

УДК 621.3.011.72: 621.3.011.732.3

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В RLC-ЦЕПЯХ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

Н.А. Шидловская, член-корреспондент НАН Украины, С.Н. Захарченко, канд.техн.наук
 Институт электродинамики НАН Украины,
 пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина.
 E-mail: shydlovska@mail.ua, snzakhar@bk.ru

Приведены результаты решения дифференциального уравнения, описывающего переходные процессы в последовательной RLC-цепи, сопротивление активного элемента которой представлено суммой экспоненциальных зависимостей от времени. Найдены условия, при которых исходное уравнение может быть преобразовано к уравнению Риккарти. Впервые получено частное решение одного из видов уравнения Риккарти. Показана принципиальная возможность получения точного решения такого уравнения при определенных соотношениях между значениями его коэффициентов. Библ. 6, рис. 3.

Ключевые слова: параметрическая нагрузка, переходный процесс, уравнение Риккарти.

Введение. Параметрическая зависимость эквивалентного электрического сопротивления гетерогенной токопроводящей среды при протекании в ней импульсного тока на примере гранул алюминия в водопроводной воде была рассмотрена в [1]. В [2] методом малого параметра было решено дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс в RLC-цепи с такой нагрузкой, которое моделирует процессы в выходной цепи генератора импульсов. **Целью** настоящей работы является точное решение дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в последовательной RLC-цепи для случая представления параметрической зависимости сопротивления суммой экспонент. Это необходимо для дальнейшего развития теории параметрических цепей в направлении повышения эффективности анализа и оптимизации переходных электромагнитных процессов в них.

Параметрическая модель нагрузки. В ряде случаев объемную электроэрозионную нагрузку целесообразно описывать в виде [1]

$$R_n = R_0 + A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + A_3 e^{a_3 t} = \sum_{i=0}^3 R_i \quad \text{или} \quad R = R_0 + A_{1*} e^{-a_1(t-t_1)} + A_{2*} e^{a_2(t-t_2)} + A_{3*} e^{a_3(t-t_3)}, \quad (1)$$

где $A_1, A_2, A_3, a_1, a_2, a_3, A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}$ – коэффициенты; R_0 – постоянная составляющая сопротивления нагрузки; R_1, R_2, R_3 – параметрические составляющие нагрузки; t_1, t_2, t_3 – моменты времени, являющиеся началом того или иного процесса. Они выбираются из условия трехкратного превышения значений характеристик текущего процесса над остальными. Заметим, что в действительности все процессы протекают одновременно. Выделение точек $t_1 = 0, t_2, t_3$ может быть полезным, если при расчете переходных процессов используется метод припасовывания. Однако во многих случаях не удается выделить эти точки, поскольку значения характеристик нескольких процессов могут иметь близкие значения.

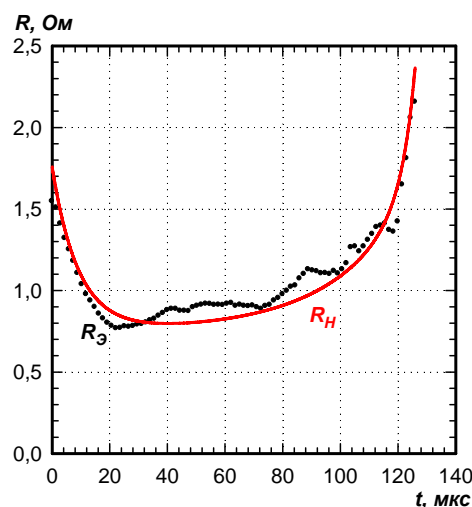


Рис. 1

На рис. 1 показаны экспериментальная R_3 (обозначена точками) и аппроксимированная в соответствии с формулой (1) R_n (сплошная линия) зависимости от времени мгновенного значения сопротивления слоя гранул алюминия в водопроводной воде при их электроэрозионной обработке. На рис. 2 показаны аппроксимирующая зависимость (1) и ее составляющие R_0, R_1, R_2, R_3 по отдельности.

При получении экспериментальной зависимости мгновенных значений эквивалентного электрического сопротивления гранулированной токопроводящей среды от времени в

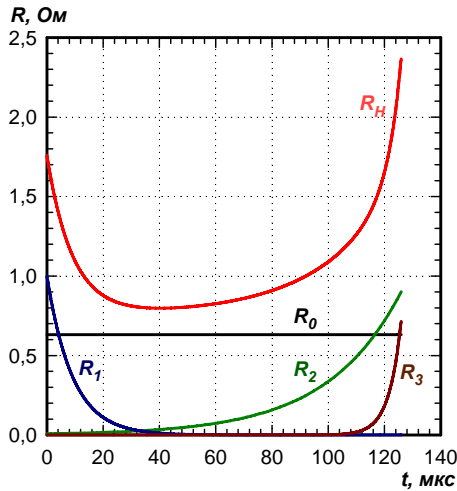


Рис. 2

рассмотрим цепь (рис. 3), нагрузка в которой носит параметрический характер и описывается соотношением (1). Здесь i , i_n , $i_{ш}$ – токи в цепях разряда, нагрузки и шунтирующего сопротивления. Дифференциальное уравнение, характеризующее процессы в этой цепи, имеет вид [3]

$$\frac{R_n + R_u}{R_n} \cdot \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \left\{ \frac{2}{R_u} \cdot \frac{dR_n}{dt} + \frac{R_n}{L_n} \right\} \cdot \frac{di_n}{dt} + \left\{ \frac{1}{R_u} \cdot \frac{d^2 R_n}{dt^2} + \frac{1}{L_n} \cdot \frac{dR_n}{dt} + \omega_0^2 \frac{R_n + R_u}{R_n} \right\} i_n = 0. \quad (2)$$

Представим уравнение (2) следующим образом:

$$f(t) d^2 i_n / dt^2 + g(t) di_n / dt + h(t) i_n = 0, \quad (3)$$

где

$$f(t) = R_u^{-1} (R_0 + R_u + A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + A_3 e^{a_3 t}),$$

$$g(t) = (R_u L_n)^{-1} \{ R_0 R_u + (R_u - 2a_1 L_n) A_1 e^{-a_1 t} + (R_u + 2a_2 L_n) A_2 e^{a_2 t} + (R_u + 2a_3 L_n) A_3 e^{a_3 t} \},$$

$$h(t) = \frac{1}{C R_u L_n} \{ R_0 R_u + (a_1^2 C L_n - a_1 C R_u + 1) A_1 e^{-a_1 t} + (a_2^2 C L_n + a_2 C R_u + 1) A_2 e^{a_2 t} + (a_3^2 C L_n + a_3 C R_u + 1) A_3 e^{a_3 t} \}.$$

Т.к. уравнение (3) не удастся продифференцировать непосредственно, введем замену переменной

$$y(t) = i_n \exp \left\{ 0,5 \int [g(t) / f(t)] dt \right\} \quad (4)$$

и получим из (2) приведенную или нормальную форму уравнения [4]

$$d^2 y / dt^2 + y F(t) = 0, \quad (5)$$

где

$$F(t) = h(t) / f(t) - 0,25 (g(t) / f(t))^2 - 0,5 (g(t) / f(t))'. \quad (6)$$

Функция $F(t)$ называется инвариантом дифференциального уравнения.

Представим коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 в виде: $a_1 = k_1 a_2$; $a_3 = k_3 a_2$ и преобразуем (3) к виду

$$f(t) = R_u^{-1} (R_0 + R_u + A_1^{-k_1 a_2 t} + A_2 e^{a_2 t} + A_3 e^{k_3 a_2 t}),$$

$$g(t) = (R_u L_n)^{-1} \{ R_0 R_u + (R_u - 2a_1 L_n) A_1 e^{-k_1 a_2 t} + (R_u + 2a_2 L_n) A_2 e^{a_2 t} + (R_u + 2a_3 L_n) A_3 e^{k_3 a_2 t} \}, \quad (7)$$

$$h(t) = \frac{1}{C R_u L_n} \{ R_0 R_u + (a_1^2 C L_n - a_1 C R_u + 1) A_1 e^{-k_1 a_2 t} + (a_2^2 C L_n + a_2 C R_u + 1) A_2 e^{a_2 t} + (a_3^2 C L_n + a_3 C R_u + 1) A_3 e^{k_3 a_2 t} \}.$$

В [1, 2] рассмотрены случаи, когда R_n может быть представлено суммой двух экспонент и постоянной составляющей. Тогда, умножая числитель и знаменатель частных $g(t) / f(t)$ и $h(t) / f(t)$ на $e^{a_1 t} = e^{k_1 a_2 t}$, имеем

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{(R_{ш} - 2k_1 a_2 L_n) A_1 + R_0 R_{ш} e^{k_1 a_2 t} + (R_{ш} + 2a_2 L_n) A_2 e^{(k_1+1)a_2 t}}{L_n (A_1 + (R_0 + R_{ш}) e^{k_1 a_2 t} + A_2 e^{(k_1+1)a_2 t})}; \quad (8)$$

разрядном контуре генератора импульсов, эквивалентная схема которого на интервале замкнутого ключа показана на рис. 3, были приняты следующие параметры элементов: емкость разрядного конденсатора $C=200$ мкФ; индуктивность разрядного контура $L_n=1,8$ мкГн; сопротивление шунтирующего резистора $R_{ш}=3$ Ом. При этом амплитуда напряжения импульсов на нагрузке составляла около $U_m=420$ В, а частота их следования $f=0,5$ Гц. Используемое оборудование, методика проведения эксперимента и параметры слоя гранул описаны в [1]. Для данных режимов работы значения коэффициентов аппроксимирующей функции (1) следующие: $R_0=0,631$ Ом, $A_1=1$ Ом, $A_2=1,523 \cdot 10^{-3}$ Ом, $A_3=1,885 \cdot 10^{-13}$ Ом, $a_1=1,1 \cdot 10^5$ 1/с, $a_2=3,8 \cdot 10^4$ 1/с, $a_3=2,3 \cdot 10^5$ 1/с.

Переходные процессы в последовательной RLC-цепи с параметрической нагрузкой. Рассмотрим

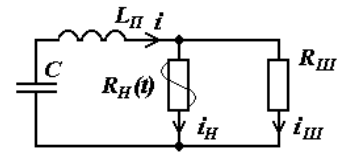


Рис. 3

$$\frac{h(t)}{f(t)} = \frac{(k_1^2 a_2^2 CL_{\text{п}} - k_1 a_2 CR_{\text{ш}} + 1)A_1 + (R_0 + R_{\text{ш}})e^{k_1 a_2 t} + (a_2^2 CL_{\text{п}} + a_2 CR_{\text{ш}} + 1)A_2 e^{(k_1+1)a_2 t}}{CL_{\text{п}}(A_1 + (R_0 + R_{\text{ш}})e^{k_1 a_2 t} + A_2 e^{(k_1+1)a_2 t})}.$$

Введем замену переменных

$$x = e^{a_2 t} \Rightarrow dx = a_2 e^{a_2 t} dt \Rightarrow dt = dx / a_2 x, \quad (9)$$

тогда

$$\int \frac{g(t)}{f(t)} dt = \int \frac{(R_{\text{ш}} - 2k_1 a_2 L_{\text{п}})A_1 + R_0 R_{\text{ш}} x^{k_1} + (R_{\text{ш}} + 2a_2 L_{\text{п}})A_2 x^{(k_1+1)}}{L_{\text{п}} a_2 x (A_1 + (R_0 + R_{\text{ш}})x^{k_1} + A_2 x^{(k_1+1)})} dx. \quad (10)$$

Анализ экспериментальных данных показал, что в диапазоне изменения опорных напряжений от 140 В до 200 В k_1 лежит в пределах $0,963 \div 1,089$, и мы можем принять его равным единице. Тогда отношение $g(t)/f(t)$ становится интегрируемым.

Дискриминант квадратного уравнения в знаменателе

$$(R_0 + R_{\text{ш}})^2 - 4A_1 A_2 = \Delta^2 \quad (11)$$

в данном случае больше нуля и лежит в пределах $12,351 \div 5,13$. Таким образом, согласно [5]

$$\int \frac{g(t)}{f(t)} dt = -\frac{R_{\text{ш}}^2}{2a_2 L_{\text{п}} \Delta} \ln \left| \frac{2A_2 x + R_0 + R_{\text{ш}} - \Delta}{2A_2 x + R_0 + R_{\text{ш}} + \Delta} \right| + 2 \ln \left| A_2 x^2 + (R_0 + R_{\text{ш}})x + A_1 \right| + \left(\frac{R_{\text{ш}}}{a_2 L_{\text{п}}} - 2 \right) x. \quad (12)$$

Следовательно,

$$y(t) = i_{\text{н}} \left(\frac{2A_2 e^{a_2 t} + R_0 + R_{\text{ш}} - \Delta}{2A_2 e^{a_2 t} + R_0 + R_{\text{ш}} + \Delta} \right)^{-\frac{R_{\text{ш}}^2}{4a_2 L_{\text{п}} \Delta}} \cdot (A_2 e^{2a_2 t} + (R_0 + R_{\text{ш}})e^{a_2 t} + A_1)^2 \cdot e^{\left(\frac{R_{\text{ш}}}{2L_{\text{п}}} - a_2 \right) t}. \quad (13)$$

Найдем выражение для функции $F(t)$. Учитывая, что

$$\left(\frac{g(t)}{f(t)} \right)' = \frac{e^{a_2 t} \left\{ a_2 A_2 (R_{\text{ш}}^2 + 2a_2 L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}})) e^{2a_2 t} + 4a_2^2 A_1 A_2 L_{\text{п}} e^{a_2 t} - a_2 A_1 (R_{\text{ш}}^2 + 2a_2 L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}})) \right\}}{L_{\text{п}} (A_1 + (R_0 + R_{\text{ш}})e^{a_2 t} + A_2 e^{2a_2 t})^2},$$

имеем

$$F(t) = \left[A_1^2 (4L_{\text{п}} - CR_{\text{ш}}^2) + A_1 \left\{ 4L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}}) (2a_2^2 CL_{\text{п}} + 1) - 2CR_{\text{ш}}^2 (a_2 L_{\text{п}} + R_0) \right\} e^{a_2 t} + \right. \\ \left. + \left\{ 2A_1 A_2 (4a_2^2 CL_{\text{п}}^2 + 4L_{\text{п}} + CR_{\text{ш}}^2) + 4L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}})^2 - CR_0^2 R_{\text{ш}}^2 \right\} e^{2a_2 t} + \right. \\ \left. + 2A_2 \left\{ 4L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}}) + CR_{\text{ш}}^2 (a_2 L_{\text{п}} - R_0) \right\} e^{3a_2 t} + A_2^2 \left\{ 8a_2 CL_{\text{п}} R_{\text{ш}} + 4L_{\text{п}} - CR_{\text{ш}}^2 \right\} e^{4a_2 t} \right] \times \\ \times \left\{ 2\sqrt{CL_{\text{п}}} \cdot (A_1 + (R_0 + R_{\text{ш}})e^{a_2 t} + A_2 e^{2a_2 t}) \right\}^{-2}. \quad (14)$$

Уравнение (5) заменой переменных $y' = y \cdot z(t)$ преобразуется в уравнение Риккарти [4]

$$dz/dt + z^2 = -F(t). \quad (15)$$

Если найдено решение $z(t)$ этого уравнения, то решение уравнения (5) находится из

$$dy/dt - y \cdot z(t) = C_{1*} A e^{-\int z dt}, \quad (16)$$

где C_{1*} – постоянная интегрирования.

Частное решение уравнения (15) удобно представить в виде

$$z_1 = \frac{D_0 + D_1 e^{a_2 t} + D_2 e^{2a_2 t}}{B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t}}. \quad (17)$$

Тогда, учитывая, что

$$z_1' = \frac{a_2 (B_0 D_1 - D_0 B_1) e^{a_2 t} + 2a_2 D_2 (B_0 - A_0) e^{2a_2 t} + a_2 (B_1 D_2 - D_1 B_2) e^{3a_2 t}}{(B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t})^2}, \\ z_1^2 = \frac{D_0^2 + 2D_0 D_1 e^{a_2 t} + (D_1^2 + 2D_0 D_2) e^{2a_2 t} + 2D_1 D_2 e^{3a_2 t} + D_2^2 e^{4a_2 t}}{B_0^2 + 2B_0 B_1 e^{a_2 t} + (B_1^2 + 2B_0 B_2) e^{2a_2 t} + 2B_1 B_2 e^{3a_2 t} + B_2^2 e^{4a_2 t}},$$

можем записать

$$dz_1/dt + z_1^2 = \left[D_0^2 + (a_2 (B_0 D_1 - D_0 B_1) + 2D_0 D_1) e^{a_2 t} + (2a_2 (B_0 D_2 - D_0 B_2) + D_1^2 + 2D_0 D_2) e^{2a_2 t} + \right. \\ \left. + (a_2 (B_1 D_2 - D_1 B_2) + 2D_1 D_2) e^{3a_2 t} + D_2^2 e^{4a_2 t} \right] \times \left\{ B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t} \right\}^{-2} = -F(t). \quad (18)$$

Таким образом, решая систему уравнений

$$\begin{aligned}
 D_0^2 &= A_1^2 (CR_{\text{ш}}^2 - 4L_{\text{п}}); \\
 a_2(B_0D_1 - D_0B_1) + 2D_0D_1 &= A_1 \left\{ -4L_{\text{п}}(R_0 + R_{\text{ш}})(2a_2^2CL_{\text{п}} + 1) + 2CR_{\text{ш}}^2(a_2L_{\text{п}} + R_0) \right\}; \\
 2a_2(B_0D_2 - D_0B_2) + D_1^2 + 2D_0D_2 &= -2A_1A_2 \left(4a_2^2CL_{\text{п}}^2 + 4L_{\text{п}} + CR_{\text{ш}}^2 \right) - 4L_{\text{п}}(R_0 + R_{\text{ш}})^2 + CR_0^2R_{\text{ш}}^2; \\
 a_2(B_1D_2 - D_1B_2) + 2D_1D_2 &= -2A_2 \left\{ 4L_{\text{п}}(R_0 + R_{\text{ш}}) + CR_{\text{ш}}^2(a_2L_{\text{п}} - R_0) \right\}; \\
 D_2^2 &= A_2^2 \left\{ CR_{\text{ш}}^2 - 8a_2CL_{\text{п}}R_{\text{ш}} - 4L_{\text{п}} \right\}; \\
 B_0 &= 2A_1\sqrt{C}L_{\text{п}}; \quad B_1 = 2\sqrt{C}L_{\text{п}}(R_0 + R_{\text{ш}}); \quad B_2 = 2A_2\sqrt{C}L_{\text{п}},
 \end{aligned} \tag{19}$$

можем найти соответствующие коэффициенты для частного решения (17). Заметим, что частное решение такого вида для уравнения (15) ранее в литературе не встречалось.

Пользуясь свойством уравнения Риккарти [4], его общее решение будем искать в виде

$$z(t) = z_1(t) + (\chi(t))^{-1}. \tag{20}$$

Подставив (20) в уравнение (15), получим

$$d\chi/dt - 2z_1\chi = 1. \tag{21}$$

Представим $\chi(t)$ в виде произведения двух функций $n(t) \times m(t)$ и перепишем последнее уравнение так:

$$m'n + m(n' - 2z_1n) = 1. \tag{22}$$

Согласно методу решения дифференциального уравнения при помощи подстановки Бернулли [4] положим $n' - 2z_1n = 0$ и преобразуем уравнение (22) в систему

$$\begin{cases} n' = 2z_1n; \\ m'n = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Решением первого уравнения системы (23) будет

$$\ln n = 2 \int z_1 dt = \frac{2}{a_2} \int \frac{z_1(x)}{x} dx. \tag{24}$$

Здесь замена независимой переменной происходит в соответствии с (9).

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 n(t) &= \left(\frac{2A_2e^{a_2x} + R_0 + R_{\text{ш}} - 2L_{\text{п}}\sqrt{C}\Delta}{2A_2e^{a_2x} + R_0 + R_{\text{ш}} + 2L_{\text{п}}\sqrt{C}\Delta} \right)^{\frac{2A_1A_2D_1 - (R_0 + R_{\text{ш}})(A_1D_2 - A_2D_0)}{4a_2A_1A_2CL_{\text{п}}^2\Delta}} \times \\
 &\times \left(A_2e^{2a_2t} + (R_0 + R_{\text{ш}})e^{a_2t} + A_1 \right)^{\frac{A_1D_2 - A_2D_0}{a_2A_1A_2\sqrt{C}L_{\text{п}}}} \cdot e^{\frac{a_2D_0}{A_2}t}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

В соответствии с (23),

$$dm = dt/n, \tag{26}$$

и, следовательно,

$$m = \int [n(t)]^{-1} dt + C_*, \tag{27}$$

где C_* – постоянная интегрирования.

Выражения (25) и (27) можно записать следующим образом:

$$n = e^{2 \int z_1 dt}; \quad m = \int e^{-2 \int z_1 dt} dt + C_*. \tag{28}$$

Тогда

$$\chi = m \cdot n = e^{2 \int z_1 dt} \left\{ \int e^{-2 \int z_1 dt} dt + C_* \right\}. \tag{29}$$

Заметим, что в выражениях для n , m и χ многое зависит от интегрируемости функций $z_1(t)$ и $n(t)$, что, в свою очередь, определяется параметрами элементов цепи и напряжением на нагрузке. Следует отметить также, что вид решения $z_1(t)$ определяется видом $F_1(t)$, который зависит от выбора функции, аппроксимирующей зависимость сопротивления нагрузки от времени. Для нахождения решения исходного дифференциального уравнения (3) необходимо вышеприведенные замены переменных произвести в обратном порядке.

Возможен также другой подход к нахождению решения уравнения (15). Коэффициент D_1 находим, решая квадратное уравнение

$$\begin{aligned}
& D_1^2 + 2D_1 \left\{ a_2 \sqrt{CL_n} (A_1 - A_2) + A_1 \sqrt{CR_u^2 - 4L_n} + A_2 \sqrt{CR_u^2 - 8a_2 CL_n R_u - 4L_n} \right\} + \\
& + \left\{ 2a_2 \sqrt{CL_n} \left[A_1 \left((R_0 + R_u) + A_2 \right) \sqrt{CR_u^2 - 4L_n} + A_2 (R_0 + R_u + 2A_1) \sqrt{CR_u^2 - 8a_2 CL_n R_u - 4L_n} \right] + \right. \\
& + 4L_n (R_0 + R_u) \left(2a_2^2 A_1 CL_n + A_1 - 2A_2 - R_0 - R_u \right) - 2CR_u^2 \left[A_1 (a_2 L_n + R_0) - A_2 (a_2 L_n - R_0) - A_1 A_2 \right] + \\
& \left. + 8A_1 A_2 L_n (a_2^2 CL_n + 1) - CR_u^2 R_u^2 \right\} = 0. \quad (30)
\end{aligned}$$

Если уравнение (30) имеет два корня, получаем два частных решения уравнения (15) z_1 и z_2 . При этом, если удастся найти еще одно независимое частное решение уравнения (15) – z_3 , для нахождения его общего решения можно применить метод нахождения общего решения по трем частным решениям [6].

Воспользуемся предложенным алгоритмом решения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами для анализа процессов в цепи рис. 3 со следующими параметрами: $C = 2 \cdot 10^{-4}$ Ф, $L_n = 2 \cdot 10^{-6}$ Гн, $R_{ш} = 3$ Ом и значением опорного напряжения 140 В. При этом будем аппроксимировать нагрузку суммой двух экспонент и постоянной составляющей с коэффициентами аппроксимации: $R_0 = 3,11$ Ом; $A_1 = 25,52$ Ом; $a_1 = 1,07 \cdot 10^{-4}$ 1/с; $A_2 = 1,75 \cdot 10^{-3}$ Ом; $a_2 = 1,11 \cdot 10^{-4}$ 1/с. Погрешность от приравнивания коэффициентов $a_1 \approx a_2$ составляет 3,(603)%, поэтому отношение $g(t)/f(t)$ (8) становится интегрируемым. Из выражений (19) находим коэффициенты частного решения уравнения Риккарти (17) $D_0 = 1,08$; $D_1 = 12,96 \cdot 10^{-2}$; $D_2 = 6,71 \cdot 10^{-5}$; $B_0 = 1,44 \cdot 10^{-10}$; $B_1 = 3,45 \cdot 10^{-9}$; $B_2 = 9,87 \cdot 10^{-11}$.

Для удобства вычислений перепишем формулу (25) в виде

$$n(t) = \left\{ \frac{2B_2 e^{a_2 t} + B_1 - \sqrt{\Delta}}{2B_2 e^{a_2 t} + B_1 + \sqrt{\Delta}} \right\}^{\frac{2B_0 B_2 D_1 - B_1 (B_0 D_2 + B_2 D_0)}{2a_2 B_0 B_2 \sqrt{\Delta}}} \cdot \left(B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t} \right)^{\frac{B_0 D_2 - B_2 D_0}{a_2 B_0 B_2}} \cdot e^{\frac{2D_0}{B_0} t}. \quad (31)$$

Подставляя в (31) значения соответствующих коэффициентов и выполняя алгебраические преобразования, получим

$$n(t) = \left\{ \frac{e^{a_2 t} + 4,05}{e^{a_2 t} + 3487,34} \right\}^{-30,62} \cdot \left(1,44 \cdot 10^{-10} + 3,45 \cdot 10^{-9} e^{a_2 t} + 9,87 \cdot 10^{-11} e^{2a_2 t} \right)^{-6,37} \cdot e^{122,49 a_2 t}. \quad (32)$$

Поскольку второй член произведения представляет квадратный трехчлен относительно $e^{a_2 t}$, найдем его корни и перепишем в виде

$$B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t} = \left(e^{a_2 t} + 4,18 \right) \left(e^{a_2 t} + 3487,21 \right). \quad (33)$$

Оценим погрешность от замены корней уравнения (33) коэффициентами первого сомножителя выражения (32) $k_1 = 4,05$; $k_2 = 3487,21$. Первый корень составляет 103,2% от k_1 , а второй – 99,99% от k_2 . Таким образом мы можем переписать выражение (32) следующим образом:

$$n(t) = \left(e^{a_2 t} + k_1 \right)^{-36,99} \left(e^{a_2 t} + k_2 \right)^{24,25} e^{122,49 a_2 t}. \quad (34)$$

t, c	$a_2 t$	$e^{a_2 t}$	k
$2 \cdot 10^{-4}$	2,22	9,2	14
$1 \cdot 10^{-4}$	1,11	3,03	21
$1 \cdot 10^{-5}$	0,111	1,12	35
$1 \cdot 10^{-6}$	0,0111	1,01	37

Погрешности округления значений коэффициентов степеней в формуле (34) до ближайшего целого числа составляют 0,03%, 0,09% и 0,4% соответственно. Несмотря на то, что соотношение (34) значительно проще выражения (32), нахождение неопределенного интеграла (27) весьма затруднительно. Поэтому оценим значение $e^{a_2 t}$ в различные моменты времени, помня, что длительность процесса при заданных характеристиках цепи не превышает 200 мкс. Соответствующие значения приведены в таблице.

Из таблицы видно, что даже при $t = 2 \cdot 10^{-4}$ значения $e^{a_2 t}$ не превышает 0,26% от k_2 , что позволяет переписать (34) в виде (с учетом округления степеней показателей)

$$n(t) = k_2^{24} \left(e^{a_2 t} + k_1 \right)^{-37} e^{-122 a_2 t}.$$

Для нахождения интеграла (27) воспользуемся выражением [5]

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot a^{n-k}, \quad (35)$$

где $\binom{n}{k}$ или $\binom{k}{n}$ – биномиальный коэффициент. Значения биномиальных коэффициентов могут быть последовательно определены из так называемого треугольника Паскаля [6].

Для $m(t)$ можем записать

$$\begin{aligned} m(t) &= \int \frac{dt}{n(t)} = k_2^{-24} \int (e^{a_2 t} + k_1)^{-37} e^{-122 a_2 t} dt = -k_2^{-24} \sum_{k=0}^{37} \binom{37}{k} k_1^{37-k} \int e^{(k-122)a_2 t} dt = \\ &= k_2^{-24} \sum_{k=0}^{37} \binom{37}{k} \frac{k_1^{37-k}}{(k-122)a_2} e^{(k-122)a_2 t}. \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим, что, поскольку уравнение (2) имеет второй порядок, его решение содержит две постоянные интегрирования, которые появляются далее. Поэтому выражение (36) не содержит постоянной интегрирования. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(t) &= n(t) \cdot m(t) = k_2^{-24} (e^{a_2 t} + k_1)^{-37} e^{122 a_2 t} \cdot k_2^{-24} \sum_{k=0}^{37} \binom{37}{k} \frac{k_1^{37-k} e^{k a_2 t}}{(k-122)a_2} e^{-122 a_2 t} = \\ &= (e^{a_2 t} + k_1)^{-37} \cdot \sum_{k=0}^{37} \binom{37}{k} \frac{k_1^{37-k} e^{k a_2 t}}{(k-122)a_2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Сомножитель в выражении (36), находящийся под знаком суммы, отличается от соответствующего в выражении (35) наличием весового коэффициента в знаменателе.

Проанализируем возможность замены

$$\sum_{k=0}^n \binom{37}{k} \frac{k_1^{37-k} e^{k a_2 t}}{(k-122)a_2} \approx -\frac{(e^{a_2 t} + k_1)^{37}}{a_2 M}, \quad (38)$$

где M – некоторое особым образом выбранное положительное число. Заметим также, что, поскольку знаменатель под знаком суммы имеет отрицательное значение, при замене появляется знак “-”.

Погрешность замены (38) определяется величиной $\sum_{k=0}^n \binom{37}{k} \frac{k_1^{37-k} e^{k a_2 t}}{(k-122) + M}$. При этом слагаемые под знаком суммы принимают как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от того, больше или меньше M относительно $|k-122|$. Кроме того, каждая из разностей в знаменателе имеет разный весовой коэффициент в числителе. Поскольку значение k_1 в рассматриваемом случае превышает “е”, оценим, при каких значениях k величины k_1^{37-k} и $e^{k a_2 t}$ становятся равными друг другу. Для этого решим алгебраическое уравнение $(37-k) \ln(4,05) = x a_2 t$. Значения k , округленные до ближайшего целого числа, для различных моментов времени приведены в таблице, упомянутой выше, из которой видно, что для минимизации абсолютной погрешности, возникающей при замене (38) в диапазоне длительности входного импульса, необходимо выбрать M из значений $(k-122)$ при $k \leq 21$. В рассматриваемом случае $M = 112$ и равно среднему арифметическому $|k-122|$ при изменении k то 0 до 21. Таким образом, выполняя соответствующую замену, можем записать

$$\chi(t) = -(a_2 M)^{-1}. \quad (39)$$

Тогда решением уравнения Риккарти (15) будет

$$z(t) = \frac{D_0 + D_1 e^{a_2 t} + D_2 e^{2 a_2 t}}{B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2 a_2 t}} - a_2 M. \quad (40)$$

Зная соотношение (40), можем найти решение уравнения (16) [4]

$$y(t) = e^{\int z(t) dt} (C_{1*} t + C_{2*}), \quad (41)$$

где C_{2*} – постоянная интегрирования. Интегрируя выражение (40), окончательно получим

$$y = \left\{ \frac{e^{a_2 t} + k_1}{e^{a_2 t} + k_2} \right\}^{\frac{2B_0 B_2 D_1 - B_1 (B_0 D_2 + B_2 D_0)}{2a_2 B_0 B_2 \sqrt{\Delta}}} \cdot (B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t})^{\frac{B_0 D_2 - B_2 D_0}{a_2 B_0 B_2}} \cdot e^{\left(\frac{2D_0}{B_0} - M\right) a_2 t} (C_{1*} t + C_{2*}). \quad (42)$$

Для нахождения $i_{\text{н}}$ из выражения (4), представляя соотношение (8) в виде

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{M_0 + M_1 e^{a_2 t} + M_2 e^{2a_2 t}}{B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t}}, \quad (43)$$

$$\text{где } M_0 = 2A_1 \sqrt{C} (R_{\text{ш}} - 2a_2 L_{\text{п}}); \quad M_1 = 2\sqrt{C} R_0 R_{\text{ш}}; \quad M_2 = 2A_1 \sqrt{C} (R_{\text{ш}} + 2a_2 L_{\text{п}}), \quad (44)$$

и, проводя необходимые математические преобразования, получим

$$i_{\text{н}} = \left\{ \frac{e^{a_2 t} + k_1}{e^{a_2 t} + k_2} \right\}^{\phi_1} \cdot (B_0 + B_1 e^{a_2 t} + B_2 e^{2a_2 t})^{\phi_2} \cdot e^{\phi_3 a_2 t} (C_{1*} t + C_{2*}), \quad (45)$$

$$\text{где } \phi_1 = \frac{2B_0 B_2 (2D_1 - M_1) - B_0 B_1 (2D_2 - M_2) - B_1 B_2 (2D_0 - M_0)}{4a_2 B_0 B_2 \sqrt{\Delta}};$$

$$\phi_2 = \frac{B_0 (2D_2 - M_2) - B_2 (2D_0 - M_0)}{4a_2 B_0 B_2}; \quad \phi_3 = \frac{2D_0 - M_0}{2a_2 B_0} - M.$$

Перепишем соотношение (45) с учетом принятых ранее допущений

$$i_{\text{н}} = k_2^{-\phi_1 + \phi_2} (e^{a_2 t} + k_1)^{\phi_1 + \phi_2} e^{\phi_3 a_2 t} (C_{1*} t + C_{2*}) \quad (46)$$

и найдем производную $i_{\text{н}}$

$$\frac{di}{dt} = k_2^{-\phi_1 + \phi_2} (e^{a_2 t} + k_1)^{\phi_1 + \phi_2} e^{\phi_3 a_2 t} \left\{ a_2 \left(\frac{(\phi_1 + \phi_2) e^{a_2 t}}{e^{a_2 t} + k_1} + \phi_3 \right) \cdot (C_{1*} t + C_{2*}) + C_{1*} \right\}. \quad (47)$$

Для нахождения постоянных интегрирования сформулируем начальные условия

$$i|_{t=0} = 0; \quad i_{\text{н}}|_{t=0} = 0; \quad di/dt|_{t=0} = -U_0 / L_0. \quad (48)$$

где U_0 – напряжение на конденсаторе в начальный момент времени.

Найдем начальные условия для $\frac{di_{\text{н}}}{dt}$, исходя из выражений (48)

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{di_{\text{н}}}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{ш}}} \frac{di_{\text{н}}}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{i_{\text{н}}}{R_{\text{ш}}} \frac{dR_{\text{н}}}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{R_0 + R_{\text{ш}} + A_1 + A_2}{R_{\text{ш}}} \frac{di_{\text{н}}}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{U_0}{L_{\text{п}}}. \quad (49)$$

Для постоянных интегрирования имеем

$$C_{1*} = -\frac{U_0 R_{\text{ш}} (1 + k_1)^6 k_2^8}{L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}} + A_1 + A_2)}; \quad C_{2*} = 0. \quad (50)$$

Округлим до ближайших целых чисел сумму и разность ϕ_1 и ϕ_2 (погрешность составит 3% и 6% соответственно) и запишем окончательное выражение для $i_{\text{н}}$

$$i_{\text{н}} = -\frac{U_0 R_{\text{ш}} (1 + k_1)^6 \cdot t}{L_{\text{п}} (R_0 + R_{\text{ш}} + A_1 + A_2)} (e^{a_2 t} + k_1)^{-6} e^{-111 a_2 t}. \quad (51)$$

Вид соотношения (51) похож на выражение для тока в цепи разряда конденсатора в предельном случае критического затухания [3], что соответствует реальному положению вещей, поскольку из-за сложности процессов апериодический разряд не стремится асимптотически к нулю, а становится равным ему.

Выводы. Показана принципиальная возможность нахождения точного решения дифференциального уравнения, описывающего процессы в цепи рис. 3 с параметрической нагрузкой вида (1). На этапе аналитического решения методическая погрешность отсутствует, поэтому общая погрешность такого подхода определяется погрешностями измерения, аппроксимации и округления в результате

вычислений. К недостаткам подхода следует отнести значительную громоздкость и эвристичность при нахождении $z_1(t)$.

1. Захарченко С.Н., Шидловская Н.А. Моделирование сопротивления гранулированных токопроводящих сред параметрическими зависимостями // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – №5. – С. 91–102.
2. Шидловская Н.А., Захарченко С.Н. Моделирование процессов в цепи разряда конденсатора на искроэрозионную нагрузку // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – №6. – С. 73–81.
3. Поливанов К.М. Физические основы электротехники. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1950. – 558 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – Москва: Наука, 1981. – 720 с.

УДК 621.3.011.72: 621.3.011.732.3

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В RLC-КОЛАХ З ПАРАМЕТРИЧНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Н.А. Шидловська, чл.-кор. НАН України, С.М. Захарченко, канд.техн.наук

Інститут електродинаміки НАН України,

пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна,

E-mail: shydlovska@mail.ua, snzakhar@bk.ru

Наведено результати розв'язку диференціального рівняння, що описує перехідні процеси в послідовному RLC-колі, опір активного елемента якого представлено у вигляді суми експоненціальних залежностей від часу. Знайдено умови, за яких вихідне рівняння може бути перетворено до рівняння Ріккарті. Вперше отримано частинний розв'язок одного з видів рівняння Ріккарті. Показано принципову можливість отримання точного розв'язку такого рівняння при певних співвідношеннях між значеннями його коефіцієнтів. Бібл. 6, рис. 3.

Ключові слова: параметричне навантаження, перехідний процес, рівняння Ріккарті.

TRANSIENTS IN RLC-CIRCUITS WITH A PARAMETRIC LOADING

N.A. Shydlovska, S.M. Zakharchenko

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,

Peremohy pr., 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine,

E-mail: shydlovska@mail.ua, snzakhar@bk.ru

The results of the solution of the differential equation which presenting transients in a serial RLC-circuits resistance of its active element is presented by the sum exponential dependences on a time are given. Conditions at which the input equation can be transformed to the equation of Rikkarti are discovered. It is shown a basic possibility of deriving of an exact solution of such equation at certain relations between values of its factors. References 6, figures 3.

Key words: parametrical loading, transients, the equation of Rikkarti.

1. Zakharchenko S.N., Shidlovskaiia N.A. Modeling of resistance of the granulated current-carrying medium by parametrical dependences // Elektronnoe modelirovanie. – 2012. – Vol. 34. – №5. – Pp. 91–102. (Rus)
2. Shidlovskaiia N.A., Zakharchenko S.N. Modeling of the processes in a circuit of the discharge of the capacitor on a spark-erosion loading // Elektronnoe modelirovanie. – 2012. – Vol. 34. – №6. – Pp. 73–81. (Rus)
3. Polivanov K.M. Physical bases of the electrical engineering. – Moskva-Leningrad: Gosenergoizdat, 1950. – 558 p.
4. Kamke E. Reference Book on Ordinary Differential Equations. – Moskva: Nauka, 1965. – 704 p.
5. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals, Sums, Series and Products. – Moskva: Fismatgiz, 1962. – 1100 p.
6. Bronshtein I.N., Semendiaev K.A. Reference book on mathematics. – Moskva: Nauka, 1981. – 720 p.

Надійшла 07.08.2013
Остаточний варіант 05.12.2013