональний дріб $\frac{P}{Q}$ подати як суму f простих дробів і, можливо, многочлена, то їх коефіцієнти можна знайти методом невизначених коефіцієнтів (10, с. 440). Для MS Mathematics пропонується наступна модифікація цього методу, що враховує обмеженість обчислювальних засобів цієї програми. Визначимо функцію $R=fQ-P$ та її похідні $R_k=R^{(k)}$, порядок яких не більше степеня P, якщо даний дріб неправильний, або менше степеня Q в іншому випадку. Покладемо змінну даного дробу рівною нулю і визначимо список $L=\{R,R_1,\ldots\}$, після чого очистимо змінну для подальшого використання. Прирівняємо елементи списку L до нуля і розв'яжемо одержану систему лінійних рівнянь для невідомих коефіцієнтів функцією **solve**.

Виконаємо приклад $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$ розкладанням на прості дроби у MS Mathematics.

1) P:=x
2) Q:=(x-1)(x2+1)
3) f:=A_1/(x-1)+(A_2x+A_3)/(x2+1)
4) I:=integral(f, x)
5) R:=fQ-P
6) R_1:=deriv(R, x)
7) R_2:=deriv(R_1, x)
8) x:=0
9) L:={R,R_1,R_2}
10) solve({A_1-A_3=0,-A_2+A_3-1=0,2A_1+2A_2=0})
11) clear(x)
12) I:=simplify(integral((xA_2+A_3)/(x2+1), x)+A_1ln(abs(x-1)), A_1=1/2, A_2=-1/2, A_3=1/2)
13) I:=integral(1/(2(x2+1)), x)-integral(x/(2(x2+1)), x)+ln(abs(x-1))/2

У засосуваннях найбільше значення має випадок, коли знаменник раціонального дробу має не більше однієї пари простих комплексно спряжених коренів (10, с. 463). У такому випадку MS Mathematics автоматично розкладає дріб на суму простих дробів і многочлена й обчислює інтеграл, залишаючи, можливо, інтеграл від простого дробу другого виду. Наприклад, MS Mathematics автоматично обчислює інтеграли $\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$, $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)^2}dx$, $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

Функція **integral** не допрацьована для обчислення визначеного інтеграла. Інколи MS Mathematics не може обчислити визначений інтеграл навіть від функції, для якої вона обчислює невизначений інтеграл. Тому доцільно обчислювати визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца: спочатку обчислити первісну функцією **integral**, а потім визначений інтеграл функцією **simplify**. Наприклад, обчислимо інтеграл $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

1) I:=integral(1/(cos(x))2, x, pi/6, pi/4)
2) F:=integral(1/(cos(x))2, x)
3) I:=simplify(tan(x), x=pi/4)-simplify(tan(x), x=pi/6)

Розглянемо невласні інтеграли в MS Mathematics. Якщо програма може обчислити невласний інтеграл, то виводиться його значення.

Якщо ж вона визначає розбіжність інтеграла, то виводиться знак нескінченності. В інших випадках в області виведення з'являється математичний запис інтеграла або вираз *Indeterminate*. Наприклад, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ подається у вигляді $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}$, для значень $p\le 1$ програма виводить знак нескінченності, а для $p>1$ – значення інтеграла. Але інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ подається у вигляді $\frac{1}{1-p}$, для значень $p\ge 1$ програма виводить знак нескінченності, а для $p<1$ – значення інтеграла.

MS Mathematics обчислює невласні інтеграли $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ і $\int_1^{+\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$, але не може обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$. Якщо ж останній інтеграл подати у вигляді $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+5}$, то програма успішно справляється із задачею. MS Mathematics не може обчислити невласні інтеграли $\int_0^1\ln x dx$ і $\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, але легко справляється із завданням після застосування формули Ньютона-Лейбніца.

Для з'ясування можливостей MS Mathematics були розв'язані приклади занять 15-19 з інтегрального числення курсу математичного аналізу в Internet-класі з вищої математики (8) на сайті Exponenta.ru. Порівняння одержаних розв'язків з наведеними рішеннями тих самих прикладів у СКА MathCAD та Mathematica показало, що MS Mathematics у більшості випадків виглядає не гірше цих потужних (і дорогих) програм.

Отже, можливостей MS Mathematics цілком достатньо для початку навчання інтегральному численню функцій однієї змінної. Обмежені можливості цієї програми вимагають від користувача доброго володіння теоретичними основами цієї теми. Відсутність автоматизації розгалужених алгоритмів робить роботу в MS Mathematics схожою на обчислення з калькулятором, лише інтелектуальним. Тому її використання не вимагає суттєво змінювати зміст і методику викладання. Все сказане дозволяє зробити висновок про доцільність використання MS Mathematics при навчанні інтегральному численню.

Література:

1. Microsoft Download Center. Microsoft Mathematics 4.0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.microsoft.com/ru-ru/download/details.aspx?id=15702. – Назва з екрану.
2. Math and Multimedia. Microsoft Mathematics Tutorial Series [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://mathandmultimedia.com/2012/03/10/microsoft-mathematics-tutorials/. – Назва з екрану.
3. Жизнь в Интернете. Microsoft Mathematics – помощник для решения математических задач [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lifevinet.ru/soft/reshenie-matematic-zadach.html. – Назва з екрану.
4. Зюков М. Е. Обучение высшей математике с использованием Microsoft Mathematics / М. Е. Зюков // Вісник Луганського національного університету імені Тараса Шевченко (педагогічні науки) – 2013, № 20 (279). – С. 67-72.
5. Зюков М. Є. Навчання лінійній алгебрі з використанням Microsoft Mathematics / М. Є. Зюков // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 42 – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2015. – С. 246-251.
6. Зюков М. Є. Використання Microsoft Mathematics для навчання аналітичній геометрії / М. Є. Зюков // Сб. науч. тр. междунар. конф. «Современные иновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2015», 21-22 мая 2015 г. – Днепропетровск: НГУ, 2015. – С. 320-326.
7. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах: навч. посібник у 3 част. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г.М. Кривошеєва. Ч. 2. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.
8. Exponenta.ru. Internet-класс по высшей математике [Электронный ресурс], 2016 – Режим доступа: http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp, свободный. – Загл. с экрана.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд., стереотип. Т. 2 – М.: Физматлит, 2002. – 810 с.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики: учебник в 5 т. / В. И. Смирнов. – 23-е изд., стереотип. Т. 1 – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 479 с.