

sic reason for deterioration of the mining equipment parts is processes of plastic bearing stress, fragile chipping and micro- and macro-scratching. Reserves of increase parts wear resistance hardened by explosion are connected with optimization of parameters of the hardening process and development of the combined technologies of treatment. A method of combined hardening of excavator bucket teeth is offered. The method includes hardening by a contact charge and shock waves from collision with the plate being thrown. Schemes of processes ensuring high efficiency of hardening of excavator bucket schemes are developed.

Key words: wear resistance, excavator bucket teeth, Gadfil'd steel, explosivothermal treatment, combined technologies.

REFERENCES

1. Dobrovolskiy, A.G., Koshelenko, P.I. (1989) *Abrazivnaya iznosostoykost materialov* [Abrasive wear resistance of materials], *Handbook*, Technology, Kiev, Ukraine.
2. Krupin, A.V., Soloviev, V.V., Popov, G.S. and Krastev, M.P. (1991). *Obrabotka materialov vzrivom* [Material Treatment by explosion], Metallurgy, Moskow, Russia.
3. Sorokin, G. M. (2008), "New criteria of improve ment of the durability of machines", *Journal of Engineering*, no. 5, pp. 19–23.
4. Dragobetsky V.V. (2003), "Some aspects of the use of welding and hardening by explosion in metal treatment", *Journal of Engineering Technology, The Russian Federation*, iss. 5 (23), pp. 10–12.
5. Drozd, M. S., Matlin, M.M. and Sidyakin, Y.I., (1986), *Ingenernie raschety uprugoplasticheskoy kontaktnoy deformateii* [Engineering Calculations elastoplastic contact deformation], Mechanical Engineering, Moskow, Russia.

Стаття надійшла 24.12.2014.

УДК 624.15.001

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ С РАСПОЛОЖЕННОЙ НА НЕЙ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ НА ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА-ФУССА

В. Г. Шаповал, С. Л. Прошин

Государственное ВУЗ "Национальный горный университет"
просп. Карла Маркса, 19, г. Днепропетровск, 49005, Украина.
E-mail: shap-ww@mail.ru, stanislavproshyn@gmail.com

В. С. Андреев

Днепропетровский национальный университет железнодорожного
транспорта имени академика В. Лазаряна
ул. Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, 49010, Украина.

Выполнен анализ и математическое моделирование задачи, посвященной определению амплитуд вынужденных колебаний плитных фундаментов под

действием динамической нагрузки от машин и оборудования. В данном контексте получено точное аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях бесконечной в плане плиты, с расположенной в её центре точечной массой, на упругом Винклеровском основании. Для получения решения использовалась техника интегральных преобразований Бесселя. Установлено, что на формы колебаний плиты существенное влияние оказывают ее толщина, плотность, частота изменения во времени приложенной к плите внешней нагрузки и жесткостные свойства основания.

Ключевые слова: вынужденные стационарные колебания, фундаменты под машины и оборудование, напряженно-деформированное состояние бесконечной плиты.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ПЛИТИ З РОЗТАШОВАНОЮ НА НІЙ ТОЧЕЧНОЮ МАСОЮ НА ОСНОВІ ВІНКЛЕРА-ФУСА

В. Г. Шаповал, С. Л. Прошин

Державний ВНЗ "Національний гірничий університет"
просп. Карла Маркса, 19, м. Дніпропетровськ, 49005, Україна.
E-mail: shap-ww@mail.ru, stanislavproshyn@gmail.com

В. С. Андрєєв

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна
вул. Лазаряна, 2, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна.

Виконано аналіз та математичне моделювання задачі, присвяченої визначенню амплітуд вимушених коливань плитних фундаментів під впливом динамічного навантаження від машин та обладнання. В даному контексті отримано точне аналітичне рішення задачі про вимушені коливання нескінченної в плані плити, з розташованою в її центрі точковою масою, на Вінклеровській пружній основі. Для отримання розв'язку використовувалась техніка інтегральних перетворень Бесселя. Встановлено, що на форму коливань плити суттєво впливають її товщина, щільність, частота зміни в часі зовнішнього навантаження та жорсткісні властивості основи.

Ключові слова: вимушені стаціонарні коливання, фундаменти під машини та обладнання, напружено-деформований стан нескінченної плити.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. При решении практических задач проектирования зданий и сооружений, возведенных на сплошном плитном фундаменте, очень часто возникает необходимость учета динамического воздействия расположенного на нем оборудования на их несущие конструкции [1–3]. При этом также существует проблема учета взаимного влияния расположенных в различных местах на плитном фундаменте машин и оборудования с динамическими нагрузками (в данном случае имеют место технологические и экологические проблемы).

В этой связи проблема определения амплитуд и форм вынужденных колебаний, обусловленных динамическими воздействиями на плитные фундаменты расположенных на них машин и оборудования, является актуальной и требует своего решения.

Задача исследований сформулирована так. Упругие свойства грунтового основания описываются с использованием коэффициента постели C_z . Плита неограниченных размеров имеет толщину h , а плотность ее материала равна ρ . В центре плиты приложена вертикальная сосредоточенная сила P , совершающая гармонические колебания с частотой ω , и масса M . Требуется определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний плиты W в точке с координатой r от времени t .

Попытка решения близкой по смыслу задачи предпринималась автором работ [4, 5]. При этом в полученные им результаты закрались такие ошибки и неточности:

1. В уравнении изгиба плиты (3.122) на странице 114 вместо оператора $D \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right)$ следует писать $D \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right)$, где D – цилиндрическая жесткость плиты; r – координата; t – время.

2. При подстановке полученного автором решения в виде $W(r) = K \cdot kei(\alpha_1 \cdot r)$ в уравнение для определения амплитуд колебаний плиты вида

$$D \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right)^2 \cdot W(r) + (C_z - \rho \cdot h \cdot \omega^2) \cdot W(r) = \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot (Q + m \cdot \omega^2 - C_1)$$

имеет место неравенство вида $0 \neq \frac{\delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot (Q + m \cdot \omega^2 - C_1)$, т.е. данное решение не является верным.

Здесь $kei(x)$ – модифицированная функция Макдональда с нулевым индексом [6]; $\delta(r)$ – дельта – функция Дирака; $\alpha_1 = \sqrt[4]{\frac{C_z - \rho \cdot h \cdot \omega^2}{D}}$; K – коэффициент пропорциональности; m и C_1 – соответственно расположенные в центре плиты сосредоточенные масса и жесткость.

В этой связи, ввиду практической и теоретической значимости рассматриваемой задачи, целесообразно получить ее правильное (в рамках принятых допущений) решение. На достижение этой цели и направлены материалы изложенных ниже исследований.

Целью работы является определение амплитуд вынужденных колебаний гладкой бесконечной в плане плиты, с расположенной в её центре точечной массой, на основании Винклера как функций координат и времени.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Согласно [6, 8, 9] зависимость перемещения гладкой плиты, с расположенной в ее центре массой M , от времени t в точке с координатой r в полярной системе координат имеет вид:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 W + CW + \rho h \frac{d^2 W}{dt^2} = P \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot e^{i\omega t} - M \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot \frac{d^2}{dt^2} W_0. \quad (1)$$

Здесь, $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака [3].

Решение дифференциального уравнения (1), для нахождения прогиба плиты W , ищем в виде:

$$W = e^{i\omega t} \int_0^{\infty} A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha, \quad (2)$$

где $A(\alpha)$ – подлежащая определению функция параметра α , а $J_0(\alpha \cdot r)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [3].

Запишем выражение (1) в виде:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) W + CW - \omega^2 \rho h W = P \frac{\delta(r)}{2\pi r} + \omega^2 M \frac{\delta(r)}{2\pi r} W_0. \quad (3)$$

С учетом (2), рассмотрим составляющие правой части выражения (3):

$$\left. \begin{aligned} P \frac{\delta(r)}{2\pi r} &= \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha \\ \omega^2 M \frac{\delta(r)}{2\pi r} W_0 &= \omega^2 M \frac{W_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставим выражения (4) в (3) и получим:

$$\int_0^{\infty} \left\{ (D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2) A(\alpha) - \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \alpha \right\} J_0(\alpha \cdot r) d\alpha = 0. \quad (5)$$

Из (5) необходимо выразить искомую функцию $A(\alpha)$. Тогда получим

$$A(\alpha) = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \alpha \cdot \frac{1}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (2), получим выражение

$$W(r) = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \quad (7)$$

Найдем предел выражения (7) при $r=0$

$$\lim_{r=0} W(r) = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \quad (8)$$

Тогда выражение прогиба в точке $r=0$ имеет вид

$$W_0 = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \quad (9)$$

Обозначим

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2} = I \quad (10)$$

при этом $J_0(\alpha \cdot r) = 1$.

Подставив (10) в (9), получим

$$W_0 = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \cdot I \quad (11)$$

Приведем выражение (11) к виду

$$W_0 = \frac{P}{1 + \frac{M\omega^2}{2\pi} \cdot I} \quad (12)$$

Далее найдем решение интеграла (10):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2} = \frac{1}{D} \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^4 + \frac{C - h\rho\omega^2}{D}} = \\ &= \frac{1}{D} \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^4 + a^4} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\pi}{4a^2} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a = \sqrt[4]{\frac{C - h\rho\omega^2}{D}} \quad (14)$$

Подставив (13) в (11), получим

$$W_0 = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4Da^2} \quad (15)$$

Преобразуя выражение (15) получим

$$W_0 = \frac{P}{2\pi \left(1 + \frac{M\omega^2}{8Da^2}\right)} = \frac{8PDa^2}{2\pi(8Da^2 + M\omega^2)} \quad (16)$$

Подставим полученное выражение (16) в (7). Тогда

$$W(r) = \frac{P}{2\pi D} \left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right) \int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{\alpha^4 + a^4} \quad (17)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\zeta}{r}; \quad \zeta = \alpha r \\ d\alpha &= \frac{d\zeta}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и подставим (18) в (17)

$$W(r) = \frac{P \cdot r^4}{2\pi D} \left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right) \int_0^{\infty} \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a^4 r^4} \quad (19)$$

Обозначим

$$a_1 = a \cdot r^4 \quad (20)$$

тогда

$$W^* = \frac{2\pi DW}{\left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M\omega^2}\right)} = \int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a_1^4} \quad (21)$$

Выражение (19) представляет собой искомую зависимость прогиба плиты от координаты и времени, тогда как выражение (21) есть зависимость относительного прогиба от параметра a , где a определяется выражением (14).

ВЫВОДЫ. 1. Получено аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях бесконечной плиты, с расположенной в её центре точечной массой, на основании Винклера.

2. Установлено, что величина амплитуды зависит от свойств основания и плиты, ее геометрии, частоты изменения и величины внешней нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баркан Д. Д. Динамика оснований и фундаментов. - М.: Стройвоенмориздат, 1948. – 410 с.
2. СНиП 2.02.05-87: Строительные нормы и правила: Фундаменты машин с динамическими нагрузками. – М., 1988. – 79 с.
3. Шаповал В. Г., Швец В. Б., Конопляник А. Ю. Сравнительный анализ поведения плитного и свайного фундаментов при воздействии на них динамической нагрузки от линий метрополитена // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса, 2001. – С. 190–196.
4. Киричек Ю. А. Комбинированные массивно-плитные фундаменты. – Днепропетровск: ПГАСА, 2001. – 207 с.
5. Кірічек Ю. О. Взаємодія комбінованих масивно-плитних фундаментів із ґрунтовою основою при різних видах навантажень: автореф. дис. ..док. техн. наук: ПГАСА, Дніпропетровськ, 2001. – 311 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 840 с.
7. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
9. Тимошенко С. П., Войновский –Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

FORCED VIBRATIONS OF INFINITE PLATE LAID ON A WINKLER-FUSS FOOTING AND SUBJECTED TO A POINT MASS

V. Shapoval, S. Proshyn

State Higher Educational Institution “National Mining University”

prosp. K. Marksa, 19, Dnepropetrovsk, 49005, Ukraine.

E-mail: shap-ww@mail.ru, stanislavproshyn@gmail.com

V. Andreev

Dnipropetrovsk national university of railway transport named after academician
V. Lazaryan

vul. Lazaryana, 2, Dnipropetrovsk, 49010, Ukraine.

The analysis and mathematical modeling of the problem concerning the definition of forced vibrations amplitude of slab foundation under dynamic load of machinery and equipment are performed. In this context, an exact analytical solution of forced vibrations in terms of an infinite slab with a point mass located in its center is obtained, assuming the plate is resting on an elastic Winkler footing. To obtain the solution it is integral Bessel transformation technique that was used.

Findings show that waveforms of the plate are significantly influenced by thickness and density of the plate, as well as by frequency changes of the external load applied to the plate and by stiffness properties of the base.

Key words: forced stationary vibrations, foundations for machinery and equipment, the stress-strain state of an infinite slab.

REFERENCES

1. Barkan, D.D. (1948) *Dinamika osnovaniy i fundamentov* [Dynamics of footings and foundations], Stroyvoenmorizdat, Moscow, Russia.
2. Construction norms and rules: SNiP 2.02.05–87. *Fundamenty mashin s dinamicheskimi nagruzkami* [Foundations of machines with dynamic loads], Moscow, Russia.
3. Shapoval, V.G., Shvets, V.B., and Konoplyanik, A.Yu. (2001) “Comparative analysis of the behavior of plate and pile foundations when subjected to dynamic loads from the subway lines”, *Visnyk of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*, pp. 190–196.
4. Kirichek, Yu.A. (2001) *Kombinirovannyye massivno-plitnyye fundamenty* [Combined massively-slab foundation], PGASA, Dnepropetrovsk, Ukraine.
5. Kirichek, Yu.A. (2001) “Interaction of combined massively - plate foundations with ground base in various types of loads”, Thesis abstract for Dr. Sc. (Engineering), Prydniprovskaya State Academy of Civil Engineering and Architecture, Dnepropetrovsk, Ukraine.
6. Korn, G., and Korn, T. (1974) *Spravochnik po matematike* [Mathematical handbook], Nauka, Moscow, Russia.
7. Vladimirov, V.S. (1979) *Obobshennyye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized functions in mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.
8. Vlasov, V.Z., and Leont’ev, N. N. (1960) *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic foundation], Fizmatgiz, Moscow, Russia.
9. Timoshenko, S.P., and Voynovskiy-Kriger, S. *Plastiny i obolochki* [Plates and shells], Nauka, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 24.12.2014.