

УДК 514.18 (043.3)

Ботвіновська С. І.

*К.т.н., доцент**кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки**Київського національного університету будівництва і архітектури,**Botvinovska@ua.fm**orcid.org/0000-0002-1832-1342*

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ СГМ

Анотація: в роботі розглядаються питання аналізу збіжності ітераційних процесів у нелінійних задачах статико-геометричного методу при формоутворенні дискретних каркасів кривих ліній та поверхонь. Проаналізовано вибір алгоритму моделювання ДПК на прикладі площинної задачі формування дискретного каркаса кривої лінії під впливом нормальних зусиль, з різними законами розподілу величин векторів цих зусиль.

Ключові слова: статико-геометричний метод, ітераційні процеси, нелінійні задачі, нормальні зусилля.

Група нелінійних задач статико-геометричного методу формування кривих ліній та поверхонь виникає тоді, коли у системі рівнянь рівноваги вузлів зовнішні формоутворюючі зусилля нелінійно залежать від координат суміжних вузлів.

Якщо, в узагальненій рекурентній формулі величина зовнішнього навантаження функціонально пов'язана із координатами вузлів нелінійно, то задача формування дискретного каркаса поверхні є нелінійною, оскільки рівновага кожного вузла описується нелінійним рівнянням:

$$u_{i,j,1} + u_{i,j,2} + \dots + u_{i,j,l-1} + u_{i,j,l} - lu_{i,j} + f_1(u_{i,j,1}, u_{i,j,2}, \dots, u_{i,j,l-1}, u_{i,j,l}, u_{i,j}) = 0 \quad (1)$$

де l – кількість в'язей в одному вузлі локальної системи координат;

$u_{i,j}$ – координати вузла у глобальній системі координат;

$f_1(u)$ – нелінійна функція залежності зовнішнього формоутворюючого навантаження від координат вузлів.

Прикладами можуть бути задачі побудови точкових каркасів безмоментних оболонок, таких як: пневматичні оболонки, поверхні яких формуються під дією рівномірно-розподіленого внутрішнього тиску; резервуар з рідиною, дискретний каркас поверхні якого формується під впливом нерівномірно-розподіленого між вузлами сітки внутрішнього збиткового тиску або підводна споруда, поверхня якого формується під впливом нерівномірно-розподіленого між вузлами зовнішнього тиску.

Оскільки зусилля впливу на оболонку повинні бути нормальними до поверхні оболонки, їх параметри нелінійно залежать від координат групи суміжних вузлів. Такі задачі описуються системою нелінійних рівнянь (1), яка розв'язується методом послідовних наближень.

Для розв'язання подібних задач в роботі використовується різновид методу Ньютона-Рафсона [1, 2], відповідно до якого покроково уточнюються координати вузлів дискретного каркаса поверхні шляхом кількоразового рішення системи лінійних рівнянь рівноваги вузлів. Цей метод обраний тому, що він наближено моделює фізичний процес формування поверхні.

Розподіл зовнішнього навантаження на вузли дискретного каркаса може бути рівномірним, лінійно та нелінійно розподіленим, що суттєво впливає на збіжність ітераційного процесу. Тому, виникає необхідність в аналізі отриманих результатів. Для вивчення питань збіжності ітераційних процесів обрана площинна задача формування дискретного каркаса кривої лінії під впливом нормальних зусиль із різними законами розподілу величин векторів зусиль між вузлами.

При формоутворенні двовимірного образу (дискретного точкового каркаса поверхні) рівняння рівноваги вузла на сітці з чотирикутними клітинами має вигляд:

$$\begin{aligned}x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 4x_{i,j} + x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + kP_{i,j,x} &= 0; \\y_{i,j-1} + y_{i,j+1} - 4y_{i,j} + y_{i-1,j} + y_{i+1,j} + kP_{i,j,y} &= 0; \\z_{i,j-1} + z_{i,j+1} - 4z_{i,j} + z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + kP_{i,j,z} &= 0;\end{aligned}\tag{2}$$

де $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ – координати вузла у системі відліку iOj ; $kP_{i,j,u} = f(x_{i,j-1}, x_{i,j+1}, x_{i-1,j}, x_{i+1,j}, x_{i,j}, y_{i,j-1}, y_{i,j+1}, y_{i-1,j}, y_{i+1,j}, y_{i,j}, z_{i,j-1}, z_{i,j+1}, z_{i-1,j}, z_{i+1,j}, z_{i,j})$ – координатні складові вектора зовнішнього формоутворюючого зусилля (функція $kP_{i,j,u}$ є нелінійною, відносно координат вузлів).

При формування одновимірного образу (дискретного точкового каркаса кривої лінії) рівняння рівноваги вузла спрощується:

$$\begin{aligned}x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + kP_{i,x} &= 0; \\y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP_{i,y} &= 0;\end{aligned}\tag{3}$$

де $kP_{i,x}$ та $kP_{i,y}$ – координатні складові зовнішніх зусиль kP_i , що описуються нелінійними функціями залежності від координат x_{i-1} , x_{i+1} , y_{i-1} , y_{i+1} .

Системи рівнянь (2), (3) є нелійними і розв'язуються методом послідовних наближень. Ітераційний процес передбачає покрокове уточнення одного з параметрів. Відомо, що збіжність ітерацій, в методі послідовних наближень, суттєво залежить від близькості першого наближення до кінцевого результату, однак, якщо кінцевий результат невідомий, то і задання першого наближення є невизначеним [3].

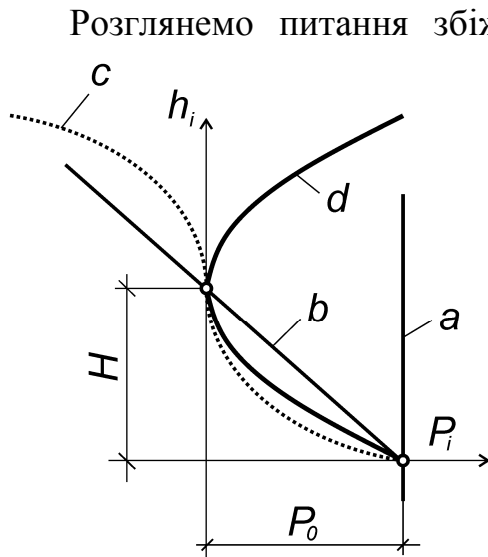


Рис. 1. Графіки розподілу величин векторів зовнішніх зусиль між вузлами ДПК

Розглянемо питання збіжності ітераційних процесів при формуванні дискретного каркаса кривої під впливом нормальних зовнішніх зусиль із різним розподілом величин векторів зусиль між вузлами за параболічним законом $P_i = a_0 + a_1 h_i + a_2 h_i^2 + a_3 h_i^3 + \dots + a_n h_i^n$, де $h_i = y_i$ – висота довільного вузла ДПК, n – порядок параболі (рис. 1).

Задано обмеження $0 \leq n \leq 3$.

1. $P = a_0$ – постійне навантаження ($n=0$);
2. $P = a_0 + a_1 h$ – лінійний розподіл навантаження ($n=1$);
3. $P = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$ – розподіл

навантаження по параболі другого порядку ($n=2$);

4. $P = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3$ – розподіл навантаження по параболі третього порядку ($n=3$).

Або у дискретному вигляді:

1. Рівномірний розподіл величин векторів зовнішніх зусиль, рис. 1, лінія *a*:

$$P_i = P_0 \quad (4)$$

де P_0 – величина зовнішнього зусилля у вузлі D_0 (рис. 2).

2. Лінійний закон розподілу величин векторів зовнішніх зусиль, рис. 1, лінія *b*:

$$P_i = \frac{P_0(H - h_i)}{H} \quad (5)$$

де H – ордината на графіку розподілу зовнішніх зусиль, при якій величина зусилля $P=0$; $h_i = y_i$ – ордината довільного вузла ДПК (рис. 2).

3. Розподіл величин векторів зовнішніх зусиль по параболі 2-го порядку, рис. 1, крива *d*:

$$P_i = P_0 \left(1 - \frac{h_i}{H}\right)^2 \quad (6)$$

4. Розподіл величин векторів зовнішніх зусиль по параболі 3-го порядку, рис. 1, крива *c*:

$$P_i = P_0 - \frac{3P_0 h_i}{H} + \frac{3P_0 h_i^2}{H^2} - \frac{P_0 h_i^3}{H^3} \quad (7)$$

Вектор нормального зусилля, прикладеного до заданого вузла кривої, є перпендикулярним до дотичної, яка в свою чергу, у дискретному вигляді приблизно визначається як пряма, паралельна хорді, що проходить через два вузла ($A_{n/2}, C_{i-2}$) (рис. 2), суміжні до вузла B_{i-1} [4].

Тоді, функція f_i у рівнянні (1) набуває вигляду:

$$kP_{ix} = \frac{P_i(y_{i+1} - y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i-1} - x_{i+1})^2 + (y_{i-1} - y_{i+1})^2}};$$

$$kP_{iy} = \frac{-P_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{\sqrt{(x_{i-1} - x_{i+1})^2 + (y_{i-1} - y_{i+1})^2}};$$
(8)

де P_i – величина вектора зовнішнього зусилля, яка назначається у відповідності із заданим графіком розподілу зусиль (4) – (7), між вузлами;

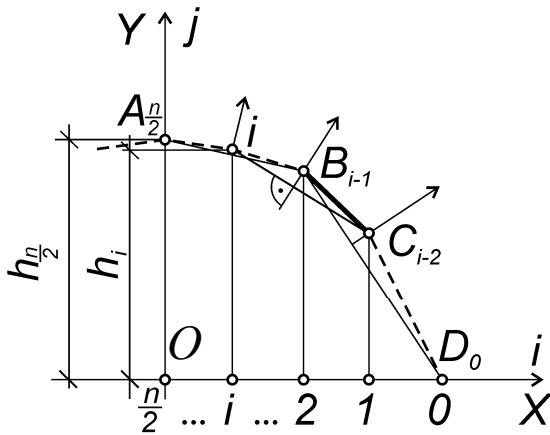


Рис. 2. Схематичне зображення ДПК і векторів зовнішніх зусиль

kP_{ix} , kP_{iy} – координатні складові вектора зовнішнього зусилля P_i .

За вихідні дані для тестових прикладів приймемо координати трьох заданих вузлів із співвідношенням

$$0 < \frac{OA_{n/2}}{OD_0} = \frac{OA_{n/2}}{OD_{n-1}} = \frac{h_{n/2}}{l} \leq 2.$$

Приймаємо для всіх прикладів число вузлів ДПК $n = 9$, (рис. 3) та задаємо графіки розподілу величин векторів зовнішніх зусиль між вузлами (рис. 1).

Задається припустима похибка σ розв'язання задачі. Ця похибка визначається як різниця значень коефіцієнта k двох суміжних ітерацій.

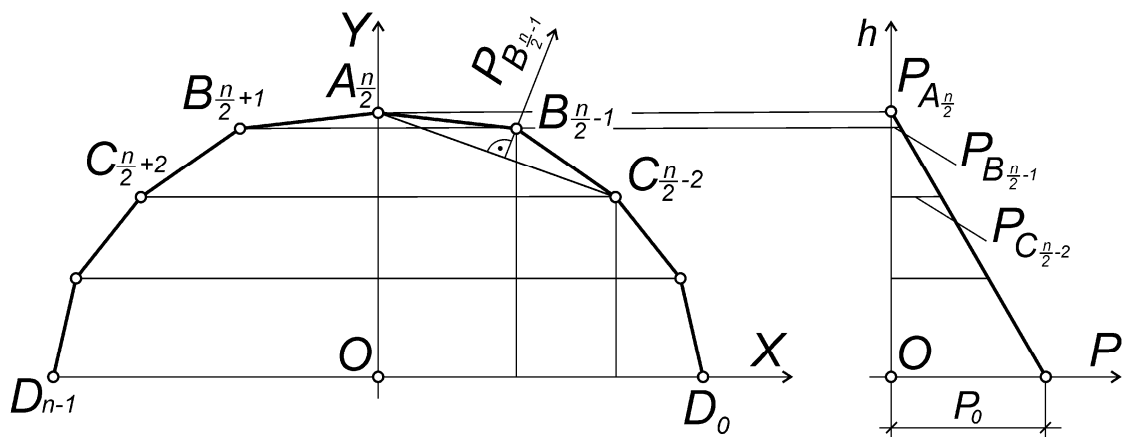


Рис. 3. Вихідні дані для моделювання ДПК під впливом нормальних зусиль, прикладених до вузлів та розподілених за лінійним законом

Задаємо $-0.0001 \leq k \leq 0.0001$. В силу симетрії вихідних даних розрахунки можна виконувати лише для вузлів половини моделі (рис. 3).

Відомо [4], що якщо зовнішнє зусилля дорівнює нулю, то три суміжні вузла опиняться на одній висоті. Тому, можна продемонструвати властивість:

Властивість. Зовнішнє навантаження в екстремальному вузлі ($A_{n/2}$) ДПК (рис. 3) не повинно дорівнювати нулю.

Якщо, при заданій висоті (найвищого) екстремального вузла кривої, зовнішнє зусилля, за графіком (рис. 4, з), приймається рівним нулю, то три суміжні вузла кривої (рис. 4, а) ($B_{(n/2)-1}, B_{(n/2)+1}, A_{n/2}$), відповідно до рівняння рівноваги вузла ($A_{n/2}$): $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0$, де $n/2 = i$, будуть мати однакову висоту. Тоді, співвідносно до графіка розподілу зусиль, величини $P_{(n/2)+1,y} = P_{n/2,y} = P_{(n/2)-1,y} = 0$ (рис. 4, б).

Якщо у вузлі ($B_{(n/2)-1}$) зусилля $P_{(n/2)-1,y} = 0$, відповідно до рівняння цього вузла $y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} = 0$ наступний вузол ($C_{(n/2)-2}$) буде мати таку саме ординату (рис. 4, в). Продовжуючи цей процес, всі вузли ДПК опиняться на одній горизонтальній прямій $y = y_i$, що унеможливило проходження ДПК через вузли $D_0 = D_{n-1}$.

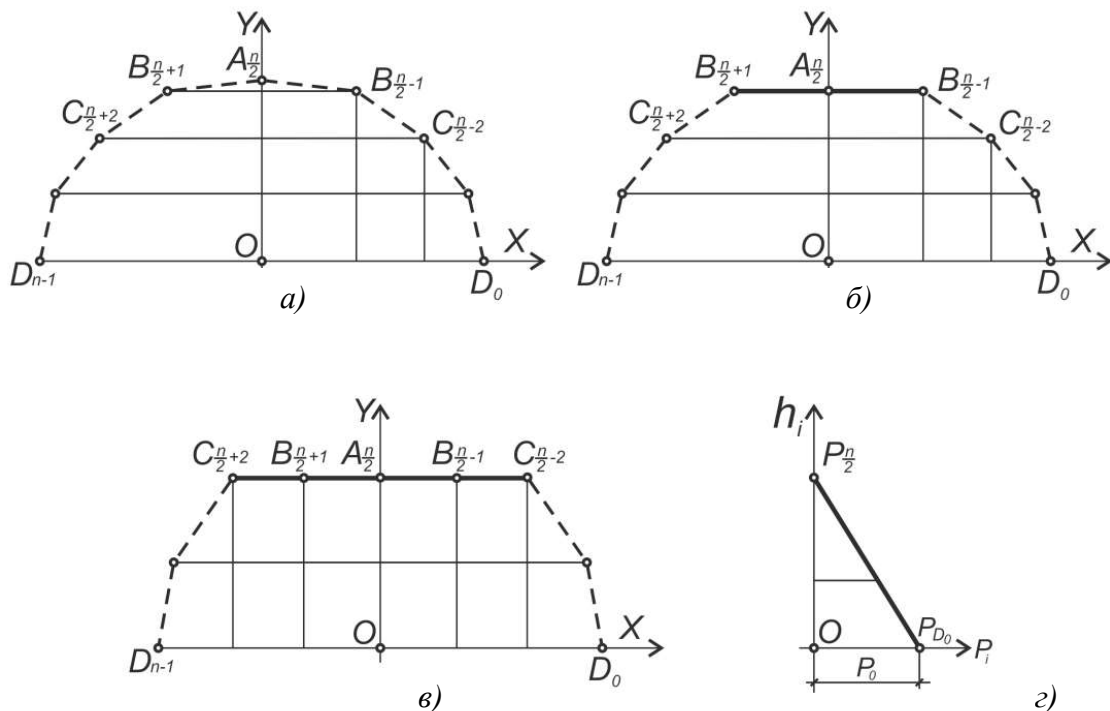


Рис. 4. Вплив нульового за величиною зовнішнього зусилля, що діє в екстремальному вузлі ДПК, на форму кривої

Для порівняльного аналізу збіжності пропонується два алгоритми організації ітераційного процесу при побудові дискретного каркаса кривої лінії за допомогою статико-геометричного методу:

перший – уточнення координат вузлів із заданим сталим відношенням $h_{n/2}/l$, де l – проліт кривої (абсциса точки D_0);

другий – уточнення координат вузлів при покроковому збільшенні величини $h_{n/2}/l$. Причому, результат першої ітерації на попередньому кроці приймається за початкове наближення для другої ітерації на наступному кроці. Покрокове розв'язання задачі дозволяє на кожному кроці покращити початкове наближення для наступного кроку ітерації, що суттєво впливає на збіжність ітераційного процесу. По суті, ітераційний процес за цим алгоритмом складається із двох етапів. На першому, з яких, покроково збільшується відношення h_i/l до досягнення максимального $h_{n/2}/l$. На другому етапі, координати вузлів ДПК уточнюються при сталій величині $h_{n/2}/l$.

На останньому кроці алгоритму визначається та аналізується величина похибки σ знайденого рішення: $\sigma = k_j - k_{j-1}$. Завершення ітераційного процесу відбувається тоді, коли похибка результату розв'язку системи рівнянь не перебільшує припустиму.

Після кожної ітерації, у кожному алгоритмі, аналізується збіжність процесу δ , порівнянням похибок у поточній та попередній ітераціях, за формулою: $\delta = \sigma_i - \sigma_{i-1}$.

За результатами обчислень, за першим з приведених алгоритмів, побудовано тривимірні графіки залежності між числом ітерацій (q) та відношеннями $(P_{n/2}/P_0)$ і $(h_{n/2}/l)$ (рис. 5, а, б, в). На рис. 5, а показано залежність числа ітерацій від відношення між ординатою екстремального вузла $A_{n/2}$ ДПК до абсциси вузла D_0 – величини $(h_{n/2}/l)$, з одного боку, та від відношення зовнішнього зусилля в екстремальному вузлі $A_{n/2}$ кривої до зусилля у вузлі D_0 – величини $(P_{n/2}/P_0)$, з іншого боку, при лінійному законі розподілу векторів зовнішніх зусиль P_i .

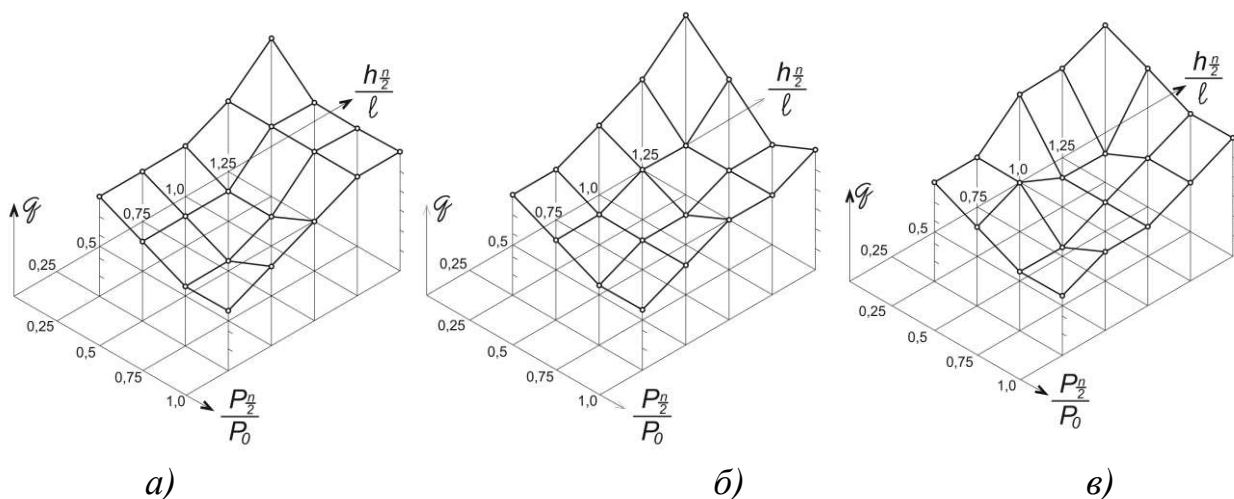


Рис. 5. Тривимірні графіки зміни числа ітерацій

На рис. 5, б, в показано аналогічно побудовані тривимірні графіки, але при розподілі величин векторів зовнішнього навантаження P_i між вузлами за параболічним законом другого та третього порядків, відповідно.

Аналіз графіків, побудованих за результатами обчислень координат вузлів ДПК за першим алгоритмом показав, що:

1. Число ітерацій для отримання кінцевого результату збільшується із збільшенням порядку параболи та із зростанням збільшення співвідношення $h_{n/2}/l$.
2. Коли процес починає розходитись, з'являються асимптотичні лінії, що показують межу збіжності процесу.
3. За отриманими результатами, за графіками, можна обирати максимальне припустиме співвідношення $h_{n/2}/l$ (якщо закон розподілу величин векторів зовнішніх зусиль заданий) при моделюванні ДПК, коли процес не буде розходитись.
4. Якщо закон розподілу векторів зусиль рівномірний, то збіжність процесу буде залежати лише від стріли підйому кривої лінії. Чим більше стріла підйому, тим більшим буде число ітерацій для отримання результату, і чим менша стріла підйому – тим меншим буде число ітерацій, при заданій величині прольоту кривої.

Висновки. Порівнявши графіки результатів двох алгоритмів можна зробити загальний висновок, що із збільшенням порядку параболи закону розподілу величин векторів зовнішніх зусиль з'являється максимально можливе значення співвідношення $h_{n/2}/l$, при якому ітераційний процес ще буде збігатись. Причому, ця величина зменшується із зростанням порядку параболи. Точність прийнятого першого наближення, для наступного кроку алгоритму, не суттєво впливає на збіжність процесу, але невдало вибране перше наближення може значно збільшити число ітерацій.

Література

1. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике / Б.Т. Поляк // Труды ИСА РАН, 2006. №. 28. – С. 48-66. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.isa.ru/proceedings/images/documents/2006-28/44-62.pdf>, свободный.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. –590 с.
3. Ботвіновська С.І. Нелінійні задачі формування дискретних образів статико-геометричним методом / С.І.Ботвіновська // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б.Хмельницького; гол. ред. кол. А.В.Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2014. – Вип. 3. – С. 21–28.

4. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графік. Спеціальні розділи. Випуск 1.– Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.

Аннотация

Ботвиновская С. І. Доцент кафедри начертательной геометрии и инженерной графики Киевского национального университета строительства и архитектуры.

Исследование сходимости итерационных процессов в нелинейных задачах СГМ.

В работе рассматриваются вопросы исследования сходимости итерационных процессов в нелинейных задачах при моделировании, с помощью статико-геометрического метода (СГМ), дискретных каркасов кривых линий или поверхностей под действием нормальных внешних усилий, приложенных к их узлам. Рассматриваются два алгоритма моделирования дискретного каркаса кривой линии, и используются разные законы распределения величин векторов внешних усилий между узлами ДПК. Проведен анализ сходимости итерационных процессов, на примере плоскостной задачи формообразования дискретного каркаса кривой линии.

Ключевые слова: статико-геометрический метод, итерационные процессы, нелинейные задачи, нормальные усилия.

Annotation

S. Botvinovska Candidate of Technical Sciences of department of descriptive geometry, engineering graphics in Kyiv National University of Construction and Architecture.

Research of convergence of iterative processes in tasks of design of discrete frameworks of curves or surfaces a SGM with the nonlinear systems of equalizations.

The questions of research of convergence of iterative processes in nonlinear tasks, namely in the task at the design of the discrete frameworks of surfaces or lines by means of a static-geometric method (SGM) are examined in the article.

The analysis of results of convergence of iterative processes is executed on the example of two-dimensional problem, namely on the example of design of discrete framework of the line. Problems are examined, when the different laws of distribution of sizes of vectors of normal external efforts are used between the knots of curve.

Keywords: a static-geometric method, iterative processes, the nonlinear system of equalizations, the normal forces