МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ БУДІВЕЛЬНОГО ВИРОБНИЦТВА

УДК 621.929

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИПУЧОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ ВІБРАЦІЙНОМУ ВПЛИВІ

І. В. Коц, М. М. Кутняк

Розглянуто основні розрахункові моделі в механіці сипучих середовищ: моделі одиничної частки, які розглядають сипучий матеріал як дискретне середовище; моделі суцільного середовища, які розглядають сипучий матеріал як якесь єдине цілісне і безперервне середовище, що рухається особливим чином під дією коливань. Запропонована гідродинамічна модель, яка в якості рівняння, що визначає зв'язок між тензором швидкостей деформацій і тензором напружень, може використовувати будь-який реологічне рівняння.

Ключові слова: *математична модель, сипучий матеріал, багатокомпонентна суміш, модель одиничної частки,модель суцільного середовища, реологічна модель.*

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

И. В. Коц, Н. Н. Кутняк

Рассмотрены основные расчетные модели в механике сыпучих сред: модели единичной частицы, которые рассматривают сипучий матеріал как дискретную среду; модели сплошной среды, которые рассматривают сыпучий матеріал как некую единую цельную и непрерывную среду, что движется особым образом под действием колебаний. Предложена гидродинамическая модель, которая в качестве уравнения, определяющего связь между тензором скоростей деформаций и тензором напряжений, может использовать любое реологическое уравнение.

Ключевые слова: *математическая модель, сипучий материал, многокомпонентная смесь, модель единичной частицы, модель сплошнойсреды, реологическая модель.*

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF GRANULAR MATERIAL UNDER VIBRATION ACTION

I. Kots, M. Kutniak

The basic calculation models in the mechanics of granular media: single particle model, which is considered as a discrete particulate material environment; continuum model, which is considered as a kind of free-flowing material unified whole and a continuum that moves in a special way under the influence of vibrations. A hydrodynamic model, which as of the equation that defines the connection between the strain rate tensor and the stress tensor can use any rheological equation.

Keywords*: mathematical model, granular material, multicomponent mixture, the individual particle model, the continuum model, the rheological model.*

Вступ

Протягом останніх десятиліть в цілях забезпечення високого рівня і стабільності якості, підвищення продуктивності праці, оптимізації витрат на транспортування і ефективного використання будматеріалів відбувається широке впровадження сухих будівельних сумішей. Застосування сухих сумішей сприяє скороченню термінів і вартості робіт, дозволяє впроваджувати нові технологічні процеси і матеріали, підвищуючи культуру виробництва, ефективно використовуючи кошти малої механізації. Удосконалення якості сухих будівельних сумішей йде в напрямку їх модифікування шляхом введення різних добавок і компонентів, які надають певні якісні показники. Але також необхідно пам'ятати, що приготування сипучих технологічних багатокомпонентних сумішей – складний процес, в якому важливою операцією є змішування. Існуючі змішувачі не забезпечують якісного однорідного змішування [1-3]. У створенні змішувачів нового покоління перспективним напрямком є використання вібрації.

Метою дослідження є побудова математичної моделі поведінки сипучого середовища у процесі приготування сипучих технологічних багатокомпонентних сумішей.

Практична цінність. Запропоновані моделі гідродинаміки і процесу усереднення гранульованих матеріалів дозволяють отримувати гарне узгодження експериментальних і чисельних даних по розподілу інтегральних та локальних характеристик течії гранульованих матеріалів, аналізувати поля швидкості і концентрації динаміки висококонцентрованою середовища, а також виявляти зони недостатнього якості процесу змішування і. таким чином, генерувати нові, більш досконалі конструкції змішувальних апаратів.

Основна частина

Як відомо, в механіці твердого тіла користуються різними розрахунковими моделями: абсолютно твердого тіла, пружного тіла, пластичного тіла та іншими. В механіці рідин розрахункової моделлю буде ідеальна рідина.

В даний час в механіці сипучих середовищ використовують дві розрахункові моделі:

- моделі одиничної частки, яка розглядає сипучий матеріал як дискретне середовище;

- модель суцільного середовища, яка розглядають сипучий матеріал як якесь єдине цільнета безперервне середовище, що рухається особливим чином під дією коливань.

Моделі одиничної частки

Рух одиничної частки, що розглядається у вигляді матеріальної точки, по вібруючій шорсткій поверхні може бути застосовано для опису дуже широкого кола процесів, таких як, вібраційний поділ сипучих сумішей, вібротранспортування твердих тіл або шару зернистого матеріалу та інші.

Перша робота, присвячена теоретичному дослідженню поведінки матеріальної частинки, що рухається по похилій шорсткій площині з кутом α β до горизонту, яка здійснює гармонічні прямолінійні коливання під деяким кутом β до опорної площини (рис. 1), булаопублікована Г. Ліндвером [1] в 1912 році. Подальший розвиток даної моделі було зроблено І. І. Блехманом, Г. Ю. Джанелідзе, Р. Ф. Нагаєвим та іншими.

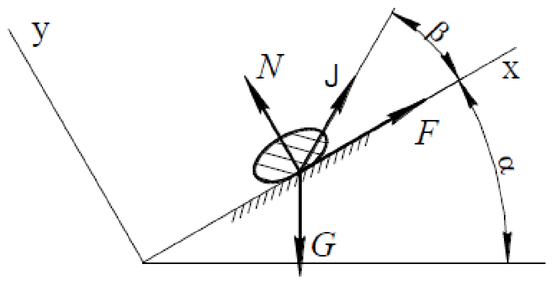

Рисунок 1 – Матеріальна частинка на похилій площині, що здійснює гармонічні прямолінійні коливання

Дана модель є найбільш простою моделлю сипучого середовища. Рівняння відносного руху матеріальної точки по похилій шорсткій площині, що здійснює гармонічні прямолінійні коливання в напрямку, що утворює кут β з вібруючої площиною, в проекціях на рухомі осі координат записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= ma\omega^2 \cos\beta \sin\omega t - mg\sin\alpha + F, \\ m\ddot{y} &= ma\omega^2 \sin\beta \sin\omega t - mg\cos\alpha + N. \end{aligned} \qquad (1)$$

де m – маса частинки;

a, ω - відповідно амплітуда і частота коливань вібруючої площини;

β - кут нахилу траєкторії коливань відносно площини (кут вібрації);

α - кут нахилу площини до горизонту;

g - прискорення вільного падіння;

F – сила опору руху частки;

N – нормаль.

$$\ddot{x} = a\omega^2 \cos\varepsilon \cos\left(\omega t + \delta + \pi\right) - f\left(-a\omega^2 \sin\varepsilon \cos\left(\omega t + \tau + \pi\right) + g\right)\cos\sigma,$$
$$\ddot{y} = a\omega^2 \cos\varepsilon \cos\left(\omega t + \delta + \pi\right) - f\left(-a\omega^2 \sin\varepsilon \cos\left(\omega t + \tau + \pi\right) + g\right)\sin\sigma. \quad (2)$$

де ε – кут спрямованості коливань у вертикальній площині;

δ і τ – фазові кути вертикальних і горизонтальних коливань;

f – коефіцієнт тертя ковзання частинки об поверхню;

$$\cos\sigma = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \sin\sigma = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

У наведених моделях не враховуються сили взаємодії частинки з іншими частинками, сили опору повітряного середовища і об'ємні сили, що виникають в суцільному середовищі. Однак, як показують результати експериментальних досліджень [2], наведені залежності цілком придатні для опису руху окремих досить великих тіл, а також шару, що складається з великих частинок, товщина якого не перевищує 20-30-кратного середнього розміру частинок. При розгляді шару матеріалу більшої товщини модель матеріальної частинки є непридатною. Також вводяться обмеження на використання даної моделі. Модель одиничної частки вважається адекватною, якщо параметри вібрації відповідають таким значенням $g \le a\omega^2 \le 10g$, $20c^{-1} \le \omega \le 30c^{-1}$. Похибка моделі при дотриманні зазначених умов становить 20...30%. Багато дослідників і конструкторів вібраційної техніки використовували дану модель, але вносили в неї коригувальні коефіцієнти, які визначаються емпіричним шляхом.

Моделі одиничної частки припускають, що матеріал постійно контактує з вібруючою поверхнею.

На практиці частинки матеріалу під дією вібрації можуть відриватися від поверхні і знаходитися в зваженому стані. Тому подібні моделі вони не відображають суті явищ, що відбуваються.

Моделі з розподіленими параметрами

Для того щоб не враховувати характер процесів підкидання і зіткнення оброблюваного матеріалу з вібруючої поверхнею, були розроблені пружно-в'язко-пластичні моделі шару сипучого середовища [2]. Подібні моделі засновані на тому, що шар матеріалу представляє собою зосереджену масу *m*, забезпечену системою демпферів з коефіцієнтами в'язкості c_x' та c_y' і системою пружних елементів з коефіцієнтами жорсткості k_x, k_y (рис. 2), які пов'язані з нерухомою системою координат $x'y'$. Рівняння відносного руху шару матеріалу (при відсутності проковзування) в проекції на рухливі осі координат *xOy*, пов'язані з вібруючої поверхнею, записуються як:

$$m\ddot{y} = -m\ddot{y}' - mg\cos\alpha - c_y\dot{y} - k_y\dot{y}; \quad (3)$$

$$m\ddot{x} = -m\ddot{x}' + mg\sin\alpha - c_x\dot{x} - k_x x - c_x'\left(\dot{x}' + \dot{x}\right). \quad (4)$$

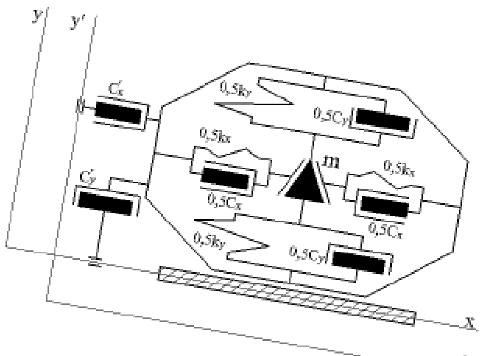

Рисунок 2 – Пружно-в'язко-пластична модель сипучого середовища

При наявності проковзування рівняння руху вздовж осі x запишеться як

$$m\ddot{x} = -m\ddot{x}' + mg\sin\alpha - sign\left(\dot{x}\right) f\left(k_y y + c_y y\right) - c_x'\left(\dot{x}' + \dot{x}\right), \tag{5}$$

де f – коефіцієнт тертя матеріалу об вібруючу поверхню.

При відриві від вібруючої поверхні диференціальні рівняння вільного руху матеріалу мають вигляд:

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} = -\ddot{y}' - g\cos\alpha; \tag{6}$$

$$\ddot{x} + 2n_x \dot{x} = -\ddot{x}' + g\sin\alpha - 2n_x\left(\dot{x}' + \dot{x}\right), \tag{7}$$

де n_x, n_y - коефіцієнти демпфірування, обумовлені зовнішніми опорами переміщення шару відносно осей x і y.

До недоліків подібних моделей можна віднести надто велику кількість рівнянь, що описують поведінку матеріалу, а також можливість використання даних моделей тільки для процесів вібраційного транспортування сипучих матеріалів з невеликою товщиною шару. Подібні моделі не пояснюють таких явищ, як виникнення циркуляційних потоків або хаотичного руху в сипучому середовищі під дією вібрації.

Моделі суцільного середовища

Одна з перших моделей суцільного середовища представлена в роботі [3]. Її поява стимулювалося наступними особливостями руху шару сипучого матеріалу по лотку: залежність швидкості частинок від їх координат в поперечному перерізі лотка (як у вертикальному, так і горизонтальному напрямках); зменшення амплітуди вертикальної складової коливань частинок шару; неможливість існування режимів руху з інтенсивним підкиданням матеріалу (за рахунок утворення повітряної прошарку у дна лотка).

У цій моделі враховується, що сипуче середовище може мати в процесі навантаження два стани - пружний і пластичний. Перший стан може виникнути в результаті деформації окремих часток, другий- внаслідок зсуву часток відносно один одного.

Записані з урахуванням цих стані рівняння суцільного середовища, що представляють сукупність рівнянь теорій пружності та пластичності, виявилися досить складними. Для їх вирішення була введена додаткова гіпотеза про те, що всі шари в процесі руху залишаються плоскими. тоді можна знайти поздовжню швидкість шару, що знаходиться на будь-якій відстані від вільної поверхні лотка [4]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \ddot{\xi} - g\sin\alpha - \left(\left(f_d - s\frac{\partial f_a}{\partial y}\right) sign\frac{\partial V_x}{\partial y} + f_0'\frac{s}{b\cos\theta} signV_x\right)\left(g\cos\alpha + \ddot{\eta}\right), \tag{8}$$

де V_x - швидкість шару уздовж поздовжньої осі x;

$\ddot{\xi}$ - прискорення при переносному русі;

f_d - динамічний коефіцієнт тертя;

s- відстань до вільної поверхні шару матеріалу;

f_0' - коефіцієнт тертя об бічну стінку судини;

b- ширина посудини;

θ - кут нахилу стінки судини;

$\ddot{\eta}$ - прискорення при абсолютному русі.

Реологічні моделі

Як бачимо, незважаючи на правильну первісну постановку завдання, її рішення дає дуже скупу інформацію про процеси, які протікають в шарі матеріалу. Модель не виявляє ділянки циркуляції матеріалу, стохастичного руху його частинок.

Достатньо відомою моделлю суцільного середовища є модель у якій сипучий матеріал під дією вібрації представляється у вигляді в'язкої рідини. Важливим є існування теоретичного підтвердження того, що сипуче середовище, яке піддається вібраційному впливові, може описуватися рівняннями гідродинаміки [5].

В даній роботі використовується кінетичне рівняння Больцмана, в якому рівняння першого наближення є три рівняння:

- Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla(pu)=0, \tag{9}$$

- рівняння Нав'є-Стокса :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\nabla\right)u=\frac{1}{m}F+\frac{1}{\rho}\left(P-\frac{\mu}{3}\nabla u\right)+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u, \tag{10}$$

- рівняння теплопровідності:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\nabla\right)\theta+(\nabla u)\theta-K\frac{1}{\rho}\varepsilon=0, \tag{11}$$

де ∇-оператор «набла»; u - математичне очікування вектора швидкості; P - тензор тиску; μ - динамічна в'язкість; θ - квазі температура; K - коефіцієнт теплопровідності; ε - коефіцієнт, що враховує відвід квазітепла.

Аналіз існуючих методів, що описують динаміку сипучого середовища показав, що більшість з них не характеризують всі сторони дійсної механічної поведінки гранульованого матеріалу, а передають лише окремі специфічні особливості перебігу. Тому були запропоновані моделі руху добре сипучих середовищ.

Описується гідродинамічна модель, яка в якості рівняння, що визначає зв'язок між тензором швидкостей деформацій і тензором напружень, може використовувати будь-яке реологічне рівняння. Розглянемо окремий випадок, в якому в якості зв'язку тензорів використовується узагальнена модель, сформульована З.П. Шульманом:

$$\tau_{ij}=2\left(\frac{\tau_0^{1/k}}{J^{1/m}}+\mu^{1/m}\right)^k J^{(k/m)-1}e_{ij}, \tag{12}$$

де τ_{ij}, e_{ij} - тензор напружень і тензор швидкостей деформацій відповідно;

μ - в'язкість зсуву; τ_0 - межа текучості; *k, m*- реологічні параметри; *J* – інтенсивність швидкостей деформацій, яка в Декартовій системі координат має вигляд

$$J=\begin{bmatrix} 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+ \\ +\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix}^{1/2}. \tag{13}$$

Дана модель досить універсальна і узагальнює основні реологічні моделі нелінійних в'язкопластичних середовищ. При застосуванні до добре сипучих матеріалів з достатнім ступенем наближення можна використовувати умову $\tau_0=0$, в такому випадку залежність (12) переходить в степеневий реологічний закон

$$\tau_{ij}=2\mu^n J^{n-1}e_{ij}=Be_{ij}, \tag{14}$$

де *n=k/m*.

Вираз (14) при *n=1* переходить у лінійну залежність між тензором напружень та тензором швидкостей деформацій, відомий як закон Ньютона. Особливістю даної моделі є нова постановка граничних умов, в якій враховується ефект ковзання середовища на твердій поверхні шляхом введення емпіричного коефіцієнта ковзання β у вигляді:

$$(u_s)_w\cdot\beta=\left(\frac{\partial u_s}{\partial n}\right)_w\cdot(1-\beta), \tag{15}$$

де u_s - тангенціальний компонент швидкості, індекс *w* відповідає значенням параметрів на твердій стінці, величина *n* характеризує напрям нормалі до стінки. Параметр β залежить від властивостей сипучого середовища та стінок каналу. В процесі розрахунків коефіцієнт β вважається величиною постійною і визначається через порівняння чисельних розрахунків з дослідними даними. Коефіцієнт вводиться таким чином, що б при $\beta = 0$ виконувалась умова повного ковзання сипучого середовища на стінці, а при $\beta = 1$ виконувалась умова прилипання.

Висновки

- Отримано результати теоретичних досліджень на підставі запропонованої гідродинамічної моделі, що визначає зв'язок між тензором швидкостей деформацій і тензором напружень, яка може використовувати будь-яке реологічне рівняння.Приведена модель досить універсальна і узагальнює основні реологічні моделі нелінійних в'язкопластичних середовищ.
- Використання результатів проведених досліджень надасть розробникам устаткування для приготування сипучих технологічних багатокомпонентних сумішей можливість визначати їх оптимальні конструктивні й приводні параметри, характеристики робочих режимів, правильний вибір яких сприятиме поліпшенню якості вихідної продукції, підвищить економічність і інтенсивність процесу.

Використана література

1. Lindner G., Förderrinnen. Die Fördertechnik. 1912. Heft 2. – 54p.
2. Кузнецов, С. П. Динамический хаос [Текст] / С.П. Кузнецов. - М.: Физматлит, 2001. - 285с.
3. Слиеде П.Б. Исследование движения сыпучего материала при продольном вибротранспортировании [Текст] / П.Б. Слиеде // Вопросы динамики и прочности. - Рига: Зинатне, 1972. – Вып. 22. – С. 84 - 90.
4. Вибрации в технике [Текст]: справочник: в 6 т. - М.: Машиностроение, 1981. - Т. 2. - 352 с.
5. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника [Текст] / И.И. Блехман. – СПб.: Руда и металлы, 2013. – 640 с.

Коц Іван Васильович – кандидат технічних наук, професор кафедри інженерних систем у будівництві Вінницького національного технічного університету.
Кутняк Микола Миколайович – аспірант Вінницького національного технічного університету.

Коц Иван Васильевич – кандидат технических наук, професор кафедры инженерных систем в строительстве Винницкого національного технического университета.
Кутняк Николай Николаевич – аспірант Винницкого національного технического университета.

Kots Ivan – Ph.D., Professor of engineering system the construction Vinnytsia National Technical University.
Kutniak Mykola – postgraduate student of Vinnytsia National Technical University.