

ФУНКЦІЇ ГРІНА ПЛОСКОМЕРИДІАННИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ ПОЛІВ НАД ПЛОСКОЮ ГРАНИЧНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

В.М. Михайлов*, докт.техн.наук

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,

вул. Кирпичова, 2, Харків, 61002, Україна,

e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Отримано функції Гріна плоскомеридіанних електричних та магнітних полів, що створюються кільцевим елементарним електричним або фіктивним магнітним зарядом або струмом над плоскою границею провідного, ідеально феромагнітного й ідеально надпровідного півпростору. Виконано перевірку правильності отриманих функцій за допомогою порівняльних розрахунків. Наведено картини екіпотенціальних та силових ліній полів, що розглядаються, а також розподіли напруженості електричного поля і магнітної індукції на граничній поверхні півпросторів. Показано, що функції Гріна є розв'язками задач продовження поля з плоскої границі, які використовують для визначення профілів електродів та соленоїдів, що створюють поля заданого розподілу. Отримано інтегральні перетворення Ханкеля граничних розподілів полів, зумовлених дією кільцевих джерел. Бібл. 10, табл. 1, рис. 3.

Ключові слова: функція Гріна, кільцевий заряд, кільцевий струм, плоска границя, провідний півпростір, ідеально надпровідний півпростір, задача продовження поля.

Вступ. Функції Гріна використовують при розв'язку задач для рівнянь електромагнітного поля у часткових похідних [7, 9], інтегральних рівнянь відносно густини джерел поля [5], а також для продовження поля з граничної поверхні [3, 4, 6]. Найбільш розповсюдженими є функції Гріна для точкових або осьових джерел поблизу плоскої або циліндричної граничної поверхні [9]. На практиці виникають задачі, для розв'язання яких потрібні функції Гріна для кільцевих елементарних джерел.

Мета роботи – отримання функцій Гріна плоскомеридіанних полів таких джерел, що розташовані над плоскою граничною поверхнею.

Функції Гріна електро- та магнітостатичного поля. Розглянемо в циліндричних координатах r, ψ, z нескінченно тонке рівномірно заряджене кільце, розташоване у діелектричному середовищі з постійною абсолютною діелектричною проникністю ϵ паралельно плоскій границі провідного півпростору $z < 0$ (рис. 1, а; \vec{n} – орт зовнішньої нормалі до границі). Лінійна густина електричного заряду дорівнює τ , радіус кільця та його відстань від границі $z = 0$ визначаються циліндричними координатами точки $M - r_M$ і z_M . Знайдемо скалярну функцію Гріна $G_\phi(r, z)$ для потенціалу плоскомеридіанного електростатичного поля системи кільце – провідний півпростір (r, z – циліндричні координати точки спостереження P). Відомо, що електростатичне поле існує в області $z > 0$, а границя $z = 0$ – екіпотенціальна. Тому прийнемо

$$G_\phi(r, 0) = 0. \tag{1}$$

Функція Гріна $G_\phi(r, z)$ має задовольняти рівнянню Лапласа всюди, крім точок зарядженого кільця, граничній умові (1) та прямує до нуля на нескінченності [9]. Першій та третій ви-могам задовольняють відомі формули для потенціалу плоско-меридіанного електростатичного поля, що створюється зарядже-ним кільцем у

необмеженому просторі при $\tau = \text{const}, \epsilon = \text{const}$ [9]. Використовуючи ці формули при $\tau = 1$, метод дзеркальних відображень [8] (на рис. 1, а точка M' – дзеркальне відображення M у граничній площині) і принцип суперпозиції, отримуємо такі функції Гріна:

$$G_\phi(r, z) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sqrt{\frac{r_M}{r}} [k_1 K(k_1) - k_2 K(k_2)], \tag{2}$$

$$G_\phi(r, z) = \frac{r_M}{\epsilon} \int_0^\infty J_0(kr_M) J_0(kr) \times \begin{cases} \text{sh}(kz) e^{-kz_M} & 0 \leq z < z_M, \\ e^{-kz} \text{sh}(kz_M) & z > z_M, \end{cases} dk, \tag{3}$$

$$G_\phi(r, z) = \frac{r_M}{\epsilon} \int_0^\infty \begin{cases} K_0(kr_M) I_0(kr) \\ K_0(kr) I_0(kr_M) \end{cases} \cos[k(z - z_M)] dk, \begin{matrix} r < r_M, \\ r > r_M, \end{matrix} \tag{4}$$

де $K(k_{1,2})$ – повний еліптичний інтеграл першого роду модулів $k_{1,2}$ [10];

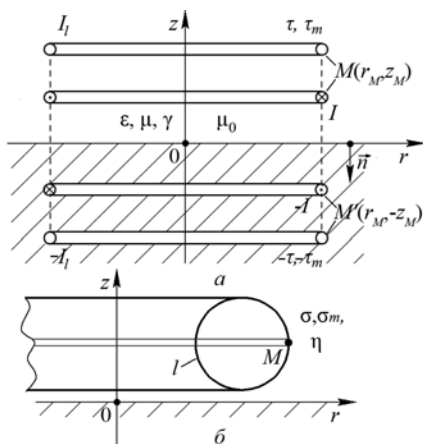


Рис. 1

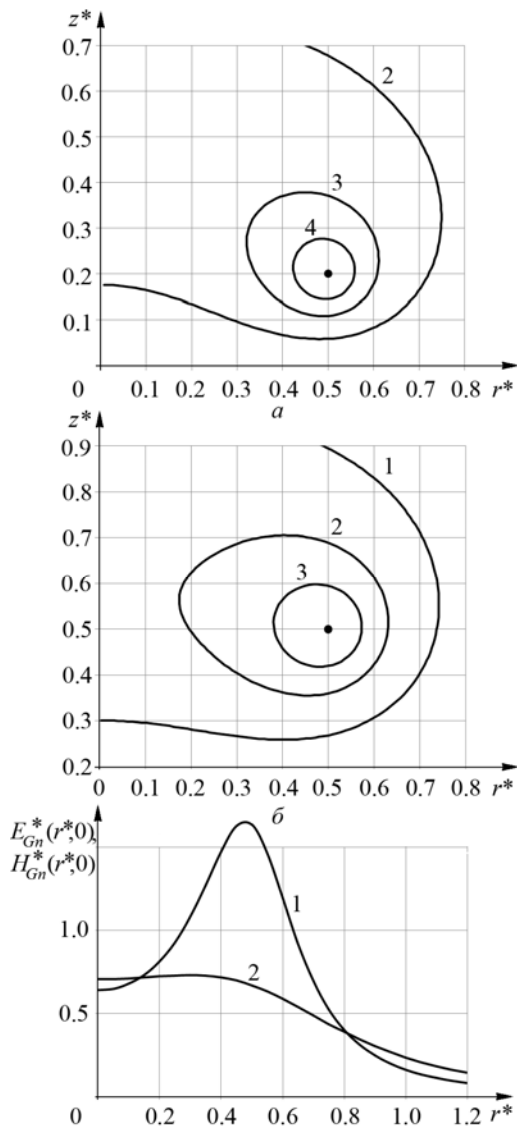


Рис. 2

напруженості поля $-(\epsilon l_\delta)^{-1}$ та $(\mu l_\delta)^{-1}$.

Якщо $\tau \neq 1$ або $\tau_m \neq 1$, то потенціали та напруженості полів, що розглядаються, визначаємо за формулами

$$\varphi(r, z) = \tau G_\varphi, \quad \vec{E}(P) = \tau \vec{E}_G(P), \quad \varphi_m(r, z) = \tau_m G_{\varphi_m}, \quad \vec{H}(P) = \tau_m \vec{H}_G(P). \quad (8, 9, 10, 11)$$

Криві на рис. 2 будуть правильні і в таких випадках, якщо наведені вище базисні величини функцій Гріна та напруженостей поля домножити на τ або τ_m .

Згідно з електростатичною аналогією [8] отримані формули можуть бути використані для розрахунку плоскомеридіанного електричного поля постійного струму, що витікає з кільця у погано провідне середовище з питомою електропровідністю γ , яке обмежене добре провідним півпростором $z < 0$ (рис. 1, а). Аналогами при цьому є ϵ та γ , τ та I_l (I_l – лінійна густина струму, що витікає в середовище).

Функція Гріна плоскомеридіанного магнітного поля над ідеально провідним півпростором. Нехай по кільцю (рис. 1, а), що розташоване у немагнітному та непровідному середовищі, протікає азимутальний струм I , магнітне поле якого індукує у нескінченно тонкому поверхневому шарі ідеально надпровідного півпростору $z < 0$ вихрові струми. Векторна функція Гріна для векторного потенціалу плоскомеридіанного магнітного поля системи кільце – півпростір $\vec{G}_A = G_A \vec{1}_\psi$ ($\vec{1}_\psi$ – орт азимутальної координати) має задовольняти наступним рівнянням (всюди, крім точок кільця) та граничній умові:

$$\text{rot } \vec{G}_A = 0, \quad \vec{G}_A|_{z=0} = 0, \quad (12, 13)$$

а також прямує до нуля на нескінченності. Використовуючи відомі формули для векторного потенціалу плоскомеридіанного магнітного поля кільця зі струмом у необмеженому просторі [9] й ті самі методи, що при отриманні $G_\varphi(r, z)$, при $I = 1$ знаходимо модуль \vec{G}_A

$$k_{1,2} = 2 \sqrt{\frac{r r_M}{(z \mp z_M)^2 + (r + r_M)^2}},$$

знак «мінус» перед z_M для k_1 , «плюс» – для k_2 .

З (2)–(4) випливає, що гранична умова (1) виконується. Напруженість електричного поля, що обумовлена одинично зарядженим кільцем, дорівнює

$$\vec{E}_G(P) = -\text{grad}_P G_\varphi(P, M), \quad (5)$$

де $G_\varphi(P, M)$ визначається однією з формул (2)–(4). Результати розрахунків за формулами (2)–(4) та (5) співпадають до величин порядку 10^{-4} , що підтверджує їхню правильність.

Нехай тепер кільце (рис. 1, а) рівномірно заряджене фіктивними магнітними зарядами [1] з постійною лінійною густиною τ_m та розташоване у середовищі з постійною абсолютною магнітною проникністю μ над ідеально феромагнітним півпростором $z < 0$. Магнітостатичне поле, що створюється кільцем в області $z > 0$, аналогічне електростатичному полю [8], розглянутому вище, а величинами-аналогами є \vec{E} , \vec{H} , φ та φ_m , τ та τ_m , ϵ і μ , де \vec{E} , \vec{H} та φ_m – напруженість електростатичного поля, напруженість і скалярний потенціал магнітостатичного поля. Тому всі наведені вище формули залишаються, якщо в них зробити заміну електростатичних величин на відповідні аналоги. При цьому функція Гріна магнітостатичного поля

$$G_{\varphi_m}(r, z) = \epsilon G_\varphi(r, z) / \mu, \quad (6)$$

а напруженість магнітного поля, що утворюється одиничним зарядженням кільцем,

$$\vec{H}_G(P) = -\text{grad}_P G_{\varphi_m}(P, M). \quad (7)$$

На рис. 2, а, б показано еквіпотенціальні лінії функцій $G_\varphi(r, z)$ та $G_{\varphi_m}(r, z)$ при $r_M^* = 0.5$ ($a - z_M^* = 0.2$, б – $z_M^* = 0.5$; для кривої 1 $G_\varphi^*(r, z) = G_{\varphi_m}^*(r, z) = 0.1$, 2 – 0.2, 3 – 0.3, 4 – 0.4), а на рис. 2, в – відповідні розподіли нормальних проєкцій $\vec{E}_G(P)$ та $\vec{H}_G(P)$ на граничній поверхні – $E_{Gn}(r, 0)$ та $H_{Gn}(r, 0)$ (для кривої 1 – $z_M^* = 0.2$, 2 – 0.5). Величини, що позначено зірочкою, є безрозмірними. Базисні величини: довжина – l_δ , функції Гріна – $1/\epsilon$ та $1/\mu$,

$$G_A(r, z) = \mu_0 r_M \int_0^\infty J_1(kr_M) J_1(kr) \begin{cases} \text{sh}(kz) e^{-kz_M} & 0 \leq z < z_M, \\ e^{-kz} \text{sh}(kz_M) & z > z_M; \end{cases} dk, \quad (14)$$

$$G_A(r, z) = \frac{2\mu_0 r_M}{\pi} \int_0^\infty \begin{cases} I_1(kr) K_1(kr_M) \\ I_1(kr_M) K_1(kr) \end{cases} \sin(kz) \sin(kz_M) dk, \quad \begin{matrix} r < r_M, \\ r > r_M, \end{matrix} \quad (15)$$

де μ_0 – магнітна стала.

У формулах (2)–(4), (14), (15) $J_{0,1}$ та $I_{0,1}, K_{0,1}$ – функції Бесселя першого роду та модифіковані функції Бесселя першого та другого роду нульового та першого порядків [10].

r^*	$r_M^* = 0.5, z_M^* = 0.2$		r^*	$r_M^* = 0.75, z_M^* = 0.1$	
	1	2		1	2
0.05	-0.0837	-0.0837	0.30	-0.1385	-0.1385
0.10	-0.1730	-0.1730	0.40	-0.2430	-0.2429
0.15	-0.2741	-0.2741	0.60	-1.0198	-1.0187
0.40	-1.1721	-1.1717	0.70	-2.5628	-2.5598
0.50	-1.3890	-1.3911	0.75	-3.1141	-3.1148
0.60	-1.0098	-1.0115	0.80	-2.4045	-2.4021
0.85	-0.2291	-0.2291	0.90	-0.8498	-0.8487
0.90	-0.1750	-0.1750	1.00	-0.3474	-0.3470
1.00	-0.1069	-0.1069	1.15	-0.1287	-0.1287

Скалярна функція Гріна для магнітного потоку, а також індукція магнітного поля, обумовлена одиничним кільцевим струмом, дорівнюють

$$G_\Phi(r, z) = 2\pi r G_A(r, z), \quad \vec{B}_G = \text{rot } \vec{G}_A, \quad (16, 17)$$

де $G_A(r, z)$ визначається формулою (14) або (15). У таблиці наведено значення єдиної радіальної проекції індукції магнітного поля на границі $B_{Gr}^*(r^*, 0)$, розраховане за формулами (14) – у стовпчиках 1, (15) – у стовпчиках 2 та (17). Базисна індукція дорівнює μ_0/l_0 . Розбіжності даних, отриманих за допомогою різних формул (14) та (15), не перевищують $\sim 10^{-3}$, що підтверджує їхню правильність.

На рис. 3 показано силові лінії магнітного поля, що створюється одиничним кільцевим струмом над ідеально надпровідним півпростором при $r_M^* = 0.5$,

$z_M^* = 0.2$ (для кривої 1 $G_\Phi^* = 0.1$, 2 – 0.2, 3 – 0.3, 4 – 0.4, 5 – 0.5; базисна величина G_Φ дорівнює μ_0/l_0).

Функції Гріна та розв'язки задач продовження поля. Спочатку покажемо, що отримані функції Гріна є розв'язками задач продовження поля з плоскої граничної поверхні. Для цього у випадку електростатичного поля за допомогою (3), (5) знайдемо z -проекцію $\vec{E}_G(P)$ на границі $z = 0$

$$E_{Gz}(r, 0) = -\frac{r_M}{\varepsilon} \int_0^\infty k J_0(kr_M) J_0(kr) e^{-kz_M} dk. \quad (18)$$

Приймаючи $k = \lambda$, після внесення постійного множника під знак інтегралу відокремимо в підінтегральній функції (18) інтегральне перетворення Ханкеля [2]

$$E_{Gz}(\lambda) = -\frac{r_M}{\varepsilon} J_0(\lambda r_M) e^{-\lambda z_M}, \quad (19)$$

де λ – параметр інтегрального перетворення.

З урахуванням (19) функцію Гріна (3) при $0 \leq z < z_M$ представимо у такому вигляді:

$$G_\Phi(r, z) = -\int_0^\infty E_{Gz}(\lambda) J_0(\lambda r) \text{sh}(\lambda z) d\lambda. \quad (20)$$

Формула (20) співпадає з розв'язком задачі продовження потенціалу плоскомеридіанного електростатичного поля з плоскої поверхні [4], що отримано методом часткових розв'язків, неперервно залежних від параметра [2]. До подібного висновку приходимо, аналізуючи функції Гріна аналогічних полів – магнітостатичного й електричного полів постійного струму в провідному середовищі. У випадку магнітостатичного поля, використовуючи (6), (7), спочатку знаходимо z -проекцію $\vec{H}_G(P)$ на границі $z = 0$, а з неї – інтегральне перетворення Ханкеля, що має вигляд

$$H_{Gz}(\lambda) = -\frac{r_M}{\mu} J_0(\lambda r_M) e^{-\lambda z_M}. \quad (21)$$

У випадку магнітного поля кільцевого струму над ідеально надпровідним півпростором за формулами (14), (17) знаходимо r -проекцію \vec{B}_G на граничній поверхні $z = 0$

$$B_{Gr}(r, 0) = -\mu_0 r_M \int_0^\infty k J_1(kr_M) J_1(kr) e^{-kz_M} dk. \quad (22)$$

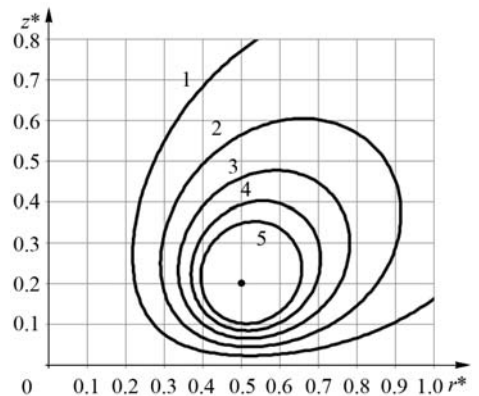


Рис. 3

З іншого боку, r -проекцію \vec{B}_G можна представити за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля $B_{Gr}(\lambda)$ [2]

$$B_{Gr}(r,0) = \int_0^{\infty} B_{Gr}(\lambda) \lambda J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (23)$$

Порівнюючи (22) та (23) при $\lambda = k$, знаходимо

$$B_{Gr}(r,0) = -\mu_0 r_M J_1(kr_M) e^{-kz_M}. \quad (24)$$

Підстановка (24) у (14) при $0 \leq z < z_M$ та (16) призводить до відомого розв'язку задачі продовження магнітного потоку з плоскої поверхні [4]. Подібне спостерігається у випадку циліндричної граничної поверхні, коли функція Гріна при $r < R_1$ (R_1 – радіус кільцевого струму або заряду, що співвісний із розташованою всередині нього цією поверхнею) співпадає з розв'язками задач продовження поля, отриманими за допомогою косинус-перетворення Фур'є [5,3]. Таким чином, порівняння розглянутих розв'язків задач продовження плоско-меридіанних полів дало змогу отримати інтегральні перетворення Ханкеля (19), (21), (24) граничних розподілів \vec{E} , \vec{H} та \vec{B} для кільцевих джерел.

Еквіпотенціальні та силові лінії, побудовані за допомогою функцій Гріна, використовують для визначення профілів електродів та соленоїдів, що утворюють задані розподіли полів на граничній поверхні. У загальному випадку ці розподіли забезпечуються системами кільцевих зарядів τ_k , τ_{mk} або струмів I_{lk} , I_k , $k = \overline{1, n}$, тому потенціали та вектори полів визначаються, зокрема, за формулами

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k G_{\varphi}(P, M_k), \quad \vec{E}(P) = \sum_{k=1}^{k=n} \tau_k \vec{E}_G(P, M_k), \quad A(P) = \sum_{k=1}^{k=n} I_k G_A(P, M_k), \quad \vec{B}(P) = \sum_{k=1}^{k=n} I_k \vec{B}_G(P, M_k). \quad (25,26,27,28)$$

Формули (25)–(28) дають змогу не тільки знайти кільцеві джерела полів, їхнє розташування та визначити шукані профілі, але й після цього розрахувати потенціали і вектори полів у будь-якій точці P при $z > 0$. У порівнянні з методом еквівалентних джерел число n при цьому значно менше.

У випадках неперервного розподілу джерел на поверхнях тіл обертання над плоскою границею, профіль яких обмежено довільним контуром l (рис. 1, б), потенціал електростатичного поля і магнітний потік дорівнюють

$$\varphi(P) = \oint_l \sigma(M) G_{\varphi}(P, M) dl_M, \quad \Phi(P) = \oint_l \eta(M) G_{\Phi}(P, M) dl_M, \quad (29, 30)$$

де $\sigma(M)$, $\eta(M)$ – поверхневі густини заряду та струму; dl_M – елемент контура l з центром у поточній точці $M \in l$.

За допомогою формул (29), (30) можна скласти інтегральні рівняння першого роду відносно $\sigma(M)$ або $\eta(M)$, у яких ядрами є функції Гріна $G_{\varphi}(P, M)$, $G_{\Phi}(P, M)$ та відсутня область твірної плоскої граничної поверхні.

Висновки. 1. Функція Гріна для потенціалу електростатичного або скалярного потенціалу магнітостатичного плоскомеридіанного поля системи кільцевий заряд (фіктивний магнітний заряд) – провідний (ідеально феромагнітний) півпростір, а також відповідна сукупності співвісних кільцевих зарядів сума добуток величин зарядів на функцію Гріна є розв'язками задачі продовження потенціалу з плоскої граничної поверхні.

2. Функція Гріна для магнітного потоку плоскомеридіанного магнітного поля системи кільцевий струм – ідеально надпровідний півпростір, а також відповідна сукупності співвісних кільцевих струмів сума добуток величин струмів на функцію Гріна є розв'язками задачі продовження магнітного потоку з плоскої граничної поверхні.

3. У розв'язках задач продовження поля (п.п. 1, 2) розподіли нормальних проекцій напруженостей електростатичного або магнітостатичного поля, а також дотичної проекції індукції магнітного поля на плоскій граничній поверхні визначаються нормальними похідними відповідних функцій Гріна або сумою добуток величин зарядів або струмів на ці похідні.

1. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948. 728 с.

2. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1995. 420 с.

3. Коновалов О.Я., Михайлов В.М., Петренко Н.П. Решение задачи продолжения магнитного поля с цилиндрической поверхности при помощи функции Грина. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 5. С. 11-13.

DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.05.011>

4. Михайлов В.М. Продолжение магнитного потока и потенциала плоскомеридианных полей с плоской поверхности. *Електричество*. 2002. № 10. С. 58-64.

5. Михайлов В.М. Функции Грина и интегральные уравнения плоскомеридианных полей устройств с длинными цилиндрами. *Електричество*. 1991. № 10. С. 38-42.

6. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Геометрия магнитного поля. *Вопросы теории плазмы*. 1963. Вып. 2. С. 3-91.

7. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. М.: ИЛ, 1958. 931 с.

8. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.2. Л.: Энергоиздат, 1981. 416 с.

9. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.

10. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 344 с.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЛОСКОМЕРИДИАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НАД ПЛОСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.М. Михайлов, докт.техн.наук

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,

ул. Кирпичева, 2, Харьков, 61002, Украина,

e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Получены функции Грина плоскомеридианных электрических и магнитных полей, создаваемых кольцевым элементарным электрическим или фиктивным магнитным зарядом или током над плоской границей проводящего идеально ферромагнитного, а также идеально сверхпроводящего полупространства. Выполнена проверка правильности полученных функций при помощи сравнительных расчетов. Приведены картины эквипотенциальных и силовых линий рассматриваемых полей, а также распределения напряженности электрического поля и магнитной индукции на граничной поверхности. Показано, что функции Грина являются решениями задач продолжения поля с плоской границы, которые используют для нахождения профилей электродов и соленоидов, создающих поля заданного распределения. Получены интегральные преобразования Ханкеля граничных распределений полей, обусловленных кольцевыми источниками. Библ. 10, табл. 1, рис. 3.

Ключевые слова: функция Грина, кольцевой заряд, кольцевой ток, плоская граница, проводящее полупространство, идеально сверхпроводящее полупространство, задача продолжения поля.

GREEN'S FUNCTIONS OF AXISYMMETRIC ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS ABOVE FLAT BOUNDARY SURFACE

V.M. Mikhailov

National Technical University "Kharkiv polytechnic institute",

2, Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine,

e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

Green's functions for axisymmetric electric and magnetic fields generated by annular elementary electric and fictitious magnetic charges and current, which are located above flat boundary of conducting, ideal ferromagnetic and ideal superconducting half-space are obtained. Verify the correctness of obtained functions is carried out by comparative calculations. Equipotential and power lines of considered fields and distributions of electric field strength and magnetic induction on the boundary are given. It's shown that Green's functions are the solutions of the problem of field continuation from flat boundary, which are used to determine profiles of electrodes and solenoids. Hankel's integral transformations of boundary field distributions conditioned by annular sources are obtained. References 10, table 1, figures 3.

Key words: Green's function, annular charge, annular current, flat boundary, conducting half-space, ideal superconducting half-space, problem of field continuation.

1. Grinberg G.A. Selected questions of mathematical theory of electric and magnetic phenomena. Moskva-Leningrad: Izd. AN SSSR, 1948. 728 p. (Rus)
2. Lebedev N.N., Skalskaya I.P., Uflyand Ya.S. Compilation of mathematical physics problems. Moskva: GITTL, 1995. 420 p. (Rus)
3. Konovalov O.Ya., Mikhailov V.M., Petrenko M.P. Solution of the problem of the magnetic field continuation from cylindrical surface by using Green's function. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2016. No 5. Pp. 11-13. (Rus)
DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.05.011>
4. Mikhailov V.M. Continuation of magnetic flux and potential of axisymmetric fields from flat surface. *Elektrichestvo*. 2002. No 10. Pp. 58-64. (Rus)
5. Mikhailov V.M. Green's function and integral equations of axisymmetric fields of devices with long cylinders. *Elektrichestvo*. 1991. No 10. Pp. 38-42. (Rus)
6. Morozov A.I., Solovyev L.S. Geometry magnetic field. *Voprosy teorii plazmy*. 1963. Issue 2. Pp. 3-91. (Rus)
7. Mors F.M., Feshbakh G. Methods of theoretical physics. Vol.1. Moskva: Inostrannaia Literatura, 1958. 931 p. (Rus)
8. Neiman L.R., Demirchyan K.S. Theoretical fundamentals of electrical engineering. Vol 2. Leningrad: Energoizdat, 1982. 416 p. (Rus)
9. Smite V. Electrostatics and Electrodynamics. Moskva: Inostrannaia Literatura, 1954. 604 p. (Rus)
10. Yanke E., Emde F., Lesh F. Special functions (formulas, graphs, tables). Moskva: Nauka, 1977. 344 p. (Rus)

Надійшла 02.03.2018
Остаточний варіант 12.03.2018