УДК 622.647

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНВЕЙЕРНОЙ ЛЕНТЫ

В. В. Воробъев, И. И. Киба

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская 20, г. Кременчуг, 39600, Украина.
E-mail: vvv@kdu.edu.ua, tehm@kdu.edu.ua

Приведено строгое доказательство двухволновой структуры поперечных колебаний конвейерной ленты (без учета сил инерции поперечного сечения). Поперечные колебания представляют собой суперпозицию двух типов колебаний, сдвинутых по фазе на прямой угол. Формы этих колебаний называются соответственно собственными и сопровождающими, причем последние при $v = 0$ и $\varepsilon = 0$ исчезают, поскольку всецело обусловлены силами инерции Кориолиса подвижной нагрузки.

Ключевые слова: двухволновые колебания, сопровождающие формы, подвижная нагрузка, собственные вектор-функции, формула Даламбера.

ТОЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСТИВИХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ КОНВЕЄРНОЇ СМУГИ

В. В. Воробйов, І. І. Киба

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева 20, м. Кременчук, 39600, Україна.
E-mail: vvv@kdu.edu.ua, tehm@kdu.edu.ua

Наведено класичне обґрунтування двохвильової структури поперечних коливань конвеєрної смуги (без урахування сил інерції поперечного перерізу). Коливання є суперпозицією двох типів коливань, зсунутих по фазі на прямий кут. Форми цих коливань мають назву відповідно власних і супровідних, при цьому останні при $v = 0$ і $\varepsilon = 0$ пропадають, оскільки вони обумовлені силами інерції Коріоліса рухомого навантаження.

Ключові слова: двохвильові коливання, супроводні форми, рухоме навантаження, власні вектор-функції, формула Даламбера.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. При проектировании, изготовлении и эксплуатации машин и механизмов для горных и земляных работ возникает необходимость расчета динамических характеристик ленточных конвейеров, ременных передач, шлангов и трубопроводов с протекающей гибкостью ленточных пил, канатов подъемных устройств [1].

Сюда же примыкают задачи динамических конструкций и сооружений, испытывающих влияния подвижных нагрузок а также задачи динамики объектов переменной длинны и объектов с неголономными связями [2, 3].

Отметим, что в классической теории колебаний упругих тел представляется суперпозицией собственных колебаний, а место разделения переменных дает возможность получить формы и определить частоты собственных колебаний.

Однако, в упомянутых выше случаях, перечень которых является далеко неполным, колебания имеют более сложную структуру. Они представляют собой две группы стоячих волн, в отличие от классического случая их названо двухволновыми [4].

Цель работы – строгое доказательство двухволновой структуры колебаний конвейерной ленты (без учета сил инерции поперечного сечения), схематизируя ее структурной (канатной) натянутой между двумя неподвижными опорами струны, вдоль которой с постоянной скоростью двигается равномерно распределенная инерционная нагрузка.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.

Решение задачи о поперечных колебаниях натянутой между двумя неподвижными опорами струны, вдоль которой движется с постоянной скоростью равномерно распределенная инерционная нагрузка сводится к интегрированию дифференциального уравнения в системе координат(x, u) [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

с однородными и граничными условиями

$$u(0,t) = 0\,, \qquad u(l,t) = 0 \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

Коэффициенты b и c зависят от параметров механической системы величин и имеют следующий вид:

$$b = \varepsilon V\,, \qquad c^2 = (1-\varepsilon)\frac{T}{\rho} - EV^2\,, \tag{4}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\rho_1}{\rho + \rho_1}$, ρ_1 – погонная масса нагрузки, ρ – погонная масса струны, V – скорость движения нагрузки, T – натяжение струны.

В виду наличия смешанной производной в уравнении (1), решение задачи (1)–(3) методом разделения переменных u(x,t) = X(x)T(t) в действительной области невозможно.

Попытаемся построить другие формы разделения переменных, которые позволили бы получить явные выражения для решения по начальным условиям (3), если известны собственные функции соответствующей задачи о собственных значениях.

Первоначально рассмотрим вспомогательный вопрос о получении системы собственных функций задачи и разложений в ряды по ним любого другого решения уравнения (1), в том числе и начальных условий.

Определим тип уравнения (1). Для этого составим его характеристическое уравнение:

$$c^2dt^2 + 2bdxdt - dx^2 = 0, \tag{5}$$

которое распадается на два уравнения

$$\frac{dt}{b+\sqrt{b^2+c^2}} = -\frac{dx}{c^2} \tag{6}$$

$$\frac{dt}{b-\sqrt{b^2+c^2}} = -\frac{dx}{c^2} \tag{7}$$

Интегрируя уравнения (6) и (7), получим уравнение характеристик:

$$\begin{cases}(1-\delta)x - \theta t = C_1,\\(1-\delta)x + \theta t = C_2,\end{cases} \tag{8}$$

где $\delta = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$ $\qquad\theta = \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$ (9)

Примечательной особенностью уравнения обобщенного уравнения струны является то, что в зависимости от соотношения входящих в него параметров, оно может принадлежать каждому из трех типов. Набольший интерес представляет параметр V-скорость инерционной нагрузки, поскольку можно предположить, что остальные параметры (ε, T) неизменны. По знаку подкоренного выражения в обозначениях (9) можно установить что:

− уравнение (1) принадлежит гиперболическому типу, если его коэффициенты допускают выполнение неравенств

$$V < \frac{T}{\varepsilon\rho}, \tag{10}$$

− что вытекает из требования положительности подкоренного выражения;

− уравнение (1) принадлежит эллиптическому типу, если подкоренное выражение отрицательно, т.е. выполняется неравенство (10).

− уравнение (1) принадлежит параболическому типу, если коэффициенты допускают выполнение равенства (10).

Ограничимся лишь областью гиперболичности обобщенного уравнения струны, определяемой неравенством (10), поскольку с точки зрения устойчивости рассматриваемой системы значение параметра V, удовлетворяющее этому неравенству, соответствует докритическим (устойчивости) состояниям [4].

Применяя метод распространяющихся волн для неограниченной струны, получим формулу для решения задачи Коши – найти решение (1), удовлетворяющее начальным данным (3).

Приведем уравнение (1) к виду, содержащему лишь смешанную производную. Для этого новые переменные, используя уравнение характеристик (8), выразим как

$$\begin{cases}\xi = (1-\delta)x - \theta t\\\eta = (1-\delta)x + \theta t\end{cases} \tag{11}$$

Выразим производные функции u(x,t) по переменным x и t через производные по переменным ξ и η и подставим эти выражения в уравнение (1).

Тогда получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \qquad (12)$$

Очевидно, что для всякого решения уравнения (12)

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta} = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ – некоторая функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_2(\eta) + f_1(\xi), \qquad (13)$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ является функциями только переменные ξ и η. Поскольку всякое решение (12) может быть представлено в виде (13) при соответствующем выборе $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$, то формула (13) является общим интегралом уравнения (12).

Следовательно, функция

$$u(x,t) = f_1[(1-\delta)x - \theta t] + f_2[(1-\delta)x + \theta t] \qquad (14)$$

является общим интегралом уравнения (1). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (3):

$$u(x,0) = f_1[(1-\delta)x] + f_2[(1-\delta)x] = \varphi(x), \qquad (15)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\theta f_1'[(1-\delta)x] + \theta f_2'[(1-\delta)x] = \psi(x).$$

Из уравнений (15) получается выражение для f_1 и f_2, которые имеют место для любого значения аргумента:

$$f_1[(1-\delta)x] = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2 0}\int_{x_0}^{x}\psi(a)da - \frac{C}{2},$$

$$f_2[(1+\delta)x] = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2 0}\int_{x_0}^{x}\psi(a)da + \frac{C}{2}, \qquad (16)$$

Подставляя значение в (14) и (16), получим:

$$u(x,t) = \frac{\varphi[(1-\delta)x - \theta t] + \varphi[(1-\delta)x + \theta t]}{2} + \frac{1}{2 0}\int_{(1-\delta)x-\theta t}^{(1-\delta)x+\theta t}\psi(a)da \qquad (17)$$

Формула (17) в предположении двукратной дифференцируемости функции $\varphi(x)$ и однократной дифференцируемости функции $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (3). Назовем ее формулой Даламбера.

Теперь решим основную вспомогательную задачу: найти решение (1) не равное тождественно нулю, удовлетворяющее условиям (2).

Используя уравнение характеристик, введем новые переменные:

$$\begin{cases}\alpha-\beta=(1-\delta)x-\theta t,\\ \alpha+\beta=(1-\delta)x+\theta t,\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha=x\\ \beta=\delta x+\theta t\end{cases} \tag{18}$$

Выразим производные функции *u(x, t)* по переменным *x* и *t* через производные по переменным α и β и подставив эти выражение в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=0 . \tag{19}$$

Представляя решение уравнение (19) в виде произведения

$$u(\alpha,\beta)=(C_1\cos\lambda\alpha+C_2\sin\lambda\alpha)\cdot(C_3\cos\lambda\beta+C_4\sin\lambda\beta),$$

где λ – параметр разделения переменных.

Возвращаясь к старым переменным с учетом однородных граничных условий, можно получить частное решение уравнения (1) в следующем виде:

$$u_n(x,t)=a_n[X_{1n}(x)\cos(\varpi_n t+\varphi_n)+X_{2n}(x)\sin(\varpi_n t+\varphi_n)], \tag{20}$$

$$X_{1n}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}x\right); \tag{21}$$

где $$X_{2n}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}x\right); \tag{22}$$

$$\varpi_n=\frac{n\pi\theta}{\ell} . \tag{23}$$

Частные решения (20) описывают так называемые собственные колебания струны с подвижной инерционной нагрузкой, которым дали следующую механическую интерпретацию [2].

Бесконечный набор решений (20) представляет собой суперпозицию двух типов колебаний, сдвинутых по фазе на прямой угол. При V=0 и ε=0, формы (21) становятся собственными формами колебаний струны (классический случай), а формы (22) исчезают, поскольку всецело обусловлены силами инерции Кориолиса подвижной нагрузки. Поэтому будем называть функции (22) сопровождающими, а по отношению к совокупности функции (21) и (22) употреблять термин «компоненты собственных вектор-функций».

Итак, частные решения обобщенного уравнения струны представим в виде (20), что предопределяет форму разделенных переменных. Назовем такой подход двухволновым представлением собственных колебаний струны с подвижной нагрузкой [4].

Таким образом, в силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений (20) также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2), т.е. решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}x\right)\cos-\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\theta t+\varphi_n\right)\right]. \quad (24)$$

Опираясь на установленную форму решения (20), укажем алгоритм построения решения задачи (1)–(3), который является естественным обобщением метода разделения переменных и позволит получить вещественное решение задачи в виде бесконечного ряда.

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде

$$u(x,t)=X_1(x)\cos(\varpi t+\varphi)+X_2(x)\sin(\varpi t+\varphi) \quad (25)$$

где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ – компоненты вектор-функции, которая характеризирует формы колебаний ϖ – постоянная, определяемая из граничных условий (2). Внося выражение (25) в уравнение (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках и произведя замену $X(x)=X_1(x)+iX_2(x)$ получим уравнение

$$X''+i\varpi\frac{2b}{c^2}X'+\varpi^2\frac{1}{c^2}X=0. \quad (26)$$

Поскольку функции $X_1(x)$ и $X_2(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям, функции X(x) тоже подчинена таковым: X(0)=0 и X(l)=0.

Общий интеграл (26) с точностью до последнего множителя принимает вид

$$X_n(x)=C_n\left(e^{i\lambda_{1n}x}-e^{i\lambda_{2n}x}\right), \quad (27)$$

где $\begin{cases}\lambda_{1n}=\frac{\varpi_n}{c^2}\left(-b^2+\sqrt{b^2+c^2}\right),\\ \lambda_{2n}=\frac{\varpi_n}{c^2}\left(-b^2-\sqrt{b^2+c^2}\right),\\ \varpi_n=\frac{n\pi}{\ell}\theta.\end{cases}$.

Решением исходного уравнения (1) будет

$$u(x,t)=Re[X_n(x)]\cos(\varpi_n t+\varphi_n)+Im[X_n(x)]\sin(\varpi_n t+\varphi_n). \quad (28)$$

После несложных тригонометрических преобразований из (28) получим решение (2), а следовательно, функцию (24).

Выше установлено, что обобщенного уравнения струны дается формулой (14), где функции f_1 и f_2 определяются через начальные данные формулами (16). Эти формулы определяют $f_1(z)$ и $f_2(z)$ лишь при $0 \le z \le l$, что дает возможность построить решение внутри характеристического треугольника $(1-\delta)x-\theta t\geq 0, (1+\delta)x+\theta t\geq \ell$. Чтобы построить решение внутри полосы $0 \le z \le l$ и чтобы добиться выполнения граничных условий (2), воспользуемся искусственным приемом продолжения начальных данных на всю ось x.

Определив функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $0 \le z \le l$, продолжим их на z так, чтобы $f_1(z)=-f_2(-z)$, $f_1(\ell-z)=-f_2(\ell+z)$. Далее продолжим $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на всю прямую с периодическими функциями с периодом 2ℓ: $f_1(z+2\ell)=f_1(z)$, $f_2(z+2\ell)=f_2(z)$. Предположим, что продолжению на всю ось z функции $f_1(z)$ и

$f_2(z)$ непрерывные и имеют непрерывные первые и вторые частные производные. Для выполнения такого предположения начальные данные (3) должны иметь непрерывные первые и вторые производные при $0 \le z \le l$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(\ell) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0, \quad \psi''(0) = \psi''(\ell) = 0. \qquad (29)$$

Теперь нетрудно убедиться, что формула (14) будет давать решение обобщенного уравнения струны при всех x и t , в частности при всех x и t из полосы при $0 \le z \le l$.

Из равенств:

$$f_1(\theta t) + f_2(-\theta t) = 0 \text{ и } f_1\big((1+\delta)\ell + \theta t\big) + f_2\big((1-\delta)\ell - \theta t\big) = 0$$

следует выполнение граничных условий (2).

Как известно, всякую достаточно периодическую функцию можно разложить в равномерно сходящий ряд Фурье

$$f_1(z) = -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right);$$

$$f_2(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right).$$

Коэффициенты a_n и b_n удовлетворяет неравенствам $|a_n| \langle const / n^2$, $|b_n| \langle const / n^2$, вытекающим из непрерывности вторых производных φ'' и ψ''. Для решения (14) приходим к следующему представлению:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}[(1+\delta x) + \theta t]\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}[(1-\delta x) - \theta t]\right)\right\} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}[(1+\delta x) + \theta t]\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}[(1-\delta x) - \theta t]\right)\right\} \qquad (30)$$

Выполнив несложные тригонометрические преобразования, получим функцию (24). Тем самым мы показал, что любое решение обобщенного уравнения струны, отвечающее достаточно гладким начальным данным, которые удовлетворяют условиям согласования (29) с граничными условиями (2), может быть разложено в ряд по частным решениям (14).

ВЫВОДЫ. Получены точные решения краевой задачи (1), (2) с обоснованиями известных в классической теории волнового уравнения. Бесконечный набор решений (20) представляет собой суперпозиции двух типов колебаний, сдвинутых по фазе на прямой угол. Формы этих колебаний (21) и (22) называются соответственно собственными и сопровождающими, причем при V=0 и ε=0 формы (21) становятся формами колебаний струны (классический случай), а формы (22) исчезают. К совокупности функций (21) и (22) принято употреблять в дальнейшем термин «компоненты собственный вектор-функции».

ЛИТЕРАТУРА

1. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1968. – 724 с.
2. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. − К.: Наукова думка, 1965. – 192 с.
3. Динамика машин для открытых горных и земляных работ / С.А. Панкратов. – М.: Машиностроение, 1967. – 156 с.
4. Механічні процеси в механічних системах / О.А. Горошко, А.Г. Дем'яненко, С.П. Киба. – К.: Либотов, 1991. – 188 с.

THE PRECISE DEFINITION OF OWN FORMS OF CONVEYOR BELT TRANSVERSE OSCILLATIONS

V. Vorobyov, I. Kyba
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine.
E-mail: vvv@kdu.edu.ua, tehm@kdu.edu.ua

It is shown strong evidence of two-wave structure of transverse vibrations of a conveyor belt (excluding the inertial forces of the cross-section). The transverse oscillations are a superposition of two types of oscillations, phase-shifted by a right angle. The forms of these oscillations are called the self and the attendant, the latter in $\nu = 0$ and $\varepsilon = 0$ disappear, as they are wholly due to the Coriolis forces of inertia of the moving load.

Key words: two-wave oscillations accompanying form, moving load, proprietary vector functions, the D'Alambert formula.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Samarskyi A.A. The equations of mathematical physics. – Moscow: Nauka, 1968. – 724 p. [in Russian]
2. Goroshko O.A., Savin G.N. An introduction to the mechanics of deformable bodies of one-dimensional variable length. – M: Naukova Dumka, 1965. – 192 p.
3. Pankratov S.A. Dynamics of machines for open pit mining and excavation. – M: Mechanical Engineering, 1967. – 156 p. [in Russian]
4. Goroshko O.A., Dem'yanenko A.G., Kyba S.P. Mechanical processes in mechanical systems. – K.: Lybotov, 1991. – 188 p.

Стаття надійшла 03.08.2013.

УДК 622.286.4(043.3)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗМЕРОВ ЗОН УПЛОТНЕНИЯ МАССИВА ОПЛЫВАЮЩИХ ПЕСЧАНЫХ ГРУНТОВ ВЗРЫВАМИ ТРАНШЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ ВЫБРОСА В ПРОМЫШЛЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Б. Р. Раимжанов
Узбекский НИИ геотехнологии и цветной металлургии O'zGEORANGMETLITI»
У. Ф. Насиров
Навоийский государственный горный институт