

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕПЕЙ ЭЛЕКТРОРАЗРЯДНЫХ УСТАНОВОК С УЧЕТОМ  
СТОХАСТИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ИХ ПАРАМЕТРОВ

А.А. Щерба<sup>1\*</sup>, чл.-корр. НАН Украины, Н.И. Супруновская<sup>1\*\*</sup>, докт.техн.наук, Д.С. Иващенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт электродинамики НАН Украины,

пр. Победы, 56, Киев, 03057, Украина,

<sup>2</sup> Oracle, 1501 4th Ave, Seattle, WA 98101, US,

e-mail: [jednat1@gmail.com](mailto:jednat1@gmail.com)

e-mail: [ivas-90@mail.ru](mailto:ivas-90@mail.ru)

*Предложен подход к определению вероятностных свойств (распределения и плотности распределения вероятностей, математического ожидания) электрических характеристик цепей заряда накопительных конденсаторов электроразрядных установок, активное сопротивление которых может изменяться случайным образом. Предполагается, что такое сопротивление характеризуется непрерывной случайной величиной, вероятностные свойства которой известны. В работе выполнен анализ вероятностных свойств напряжения на конденсаторе и дросселе в цепях первого и второго порядка со стохастически изменяющимся активным сопротивлением, имеющим нормальное или равномерное распределение вероятностей. Библ. 14, рис. 3.*

**Ключевые слова:** заряд конденсатора, активное сопротивление, индуктивность, переходный процесс, стохастическое изменение, вероятностные свойства, непрерывное распределение вероятностей.

**Введение.** Линейные и нелинейные накопительные конденсаторы (НК) [1–4] обычно используются в электроразрядных установках (ЭРУ) для реализации в технологической нагрузке больших импульсных токов и мощностей, которые невозможно потреблять от питающей электрической сети, но которые необходимы для реализации современных разрядно-импульсных технологий, в частности обработки различных материалов [1, 5] и получения искроэрозионных порошков [5–7]. В таком случае электроискровая нагрузка (ЭИН), имеющая параметрические, нелинейные и стохастические свойства [2, 8–10], включается только в цепь разряда НК и влияет на их конечные напряжения [3, 4], а также на характер переходных процессов в этой цепи [8–10]. В то же время при неизменном напряжении разряда конденсаторов в каждом разрядном цикле свойства их зарядных цепей остаются инвариантными относительно процессов в разрядной цепи.

Включение нагрузки в общую ветвь цепей заряда и разряда НК позволяет формировать в ней биполярные импульсные токи, практически исключить процессы электрохимического растворения одного из электродов и уменьшить скважность импульсных токов, повышая частоту и производительность ЭРУ. При этом возникает необходимость исследовать вероятностные свойства характеристик цепей заряда НК, активное сопротивление которых может изменяться случайным образом. При этом надо учитывать, что при случайном изменении электрического сопротивления ЭИН [9, 10] все электрические характеристики в цепи заряда НК (ток в цепи, напряжение на ЭИН, НК и других элементах, если они есть) также становятся случайными величинами [11–13].

Для выбора целесообразных режимов работы ЭРУ необходимо оценивать диапазоны изменения наиболее важных их электрических характеристик. Понимая большую сложность оценки взаимосвязанных случайных процессов, возникающих в зарядной и разрядной цепях НК (тем более нелинейных), в данной работе выполнен анализ изменений электрических характеристик только в цепях заряда линейных конденсаторов, содержащих ЭИН.

**Цель работы** – анализ вероятностных свойств электрических характеристик цепи заряда линейных накопительных конденсаторов ЭРУ, содержащей ЭИН, активное сопротивление которой изменяется случайным образом.

**Определение вероятностных свойств электрических характеристик, зависящих от стохастически изменяющегося параметра зарядной цепи НК.** С математической точки зрения электрические характеристики цепи ЭРУ являются функциональными преобразованиями ее параметров. Поэтому, если задано некоторое однозначное функциональное преобразование случайной величины  $X$

$Y = \varphi(X)$ , то величина  $Y$  также будет случайной величиной, а ее возможные значения  $y$  будут полностью определяться возможными значениями  $x$  случайной величины  $X$ .

Пусть для непрерывной случайной величины  $X$  известна ее функция плотности распределения вероятностей  $f_X(x)$ . Тогда, если функциональное преобразование  $Y = \varphi(X)$  является монотонным, то его плотность распределения вероятностей  $f_Y(y)$  можно определить выражением [13]

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot |x'(y)|, \quad (1)$$

где  $x(y)$  – обратная функция по отношению к функции  $y(x)$ , а  $|x'(y)|$  – абсолютное значение производной этой обратной функции.

Математическое ожидание искомой непрерывной случайной величины  $Y = \varphi(X)$  можно найти из формулы [13]

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f_X(x) dx. \quad (2)$$

Дисперсию  $D[Y]$  случайной величины  $Y$  определим как

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y])^2 \cdot f_Y(y) dy. \quad (3)$$

Вероятностные характеристики функциональных преобразований над случайными величинами были использованы для оценки вероятностных свойств характеристик зарядных цепей первого и второго порядка со стохастически изменяющимся сопротивлением  $R$ . Рассматривались наиболее распространенные распределения вероятностей случайной величины: равномерное и нормальное.

### 1. Примем, что сопротивление $R$ имеет равномерное распределение вероятностей.

**1.1. Электрическая цепь первого порядка.** Рассмотрим цепь заряда НК первого порядка, содержащую линейный конденсатор емкостью  $C$ , который после замыкания ключа заряжается от формирователя постоянного напряжения (ФПН) через активное сопротивление  $R$ .

При проведении дальнейшего анализа приняты следующие допущения:

– сопротивление  $R$  является линейным во время каждого заряда конденсатора, но от одного заряда к другому может изменяться скачком;

–  $R$  является непрерывной случайной величиной, т.е. возможные его значения  $r$  составляют непрерывное множество;

– закон изменения непрерывной случайной величины  $R$  известен, т.е. известны ее вероятностные характеристики, в частности функция плотности распределения вероятностей  $f(r)$  и функция распределения вероятностей  $F(r)$  со всеми их параметрами.

Предположим, что сопротивление  $R$  является случайной величиной, которая характеризуется непрерывным равномерным распределением на интервале  $[r_{min}; r_{max}]$ :  $R \in [r_{min}; r_{max}]$ . В рамках каждого переходного процесса заряда конденсатора, инициируемого замыканием ключа в его зарядной цепи, величина  $R$  принимает фиксированное значение  $R \in [r_{min}; r_{max}]$ , которое не изменяется на протяжении этого заряда. Но в каждом последующем переходном процессе заряда величина  $R$  может принять другое случайное значение  $R \in [r_{min}; r_{max}]$ . Поскольку  $R$  является случайной величиной, то напряжение на конденсаторе  $U_C(t)$ , зависящее от величины  $R$ , также будет случайной величиной. Определим вероятностные свойства этой случайной величины  $U_C(t)$ .

Функция распределения вероятностей  $F_R(r)$  равномерно распределенной случайной величины  $R$  определяется выражением [13]

$$F_R(r) = P(R < r) = \begin{cases} 0, & r < r_{min} \\ (r - r_{min}) / (r_{max} - r_{min}), & r \in [r_{min}; r_{max}] \\ 1, & r > r_{max} \end{cases}, \quad (4)$$

где  $P(R < r)$  – вероятность того, что случайная величина  $R$  примет значение, меньшее, чем  $r$ .

Функция плотности распределения вероятностей  $f_R(r)$  (которая по определению является производной от функции распределения вероятностей  $f_R(r) = F'_R(r)$ ) задается формулой [13]

$$f_R(r) = \begin{cases} 0, & r \notin [r_{min}; r_{max}] \\ 1 / (r_{max} - r_{min}), & r \in [r_{min}; r_{max}] \end{cases}. \quad (5)$$

Пусть изначально конденсатор был разряжен:  $U_C(0) = 0$ . Тогда напряжение на конденсаторе в момент времени  $t$  рассчитывается как [14]

$$U_C(t) = U_{\text{ФПН}} \left(1 - e^{-t/rC}\right). \quad (6)$$

Для удобства  $U_C(t)$  запишем как  $U_C$ , а функции плотности распределения вероятностей и распределения вероятностей назовем соответственно плотностью распределения и распределением.

Из выражения (1) плотность распределения  $f_{U_C}(U_C)$  случайной величины  $U_C$  определим как

$$f_{U_C}(U_C) = f_R(r(U_C)) \cdot |r'(U_C)|, \quad (7)$$

где  $r(U_C)$  – обратная функция по отношению к функции  $U_C(r)$ . Выражение для нее получим из (6)

$$r(U_C) = t / (C \cdot \ln(1 - U_C/U_{\text{ФПН}})). \quad (8)$$

Найдем производную  $r'(U_C)$

$$r'(U_C) = t / [CU_{\text{ФПН}}(\ln(1 - U_C/U_{\text{ФПН}}))^2(1 - U_C/U_{\text{ФПН}})]. \quad (9)$$

Подставляя (5) и (9) в (7), получим окончательное выражение для функции  $f_{U_C}(U_C)$

$$f_{U_C}(U_C) = \begin{cases} 0, & U_C \notin [U_{C\min}; U_{C\max}] \\ (1/(r_{\max} - r_{\min})) \cdot t / [CU_{\text{ФПН}}(\ln(1 - U_C/U_{\text{ФПН}}))^2(1 - U_C/U_{\text{ФПН}})], & U_C \in [U_{C\min}; U_{C\max}], \end{cases} \quad (10)$$

где  $U_{C\min} = U_{\text{ФПН}}(1 - e^{-t/r_{\max}C})$ ,  $U_{C\max} = U_{\text{ФПН}}(1 - e^{-t/r_{\min}C})$ .

Поскольку плотность распределения  $f_{U_C}(U_C)$  по определению является производной от распределения вероятностей  $F(U_C)$ , то, проинтегрировав выражение (10), найдем  $F(U_C)$

$$F_{U_C}(U_C) = \int_0^{U_C} f_{U_C}(U_C) dU_C = \begin{cases} 0, & U_C < U_{C\min} \\ (1/(r_{\max} - r_{\min})) \cdot t \cdot \ln((U_{\text{ФПН}} - U_C)/(U_{\text{ФПН}} - U_{C\min}))/C, & U_C \in [U_{C\min}; U_{C\max}] \\ 1, & U_C \geq U_{C\max} \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что распределение случайной величины  $U_C$  **не является** равномерным, поскольку равномерное распределение характеризовалось бы выражением [13]

$$F_{U_C}(U_C) = \begin{cases} 0, & U_C < U_{C\min} \\ (U_C - U_{C\min}) / (U_{C\max} - U_{C\min}), & U_C \in [U_{C\min}; U_{C\max}] \\ 1, & U_C > U_{C\max} \end{cases}.$$

Рассмотрим в качестве примера вероятностные свойства случайной величины  $U_C(t)$  для следующих параметров цепи:  $U_{\text{ФПН}} = 100$  В,  $C = 0,1$  Ф,  $r_{\min} = 0,1$  Ом,  $r_{\max} = 1$  Ом. Рассматриваемый момент времени  $t = 10^{-4}$  с. Величины максимально и минимально возможного напряжения на конденсаторе при данных параметрах определяются как

$$U_{C\min} = U_{\text{ФПН}}(1 - e^{-t/r_{\max}C}) = 9,5 \text{ В}. \quad (12) \quad U_{C\max} = U_{\text{ФПН}}(1 - e^{-t/r_{\min}C}) = 63,2 \text{ В}. \quad (13)$$

Графики функций плотности распределения  $f_{U_C}(U_C)$  и распределения вероятностей  $F(U_C)$  случайной величины напряжения на конденсаторе  $U_C(t)$  в момент  $t = 10^{-4}$  с представлены соответственно на рис. 1, а и 1, б.

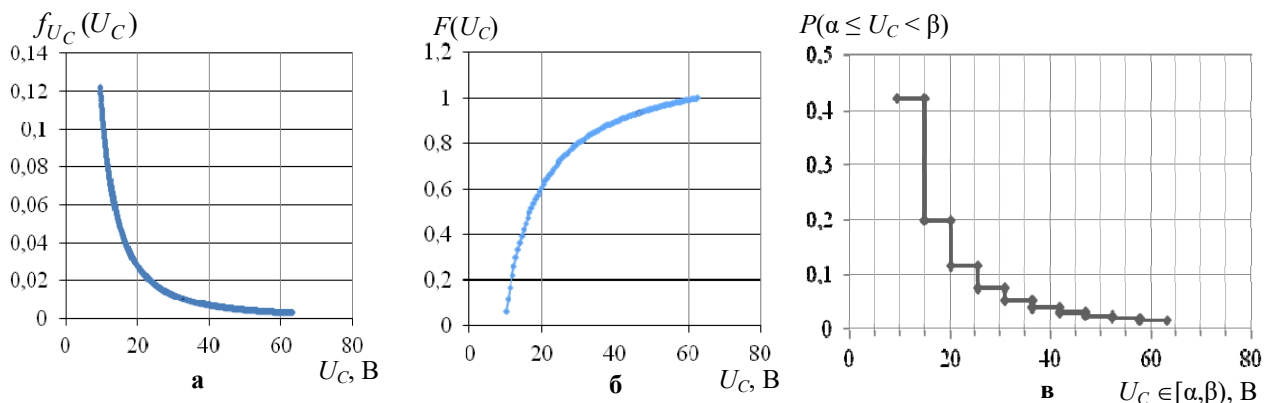


Рис. 1

Согласно известному свойству функции распределения  $F(U_C)$ , вероятность того, что случайная величина  $U_C$  примет значение из интервала  $[\alpha, \beta]$ , равна приращению функции  $F(U_C)$  на этом интервале (т.е.  $P\{\alpha \leq U_C < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$ ) [13]. Используя зависимость, приведенную на рис. 1, б, можно получить вероятности попадания реализаций случайной величины  $U_C$  в заданные диапазоны напряжений. На рис. 1, в показан график, демонстрирующий вероятности попадания случайной величины  $U_C$  в момент времени  $t = 10^{-4}$  с в различные диапазоны напряжений. Очевидно, что вероятность появления значений напряжения, близких к его нижней границе  $U_{Cmin} = 9,5$  В, выше, чем вероятность появления прочих значений.

Это объясняется тем, что по мере увеличения сопротивления  $R$ , его прирост все меньше сказывается на итоговом напряжении конденсатора  $U_C$  (т.к.  $U_C(r)$  является обратной экспоненциальной зависимостью). Таким образом, диапазону больших значений  $R$  (т.е. малых  $U_C$ ) соответствует узкий диапазон значений  $U_C$  (от  $U_{Cmin} = 9,5$  до 15 В на рис. 1, в), в то время как диапазону малых значений  $R$  (следовательно, больших  $U_C$ ) соответствует более широкий диапазон значений  $U_C$  (от 15 до  $U_{Cmax} = 63,2$  В на рис. 1, в).

Используя (2), (5) и (6), определим математическое ожидание  $M[U_C]$  случайной величины  $U_C$

$$M[U_C] = \int_{r_{min}}^{r_{max}} U_C(r) \cdot f_R(r) dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} (U_{ФПН} (1 - e^{-t/rC}) / (r_{max} - r_{min})) dr. \quad (14)$$

После интегрирования и выполнения преобразований

$$M[U_C] = U_{ФПН} \left[ r_{max} (1 - e^{-t/(r_{max}C)}) - r_{min} (1 - e^{-t/(r_{min}C)}) - t (Ei(-t/r_{max}C) - Ei(-t/r_{min}C)) / C \right] / (r_{max} - r_{min}), \quad (15)$$

где  $Ei(x)$  – известная в математике специальная функция, так называемая интегральная показательная

функция ( $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ ).

Отметим, что величина математического ожидания напряжения на НК  $M[U_C]$  **не равна** величине напряжения в случае, когда сопротивление цепи равно его математическому ожиданию  $M[R]$

$$M[U_C] \neq U_C|_{r=M[R]}. \quad (16)$$

Например, при рассмотренных значениях параметров цепи математическое ожидание напряжения на конденсаторе в момент времени  $t = 10^{-4}$  с согласно (15) составляет  $M[U_C] = 21,7$  В.

В то же время напряжение на конденсаторе, которое наблюдается в случае, когда сопротивление цепи равно математическому ожиданию сопротивления  $M[R]$  в момент времени  $t = 10^{-4}$  с (которое для равномерного распределения равно  $M[R] = (r_{min} + r_{max})/2 = 0,55$  Ом), достигнет величины  $U_C|_{r=M[R]} = 16,6$  В.

Такое различие значений объясняется тем фактом, что зависимости электрических характеристик цепи заряда НК от ее сопротивления не являются линейными, и, как следствие, вид функции плотности распределения (а, следовательно, и, зависящее от нее математическое ожидание) для сопротивления цепи отличается от вида соответствующих функций для электрических характеристик этой цепи.

Таким образом, можно сделать вывод, что поиск математического ожидания электрических характеристик цепи с хотя бы одним стохастически изменяющимся параметром путем анализа цепи с детерминированным параметром, равным математическому ожиданию стохастического параметра, в общем случае не приводит к верным результатам.

**1.2. Электрическая цепь второго порядка.** На рис. 2 представлена зарядная цепь НК второго порядка (с двумя реактивными элементами), в которой сопротивление  $R$  изменяется по равномерному закону распределения вероятностей. Пусть в рассматриваемой цепи после замыкания ключа (тиристора)  $VT$  протекает колебательный переходный процесс заряда НК емкостью  $C$  через дроссель  $L$  и активное сопротивление  $R$ . Когда напряжение конденсатора достигнет максимума, а ток в цепи соответственно станет равным нулю, тиристор  $VT$  закроется, прекращая заряд конденсатора.

Напряжение  $U_C$ , которое установится на конденсаторе, определяется следующим выражением [9]:

$$U_C = U_{ФПН} + (U_{ФПН} - U_{0C}) \cdot e^{-\pi/2Q}, \quad (17)$$

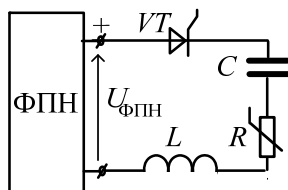


Рис. 2

где  $U_{0C}$  – начальное напряжение на конденсаторе,  $Q = \sqrt{L/C}/r$  – добротность цепи (при возможных значениях  $r$  случайной величины  $R$ ).

Плотность распределения  $f_R(r)$  и распределение вероятностей  $F_R(r)$  для равномерно распределенной случайной величины  $R$  определяются соответственно выражениям (4) и (5).

Для вычисления плотности распределения случайной величины  $U_C$ :  $f_{U_C}(U_C)$  согласно (1) надо определить обратную функцию  $r(U_C)$  по отношению к функции  $U_C(r)$  и взять ее производную  $r'(U_C)$ . Для этого, используя (17), выразим сопротивление  $r$  через напряжение на конденсаторе  $U_C$

$$r(U_C) = -2\sqrt{L} \cdot \ln[(U_C - U_{\text{ФПН}})/(U_{\text{ФПН}} - U_{0C})] / \pi\sqrt{C} \quad (18)$$

и, продифференцировав (18), получим

$$r'(U_C) = 2\sqrt{L} / \pi\sqrt{C} (U_{\text{ФПН}} - U_C). \quad (19)$$

Используя (7), определим функцию плотности распределения  $f_{U_C}(U_C)$

$$f_{U_C}(U_C) = \begin{cases} 0, & U_C \notin [U_{Cmin}; U_{Cmax}] \\ (1/(r_{max} - r_{min})) \cdot 2\sqrt{L} / (\pi\sqrt{C} \cdot U_{\text{ФПН}} - U_C), & U_C \in [U_{Cmin}; U_{Cmax}] \end{cases}, \quad (20)$$

где  $U_{Cmin} = U_{\text{ФПН}} + (U_{\text{ФПН}} - U_{0C}) \cdot e^{-\pi\sqrt{C} \cdot r_{min}/2\sqrt{L}}$ ,  $U_{Cmax} = U_{\text{ФПН}} + (U_{\text{ФПН}} - U_{0C}) \cdot e^{-\pi\sqrt{C} \cdot r_{max}/2\sqrt{L}}$ .

Найдем функцию распределения случайной величины  $U_C$ , выполнив интегрирование функции плотности распределения (20),

$$F_{U_C}(U_C) = \int_0^{U_C} f_{U_C}(U_C) dU_C = \begin{cases} 0, & U_C < U_{Cmin} \\ (1/(r_{max} - r_{min})) 2\sqrt{L} \ln((U_{\text{ФПН}} - U_{Cmin})/(U_{\text{ФПН}} - U_C)) / \pi\sqrt{C}, & U_C \in [U_{Cmin}; U_{Cmax}] \\ 1, & U_C \geq U_{Cmax} \end{cases}. \quad (21)$$

Определим математическое ожидание  $M[U_C]$  случайной величины  $U_C$ , используя (2), (5), (17)

$$M[U_C] = \int_{r_{min}}^{r_{max}} U_C(r) \cdot f_R(r) dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left( (U_{\text{ФПН}} + (U_{\text{ФПН}} - U_{0C}) \cdot e^{-\pi\sqrt{C} \cdot r/2\sqrt{L}}) / (r_{max} - r_{min}) \right) dr. \quad (22)$$

Проинтегрировав (22) и выполнив преобразования, получим

$$M[U_C] = \left[ U_{\text{ФПН}}(r_{max} - r_{min}) - 2\sqrt{L}(U_{\text{ФПН}} - U_{0C}) \left( e^{-\pi\sqrt{C} \cdot r_{max}/2\sqrt{L}} - e^{-\pi\sqrt{C} \cdot r_{min}/2\sqrt{L}} \right) / \pi\sqrt{C} \right] / (r_{max} - r_{min}). \quad (23)$$

В качестве примера рассмотрим следующие параметры цепи (рис. 3):  $U_{\text{ФПН}} = 100$  В,  $C = 0,1$  Ф,  $L = 0,025$  Гн,  $r_{min} = 0,1$  Ом,  $r_{max} = 1$  Ом. При таких параметрах цепи математическое ожидание напряжения на конденсаторе  $M[U_C]$  в момент завершения переходного процесса заряда конденсатора согласно (23) составило  $M[U_C] = 124,3$  В. В то же время, если величина сопротивления цепи равняется его математическому ожиданию  $M[R]$  (0,55 Ом), напряжение заряда конденсатора достигнет величины  $U_C|_{r=M[R]} = 117,8$  В.

Таким образом, для цепи второго порядка с равномерно распределенной случайной величиной сопротивления (также как для цепи первого порядка) справедливо неравенство (16), т.е. математическое ожидание напряжения на конденсаторе  $M[U_C]$  **не равно** напряжению, которое имеет место при сопротивлении цепи, равном его математическому ожиданию  $M[R]$ .

## 2. Примем, что сопротивление $R$ имеет нормальное распределение вероятностей.

**2.1. Электрическая цепь первого порядка.** Рассмотрим  $RL$ -цепь, подключаемую посредством тиристорного ключа к ФПН, как показано на рис. 3. Примем допущение, что активное сопротивление  $R$  является случайной величиной, которая характеризуется нормальным распределением. Как и в предыдущих примерах, в рамках каждого отдельного переходного процесса

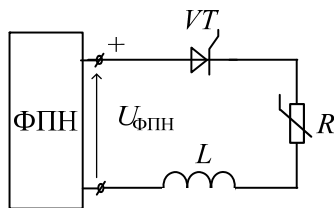


Рис. 3

величина сопротивления принимает фиксированное значение и не меняется на протяжении всего процесса. При последующем переходном процессе величина  $R$  может случайным образом принять новое значение.

Тогда функция плотности распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины  $R$  имеет следующий вид [13]:

$$f_R(r) = \begin{cases} e^{-(r-M[R])^2/2\sigma^2} / (\sigma\sqrt{2\pi}), & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}, \quad (24)$$

где  $\sigma$  – среднее квадратичное отклонение ( $\sigma^2$  – дисперсия  $D$ ) случайной величины  $R$ .

Так как  $R$  является случайной величиной, то напряжение на индуктивности  $U_L(t)$  также будет случайной величиной, поэтому определим ее вероятностные характеристики.

Пусть в начальный момент времени ток в цепи равен нулю, тогда изменение напряжения на индуктивности  $L$  после запитывания ключа  $VT$  равно [14]

$$U_L(t) = U_{\text{ФПН}} e^{-t \cdot r/L}. \quad (25)$$

Далее для удобства записи  $U_L(t)$  будем записывать как  $U_L$ .

Плотность распределения случайной величины  $U_L$ :  $f_{U_L}(u_L)$  согласно (1) имеет вид

$$f_{U_L}(U_L) = f_R(r(U_L)) \cdot |r'(U_L)|. \quad (26)$$

Используя (25), определим обратную функцию  $r(U_L)$  по отношению к функции  $U_L(r)$

$$r(U_L) = -L \cdot \ln(U_L/U_{\text{ФПН}})/t, \quad t \neq 0 \quad (27)$$

и ее производную по переменной  $U_L$

$$r'(U_L) = -L/(t \cdot U_L), \quad t \neq 0. \quad (28)$$

Подставив выражения (24), (27) и (28) в формулу (26), получим плотность распределения случайной величины  $U_L$

$$f_{U_L}(U_L) = \begin{cases} e^{-(L \cdot \ln(U_L/U_{\text{ФПН}})/t + M[R])^2/2\sigma^2} \cdot L/(t \cdot U_L) / (\sigma\sqrt{2\pi}), & U_L < U_{\text{ФПН}} \\ 0, & U_L \geq U_{\text{ФПН}} \end{cases}. \quad (29)$$

Очевидно, что эта функция не соответствует функции плотности нормального распределения вероятностей (см. (24)).

Определим математическое ожидание  $M[U_L]$  случайной величины  $U_L$ , используя (2), (24), (25),

$$\begin{aligned} M[U_L] &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_L(r) \cdot f_R(r) dr = \int_0^{+\infty} \left( e^{-(r-M[R])^2/2\sigma^2} \cdot U_{\text{ФПН}} \cdot e^{-t \cdot r/L} / (\sigma\sqrt{2\pi}) \right) dr + \int_{-\infty}^0 0 \cdot U_{\text{ФПН}} e^{-t \cdot r/L} dr = \\ &= U_{\text{ФПН}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(r-M[R])^2/2\sigma^2} \cdot e^{-t \cdot r/L} dr / \sigma\sqrt{2\pi}. \end{aligned} \quad (30)$$

После выполнения интегрирования и преобразования (30)

$$M[U_L] = U_{\text{ФПН}} \cdot e^{((\sigma^2 t^2/2L^2) - (M[R]t/L))} \cdot (1 - \operatorname{erf}((\sigma^2 t/L - M[R]) / \sigma\sqrt{2})) / 2, \quad (31)$$

где  $\operatorname{erf}$  – известная специальная функция, так называемая функция ошибок ( $\operatorname{erf}(z) = 2 \int_0^z e^{-t^2} dt / \sqrt{\pi}$ ).

Согласно принятому допущению закон изменения непрерывной случайной величины  $R$  известен, т.е. известны ее вероятностные характеристики со всеми их параметрами. Параметрами нормального распределения вероятностей являются математическое ожидание величины активного сопротивления  $M[R]$  и среднее квадратическое отклонение величины активного сопротивления  $\sigma$ . Для примера рассмотрим цепь со следующими параметрами:  $U_{\text{ФПН}} = 100$  В,  $L = 0,1$  Гн,  $M[R] = 0,1$  Ом,  $\sigma = 0,1$  Ом, рассматриваемый момент времени  $t = 1$  с. При таких значениях параметров цепи математическое ожидание напряжения на катушке индуктивности в момент  $t = 1$  с составит согласно (31)  $M[U_L] = 30,3$  В. В то же время, напряжение на катушке индуктивности, которое наблюдается, если сопротивление цепи равно математическому ожиданию сопротивления  $M[R]$  (0,1 Ом), в тот же момент времени  $t = 1$  с согласно (25) достигнет величины  $U_L|_{r=M[R]} = 36,8$  В.

Как и ранее, математическое ожидание напряжения **не равно** напряжению, рассчитанному при сопротивлении цепи, равному по величине его математическому ожиданию.

**2.2. Электрическая цепь второго порядка.** Рассмотрим цепь, в которой протекает колебательный переходный процесс заряда НК емкостью  $C$  от ФПН через дроссель и активное сопротивление  $R$  (рис. 2).

Выражение для плотности распределения случайной величины  $U_C$  найдем, подставляя (24), (18) и (19) в (7)

$$f_{U_C}(U_C) = \begin{cases} e^{-\left(2\sqrt{L} \cdot \ln((U_C - U_{\text{ФПН}})/(U_{\text{ФПН}} - U_0)) / \pi\sqrt{C} + M[R]\right)^2 / 2\sigma^2} \cdot 2\sqrt{L} / \left(\pi\sqrt{C}(U_{\text{ФПН}} - U_C) \cdot \sigma\sqrt{2\pi}\right), & U_C \leq 2U_{\text{ФПН}} - U_0, \\ 0, & U_C \geq 2U_{\text{ФПН}} - U_0 \end{cases} \quad (32)$$

где  $U_C$  – напряжение, которое установится на конденсаторе в момент завершения переходного процесса.

Отметим, что и в этом случае плотность распределения случайной величины  $U_C$  не соответствует плотности нормального распределения вероятностей (см. (24)).

Определим математическое ожидание  $M[U_C]$  случайной величины  $U_C$ , используя (2), (17), (24),

$$M[U_C] = \int_{-\infty}^{+\infty} U_C(r) \cdot f_R(r) dr = \int_0^{+\infty} \left( e^{-(r-M[R])^2/2\sigma^2} \cdot (U_{\text{ФПН}} + (U_{\text{ФПН}} - U_0)e^{-\pi/2Q}) / (\sigma\sqrt{2\pi}) \right) dr + \\ + \int_{-\infty}^0 \left( U_{\text{ФПН}} + (U_{\text{ФПН}} - U_0)e^{-\pi/2Q} \right) dr = \int_0^{+\infty} e^{-(r-M[R])^2/2\sigma^2} \left( U_{\text{ФПН}} + (U_{\text{ФПН}} - U_0)e^{-\pi \cdot r \sqrt{C}/2\sqrt{L}} \right) dr / \sigma\sqrt{2\pi}. \quad (33)$$

Проинтегрировав (33) и выполнив преобразования, получим

$$M[U_C] = \frac{1}{2} \left( U_{\text{ФПН}} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{M[R]}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right) + \left( U_{\text{ФПН}} - U_0 \right) \cdot e^{\frac{-\pi}{2} \left( M[R] \sqrt{C} / \sqrt{L} - \pi \sigma^2 C / 4L \right)} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{M[R] - \pi \sigma^2 \sqrt{C} / 2\sqrt{L}}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right) \right). \quad (34)$$

Для примера возьмем следующие параметры рассматриваемой цепи:  $U_{\text{ФПН}} = 100$  В,  $L = 0,1$  Гн,  $C = 0,01$  Ф, математическое ожидание величины активного сопротивления  $M[R] = 0,1$  Ом, среднеквадратическое отклонение величины активного сопротивления  $\sigma = 0,1$  Ом. При данных значениях параметров цепи математическое ожидание напряжения на НК в момент завершения переходного процесса составляет согласно (34)  $M[U_C] = 155,2$  В, тогда как величина напряжения на конденсаторах при условии, что значение сопротивления в цепи равно его математическому ожиданию, принимает значение  $U_C|_{r=M[R]} = 185,6$  В.

### Заключение.

Представлен подход к определению вероятностных свойств (плотности распределения и распределения вероятностей, а также математического ожидания) электрических характеристик цепей заряда линейных накопительных конденсаторов ЭРУ с учетом того, что активное сопротивление таких цепей может стохастически изменяться по известному закону распределения вероятностей. Определены вероятностные свойства напряжения на накопительном конденсаторе и дросселе в цепях первого и второго порядка, активное сопротивление которых имеет равномерное или нормальное распределение вероятностей.

Показано, что математическое ожидание электрических характеристик цепей заряда накопительных конденсаторов ЭРУ (в частности напряжения на конденсаторах и напряжения на дросселе), которые зависят от стохастического параметра цепи (например, активного сопротивления электроискровой нагрузки), в общем случае отличаются от величин соответствующих характеристик, рассчитанных при детерминированном значении параметра, равном его математическому ожиданию. Это означает, что анализ процессов в цепях со стохастическим параметром, основанный на интуитивном использовании его математического ожидания, дает неточный результат. Для проведения такого анализа требуется определение математического ожидания именно электрических характеристик цепей.

1. Sen B., Kiyawat N., Singh P.K., Mitra S., Ye J.H., Purkait P. Developments in electric power supply configurations for electrical-discharge-machining (EDM). Proc. 5<sup>th</sup> International Conference on *Power Electronics and Drive Systems*, 2003. PEDS 2003. Singapore, 17-20 November 2003. Vol. 1. Pp. 659–664.

2. Шидловская Н.А., Захарченко С.Н., Черкасский А.П. Модель выходной цепи генератора разрядных импульсов с плазмозероэрозийной нагрузкой, адекватная в широких диапазонах изменений их параметров. *Технічна електродинаміка*. 2015. № 6. С. 69–77.

3. Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Electric Energy Loss at Energy Exchange Between Capacitors as Function of Their Initial Voltages and Capacitances Ratio. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 3. С. 9–11.

DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.03.009>

4. Білецький О.О., Супруновська Н.І., Щерба А.А. Залежність енергетичних характеристик кіл заряду суперконденсаторів від їх початкових і кінцевих напруг. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 1. С. 3–10.  
DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.01.003>
5. Casanueva R., Azcondo F.J., Branas C., Bracho S. Analysis, design and experimental results of a high-frequency power supply for spark erosion. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2005. Vol. 20. Pp. 361–369.
6. Nguyen P.K., Lee K.H., Kim S.I., Ahn K.A., Chen L.H., Lee S.M., Chen R.K., Jin S., Berkowitz A.E. Spark Erosion: a High Production Rate Method for Producing Bi<sub>0.5</sub>Sb<sub>1.5</sub>Te<sub>3</sub> Nanoparticles With Enhanced Thermoelectric Performance. *Nanotechnology*. 2012. Vol. 23. Pp. 415604-1 – 415604-7.
7. Nguyen, P.K., Sungho J., Berkowitz A.E. MnBi particles with high energy density made by spark erosion. *J. Appl. Phys.* 2014. Vol. 115. Iss. 17. Pp. 17A756-1.
8. Шидловская Н.А., Захарченко С.Н., Черкасский А.П. Анализ электромагнитных процессов в выходной цепи генератора разрядных импульсов с нелинейной моделью плазмозероэрозийной нагрузки при изменении их параметров в широких диапазонах. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 1. С. 87–95.  
DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.01.087>
9. Иващенко Д.С., Супруновская Н.И. Переходные процессы в электрических цепях со стохастической нагрузкой, характеризующейся непрерывной случайной величиной. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 4. С. 17–19.  
DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.04.017>
10. Супруновская Н.И., Иващенко Д.С. Многоуровневая модель взаимозависимых переходных процессов в цепях электроразрядных установок со стохастической нагрузкой. *Технічна електродинаміка*. 2013. № 5. С. 5–13.
11. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Москва: Высшая школа, 2000. 480 с.
12. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 384 с.
13. Лисьев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: МЭСИ, 2006. 199 с.
14. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Санкт-Петербург: Питер, 2003. Т. 2. 576 с.

#### ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КІЛ ЕЛЕКТРОРОЗРЯДНИХ УСТАНОВОК З УРАХУВАННЯМ СТОХАСТИЧНО ЗМІНЮВАНИХ ЇХНІХ ПАРАМЕТРІВ

А.А. Щерба<sup>1</sup>, чл.-кор. НАН України, Н.І. Супруновська, докт.техн.наук, Д.С. Иващенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна,

e-mail: [iednat1@gmail.com](mailto:iednat1@gmail.com)

<sup>2</sup> Oracle,

1501 4th Ave, Seattle, WA 98101, US,

e-mail: [ivas-90@mail.ru](mailto:ivas-90@mail.ru)

*Запропоновано підхід до визначення імовірнісних властивостей (функції щільності розподілу ймовірностей, функції розподілу ймовірностей, математичного сподівання) електричних характеристик кіл заряду накопичувальних конденсаторів електророзрядних установок, активний опір яких може змінюватися випадковим чином. Передбачається, що такий опір характеризується безперервною випадковою величиною, імовірнісні властивості якої відомі. Як приклади було досліджено імовірнісні властивості напруги на конденсаторі й індуктивності в колах першого й другого порядку зі стохастично змінюваним активним опором, що має нормальний або рівномірний розподіл ймовірностей. Бібл. 14, рис. 3.*

**Ключові слова:** заряд конденсатора, активний опір, індуктивність, перехідний процес, стохастичне змінення, імовірнісні властивості, безперервний розподіл ймовірностей.

#### DETERMINATION OF PROBABILISTIC PROPERTIES OF ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF CIRCUITS OF ELECTRIC DISCHARGE INSTALLATIONS TAKING INTO ACCOUNT THEIR STOCHASTICALLY CHANGING PARAMETERS

A.A. Shcherba<sup>1</sup>, N.I. Suprunovska<sup>1</sup>, D.S. Ivashchenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,  
pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine,

e-mail: [iednat1@gmail.com](mailto:iednat1@gmail.com)

<sup>2</sup> Oracle, 1501 4th Ave, Seattle, WA 98101, US,

e-mail: [ivas-90@mail.ru](mailto:ivas-90@mail.ru)

*An approach to determination of probabilistic properties (probability density function, the probability distribution function, expectation) of electrical characteristics of charge circuits of reservoir capacitors of electric installations whose ac-*



tive resistance can vary randomly is proposed. It is assumed that resistance is characterized by a continuous random variable whose probabilistic properties are known. As examples, the probabilistic properties of capacitor voltage and choke voltage in the circuits of the first and second order with a stochastically changing active resistance having a normal or uniform probability distribution were studied. References 14, figures 3.

**Keywords:** capacitor charge, active resistance, inductance, transient, stochastic change, probabilistic properties, continuous probability distribution.

1. Sen B., Kiyawat N., Singh P.K., Mitra S., Ye J.H., Purkait P. Developments in electric power supply configurations for electrical-discharge-machining (EDM). Proc. 5<sup>th</sup> International Conference on *Power Electronics and Drive Systems*, 2003. PEDS 2003. Singapore, 17-20 November 2003. Vol. 1. Pp. 659–664.

2. Shydlovska N.A., Zakharchenko S.M., Cherkassky O.P. Model of an output circuit of the discharge pulses generator with a plasma-erosive load adequate in wide range of changes of their parameters. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2015. No 6. Pp. 69–77. (Rus)

3. Shcherba A.A., Suprunovska N.I. Electric Energy Loss at Energy Exchange Between Capacitors as Function of Their Initial Voltages and Capacitances Ratio. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2016. No 3. Pp. 9-11.

DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.03.009>

4. Beletsky O.A., Suprunovska N.I., Shcherba A.A. Dependences of power characteristics of circuit at charge of supercapacitors on their initial and final voltages. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2016. No 1. Pp. 3–10. (Ukr)

DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.01.003>

5. Casanueva R., Azcondo F.J., Branas C., Bracho S. Analysis, design and experimental results of a high-frequency power supply for spark erosion. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2005. Vol. 20. Pp. 361–369.

6. Nguyen P.K., Lee K.H., Kim S.I., Ahn K.A., Chen L.H., Lee S.M., Chen R.K., Jin S., Berkowitz A.E. Spark Erosion: a High Production Rate Method for Producing Bi<sub>0.5</sub>Sb<sub>1.5</sub>Te<sub>3</sub> Nanoparticles With Enhanced Thermoelectric Performance. *Nanotechnology*. 2012. Vol. 23. Pp. 415604-1 – 415604-7.

7. Nguyen, P.K., Sungho J., Berkowitz A.E. MnBi particles with high energy density made by spark erosion. *J. Appl. Phys.* 2014. Vol. 115. Iss. 17. Pp. 17A756-1.

8. Shydlovska N.A., Zakharchenko S.M., Cherkassky O.P. The analysis of electromagnetic processes in output circuit of the generator of discharge pulses with non-linear model of plasma-erosive load at change their parameters in wide ranges. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2016. No 1. Pp. 87–95. (Rus)

DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.01.087>

9. Ivashchenko D.S., Suprunovska N.I. Transients in circuits with stochastic load, which characterized by continuous random variable. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2016. No 4. Pp. 17–19. (Rus)

DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2016.04.017>

10. Suprunovska N.I., Ivashchenko D.S. Multilevel model of interdependent transients in circuits of electro-discharge installations with stochastic load. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2013. No 5. Pp. 5–13. (Rus)

11. Ventsel E.S., Ovcharov L.A. Probability theory and its engineering applications. Moskva: Vysshaya shkola, 2000. 480 p. (Rus)

12. Kashyap R.L., Rao A.R. Construction of dynamic stochastic models based on experimental data. Moskva: Nauka. Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury, 1983. 384 p. (Rus)

13. Lisyev V.P. Probability theory and the mathematical statistics. Moskva: MESI, 2006. 199 p. (Rus)

14. Demirchyan K.S., Nejman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L. Electrical engineering theory. Saint-Petersburg: Piter, 2003. Vol. 2. 576 p. (Rus)

Надійшла 30.01.2019  
Остаточний варіант 18.02.2019