

УДК 537.32, 53084.866, 542.455



Снарський А.О.

Снарський А.О.<sup>1,2</sup>, Безсуднов І.В.<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Кафедра загальної і теоретичної фізики  
Національний технічний університет «КПІ»  
просп. Перемоги, 37, Київ, 0356, Україна;

<sup>2</sup>Інститут проблем реєстрації інформації НАН України,  
вул. Шпакова, 2, Київ, 03113, Україна;

<sup>3</sup>ЗАТ «Наука – Сервіс» вул. Новая Басмаянная, 20,  
Москва, 107066, Росія

<sup>4</sup>Санкт – Петербурзький Національно дослідний університет  
проспект Кронверкський, 49, Санкт – Петербург, 197101, Росія



Безсуднов І.В.

## ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИЙ ПРИСТРІЙ В ПЕРІОДИЧНОМУ СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

Нами запропоновано поворотний термоелектричний (ТЕ) пристрій, що складається з одного ТЕ провідника, який працює у двох періодичних усталених режимах: періодичному режимі перемикання (Р-режимі), коли температури гарячого і холодного кінців ТЕ провідника періодично миттєво змінюються на протилежну, і неперервному синусоїдальному режимі (S-режимі), коли температури граней ТЕ провідника постійно змінюється по синусоїді. Режими генерування потужності і охолодження поворотного ТЕ пристрою в періодичному режимі, що встановився, були вивчені аналітично. Встановлено, що ККД і температура охолодження поворотного ТЕ пристрою залежать не тільки від безрозмірної ТЕ добротності, але й від додаткового безрозмірного параметра, що містить період обертання, розміри і температуропровідність ТЕ провідника. Запропонований аналітичний метод може бути узагальнений навіть на більш складні режими синхронізації і дає можливість розв'язати проблему оптимізації параметрів ТЕ пристрою. Досліджено можливість досягнення покращених характеристик для поворотного ТЕ пристрою в порівнянні із традиційним стаціонарним режимом і показано, що S-режим дає глибше охолодження в певні моменти часу.

**Ключові слова:** термоелектричний пристрій, періодичний усталений режим, добротність, генерування потужності, охолодження.

We propose a rotating thermoelectric (TE) device comprised of a single TE conductor operating in two periodic steady state modes: switching periodic mode (P-mode) when the hot and cold ends of the TE conductor are periodically instantly reversed and continuous sinusoidal mode (S-mode) when the temperature of TE conductor edges varies continuously according to sine wave. Power generation and cooling regimes of the rotating (TE) device in the periodic steady state were studied analytically. The efficiency and cooling temperature of the rotating TE device was found to depend not only on a dimensionless TE figure of merit, but also upon an additional dimensionless parameter comprising of the rotation period, the size and the thermal diffusivity of the TE conductor. The proposed analytical method can be generalized to even more complex timing modes and allows solving the optimization problem for TE device parameters. We investigated whether it is possible to achieve better performance for the rotating TE device comparing to conventional stationary steady state, S-mode was shown to demonstrate deeper cooling at certain times.

**Key words:** thermoelectric device, periodic steady state, figure of merit, power generation, cooling.

## Вступ

Головний спосіб покращення ККД термоелектричних (ТЕ) пристроїв – генераторів потужності, охолоджувачів і т.д. полягає в збільшенні безрозмірної добротності ТЕ матеріалів –  $ZT = \alpha^2 \sigma T / \kappa$ , де  $\alpha$  – термоЕРС, або коефіцієнт Зеебека,  $\sigma$  – коефіцієнт електропровідності,  $T$  – абсолютна температура,  $\kappa$  - коефіцієнт теплопровідності.

На відміну від надпровідності, де були винайдені нові матеріали з високими температурами переходу в надпровідний стан, успіхи в покращенні  $ZT$  ТЕ матеріалів досить невітніші. Так, наприклад, за кімнатної температури ( $T = 300^\circ K$ ) з 1950 р. дотепер добротність  $ZT \sim 1$  виросла лише до  $ZT \sim 1.2 \div 1.3$  [1-5]. Більше того, промислових ТЕ матеріалів із  $ZT \sim 1.3$  сьогодні немає. Справді, для звичайних застосувань, наприклад, для побутового або промислового охолодження, потрібні ТЕ матеріали з добротністю  $ZT \geq 2.0$  [6-8]. Покладалися надії на прогрес за допомогою тунельних ефектів і інших квантових ефектів у наноструктурних ТЕ матеріалах [5, 9-13]. Однак значного успіху поки що не досягнуто.

Параметри ТЕ пристрою в режимі, що встановився, залежать тільки від  $ZT$  добротності [14]. Чим вище  $ZT$ , тим нижче температура охолодження, що досягається.

У перехідних режимах на ККД ТЕ пристрою впливають багато інших параметрів, такі як температуропровідність, тривалість імпульсу струму в імпульсному режимі [6, 15-20], час релаксації теплових процесів і т.д. Такі перехідні режими постійно привертають увагу дослідників [5, 15-29], тому що мають перевагу над усталеними. Наприклад, у певні моменти часу можна досягти більш глибокого охолодження в імпульсному режимі охолодження [15-20]. Оптимізація параметрів перехідного режиму дає можливість покращити роботу ТЕ пристрою порівняно з усталеним режимом навіть за використання однакових ТЕ матеріалів.

У якісному відношенні характеристики ТЕ пристроїв у перехідному режимі можна покращити завдяки тому, що час релаксації електричних процесів порівняно з часом релаксації теплових процесів незначний [14]. При проходженні струму через ТЕ пристрій в режимі охолодження в усталеному режимі тепло Пельтьє, що відводиться від холодного спаю, і тепло Джоуля, що генерується в ТЕ провіднику, збалансовані. Підвищений струм і відповідно збільшене тепло Джоуля вивели б ТЕ пристрій з ладу. У перехідному режимі за рахунок різниці часу релаксації тепловий баланс є некомпенсованим. Більш високий струм, що пропускається через ТЕ пристрій впродовж короткого часу, створює додаткове охолодження. Оптимізація довжини і форми імпульсів струму може дати глибше охолодження на обмежені інтервали часу [18] або охолодження невеликих об'єктів за коротший термін [19].

Імпульсне охолодження [21-24] складається із двох основних фаз. Перша фаза, перехідна, реалізує швидке і глибоке охолодження, друга фаза – релаксація, впродовж якої, як правило, ТЕ пристрій не використовується. Таким чином, якщо в імпульсному режимі час другої фази рівний або більше часу релаксації теплових процесів (тобто того часу, за який встигає встановитися теплова рівновага), то розглянутому нами режимі характерні часи (період зміни граничних умов у генераторному режимі, або струму, у холодильному), загалом, менше часу релаксації теплових процесів.

Пропоновану статтю присвячено ТЕ пристроям, які працюють у періодичному усталеному режимі. На відміну від імпульсного охолодження ТЕ пристрій в періодичному усталеному режимі працює безупинно. Основне питання, яке розглядається тут – чи можна в даному періодичному усталеному режимі досягти покращення характеристик у порівнянні з усталеним режимом принаймні у певні моменти часу. У цьому дослідженні

ми випускаємо технічні деталі, такі як контактний опір пластин, поперечне теплоперенесення, параметри об'єкта, що охолоджується, і т.д.

Пропоновані ТЕ пристрої складаються з одного ТЕ провідника з постійним поперечним перерізом, виготовленого з ТЕ матеріалу, а роль другого провідника виконує корпус ТЕ пристрою, який є звичайним металевим провідником.

Нами розглянуто два типи періодичних усталених режимів для запропонованих ТЕ пристроїв: періодичний режим перемикавання (*P*-режим), коли температури гарячого і холодного кінців ТЕ провідника періодично миттєво змінюються на протилежну, і неперервний синусоїдальний режим (*S*-режим), коли температури граней ТЕ провідника беззупинно змінюються по синусоїді.

Для періодичних усталених режимів поряд з *ZT* ми встановили новий безрозмірний параметр, що поєднує в собі період зміни температури, розміри ТЕ провідника і його температуропровідність. Було розраховано оптимальне значення вищевказаного параметра.

У наступному розділі схематично показано ТЕ пристрої в *P*- і *S*-режимах. Подальші розділи містять аналітичні розрахунки і результати для *P*-режиму генерування потужності і охолодження, і для *S*-режиму охолодження. Останній розділ містить обговорення і висновки.

## Модель ТЕ пристрою в періодичному усталеному режимі

ТЕ пристрій, що працює в періодичному режимі перемикавання (*P*-режим), схематично показано на рис. 1а. ТЕ провідник періодично обертається в площині рисунка, і його гарячий і холодний кінці (спаї) миттєво міняються місцями.

ТЕ пристрій, що працює в безперервному синусоїдальному режимі (*S*-режим), схематично представлено на рис. 1б. Припустимо, ТЕ провідник обертається в отворі діафрагми з лінійним розподілом температури зверху вниз (див. рис. 1б), відповідно, на кінцях (спаях) поворотного ТЕ провідника (див. рис. 1б) температура якого неперервно змінюється за синусоїдою.

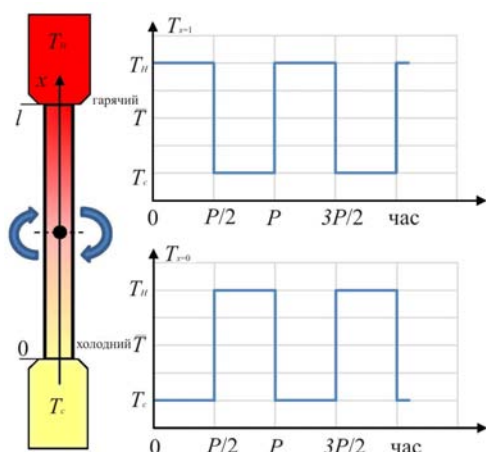
ТЕ пристрій (рис. 1а, б) складається з одного ТЕ провідника з постійним поперечним перерізом *S* довжиною  $l = 2a$ . Інші деталі ТЕ пристрою не мають ТЕ властивостей. Період обертання *P* фіксований.

Виконуючи подальші аналітичні розрахунки для *P*- і *S*-режимів, ми вважаємо для зручності, що ТЕ провідник є фіксованим у площині, але температура на його кінцях (спаях) змінюється за періодичним законом, особливим для кожного режиму.

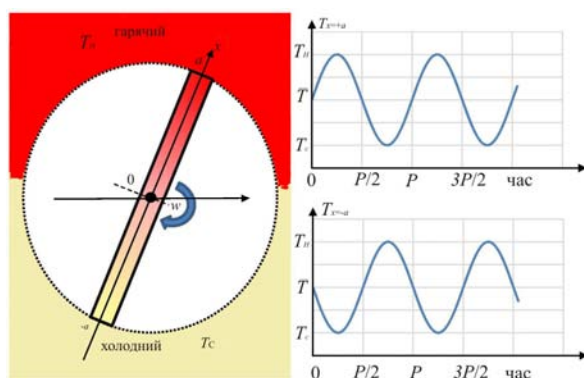
Рівняння теплопровідності для ТЕ провідника в ТЕ пристроях має стандартний вигляд [14]

$$c_v \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho j^2, \quad (1)$$

де *t* – час, *x* – координата уздовж ТЕ провідника,  $T(x, t)$  – температура ТЕ провідника,  $j(t)$  – густина струму в ТЕ провіднику,  $\rho = 1/\sigma$  – питомий опір,  $\kappa$  – питома теплопровідність,  $c_v$  – питома теплоємність,  $\rho_0$  – об'ємна густина,  $\chi = \kappa / c_v \rho_0$  – температуропровідність.



а)



б)

Рис. 1. Схема пропонуваніх ТЕ пристроїв, що працюють в а) періодичному режимі перемикання (P-режим) і б) безперервному синусоїдальному режимі (S-режим), (колір у режимі онлайн).

Граничні умови для P-моди (рис. 1а) такі:

$$\begin{aligned} T(x,t)|_{x=0} &= \bar{T} - T_0\theta(t) \\ T(x,t)|_{x=l} &= \bar{T} + T_0\theta(t) \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\bar{T}$  – зовнішня середня температура,  $T_0$  – амплітуда зміни зовнішньої температури, функція  $\theta(t)$  рівна  $-1$  для парних півперіодів, а для непарних дорівнює  $+1$ .

$$\theta(t) = \begin{cases} +1, & nP < t < (n+1/2)P \\ -1, & (n+1/2)P < t < (n+1)P \end{cases} \quad (3)$$

S-режим (рис. 1б) відповідає випадку, коли температура на кінцях (спаях) ТЕ провідника постійно змінюється по синусоїді, тому граничні умови в S-режимі такі:

$$T(x,t)|_{x=\pm a} = \bar{T} \pm T_0 \sin(\omega t), \quad (4)$$

де  $\omega = P/2\pi$  – кутова частота зміни температури,  $\bar{T}$  і  $T_0$  мають однакові значення, як в P-режимі.

Таким чином, упродовж періоду ТЕ провідник в P- і S-режимах має максимальну температуру на гарячому кінці (спаї)  $T_H = \bar{T} + T_0$  і мінімальну на холодному кінці (спаї)  $T_C = \bar{T} - T_0$ .

Струм, що протікає через ТЕ провідник у режимі охолодження, установлений на

$$\begin{aligned} j &= j_0 \theta(t), & (P\text{-режим}) \\ j &= j_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right). & (S\text{-режим}) \end{aligned} \quad (5)$$

У режимі генерування потужності струм ТЕ провідника розраховується за законом Зеебека  $j \sim \alpha \Delta T$ , де  $\alpha$  – термоЕРС, або коефіцієнт Зеебека, і, припустимо, не залежить від температури

$$\begin{aligned} j &= \alpha \Delta T, & \Delta T &= 2T_0, & (P\text{-режим}) \\ j &= \alpha \Delta T, & \Delta T &= 2T_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right). & (S\text{-режим}), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $2T_0 = \Delta T$  – максимальна різниця температур між гарячим і холодним кінцями (спаями).

Рівняння (1) із граничними умовами (2) або (4) і відношення для струму ТЕ провідника (5) або (6) у періодичному установленому режимі вирішуються аналітично в наступних розділах.

## Розподіл температури і теплові потоки в періодичному режимі перемикання (P – режим)

### Розподіл температури в P-режимі

Розв'язок рівняння (1) із граничними умовами (2) для P-режиму розраховано аналітично за допомогою методу, описаного в [30, глава 15].

По-перше, подамо  $T(x,t)$  у такому вигляді:

$$T(x,t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{2\kappa} x(l-x) + \tilde{T}(x,t). \quad (7)$$

Тоді (1) дає рівняння для  $\tilde{T}(x,t)$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} \quad (8)$$

і граничні умови (2) стають

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x,t) \Big|_{x=0} &= -T_0 \theta(t), \\ \tilde{T}(x,t) \Big|_{x=l} &= +T_0 \theta(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Потім згідно з [30] запишемо  $\tilde{T}(x,t)$  у вигляді ряду

$$\tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (10)$$

Підстановка  $\tilde{T}(x,t)$  (10) в рівняння (8), інтегрування по частинах двічі і використання граничних умов (9) дає наступне співвідношення для  $T_k(t)$ :

$$\frac{dT_k}{dt} + \chi \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k = -\chi \frac{2\pi k}{l^2} T_0 \theta(t) \left[ 1 + (-1)^k \right]. \quad (11)$$

Звичайне диференціальне рівняння (11) розв'язується таким способом [31-33]:

$$T_k(t) = T_0 e^{-A_k t} - \chi \frac{2\pi k}{l^2} [1 + (-1)^k] e^{-A_k t} \int_0^t \theta(t) e^{A_k t} dt, \quad (12)$$

де

$$A_k = \chi \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2. \quad (13)$$

За більш тривалих термінів, коли досягається періодичний усталений режим перший перехідний член повинен зникнути.

Нехай  $t = mP + \tau$ , де  $0 < \tau < P/2$  й  $m \gg 1$ , тобто час  $\tau$  вимірюється з початку періоду, і в цей час лівий спай ( $x = 0$ ) холодний, а правий ( $x = l$ ) – гарячий (див. рис. 1а). Тоді згідно (3) інтеграл в (12) ділиться на три члени, які становлять суму непарних ( $\theta(t) = +1$ ) і парних ( $\theta(t) = -1$ ) напівперіодів, а третій член, залежить від  $\tau$ :

$$\int_0^t \theta(t) e^{A_k t} dt = \sum_{n=0}^m \int_{nP}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)P} e^{A_k t} dt - \sum_{n=0}^m \int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)P}^{(n+1)P} e^{A_k t} dt + \int_{(m+1)P}^{(m+1)P+\tau} e^{A_k t} dt. \quad (14)$$

Вираховуючи інтеграли в першому і другому членах (14) і враховуючи  $e^{-mA_k} \ll 1$  при  $m \gg 1$ , одержимо геометричні прогресії. Сума прогресій, які ми використовуємо в (12) для одержання остаточних формул –

$$T_k(\tau) = -T_0 \frac{2}{k\pi} [1 + (-1)^k] + 2T_0 \frac{2}{k\pi} [1 + (-1)^k] \frac{e^{-A_k \tau}}{1 + e^{-A_k \frac{P}{2}}}. \quad (15)$$

Підставляючи (15) в (1) і враховуючи, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{l} x = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \quad (16)$$

одержимо

$$\tilde{T}(x, \tau) = -T_0 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) + T_0 \sum_{k=1}^{\infty} N_k e^{-A_k \tau} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (17)$$

де

$$N_k = \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{1 - e^{-A_k \frac{P}{2}}}. \quad (18)$$

В кінцевому підсумку розв'язок (1) із граничними умовами (3) для  $P$ -режиму має вигляд

$$T(x, \tau) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{2\kappa} x(l-x) - T_0 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) + T_0 \sum_{k=1}^{\infty} N_k e^{-A_k \tau} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (19)$$

де  $\tau$  належить  $[0 \dots P/2]$ .

На рис.2 показано розподіл температури уздовж ТЕ провідника в  $P$ -режимі в різні моменти часу.

За  $t = P, 2P, 3P, \dots$  температура граней ТЕ провідника змінюється миттєво. Потім після цього стрибка ТЕ провідник починає нагріватися, це чітко видно з рис. 2, але як і раніше існує частина ТЕ провідника з температурою  $T(x, \tau) < \bar{T}$ . У результаті ця частина зменшується в розмірах, а її температура зростає.

Вибраний ТЕ провідник і робочі параметри демонструють випадок, коли температура на середині ТЕ провідника стабільна, тобто теплові хвилі глибоко не проникають у ТЕ провідник.

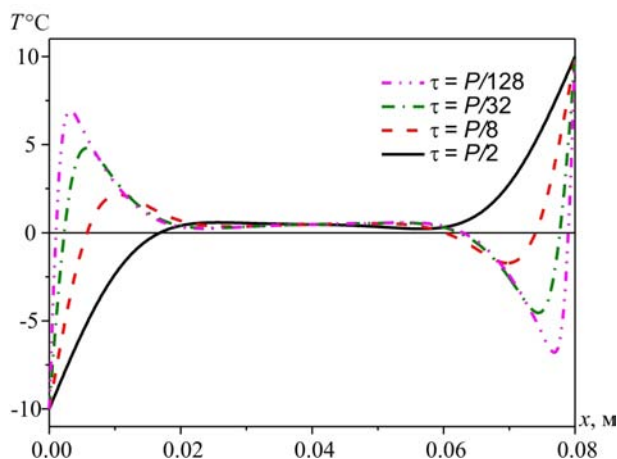


Рис. 2. Розподіл температури ТЕ провідника в  $P$ -режимі в різні моменти, виміряний з початку періоду:  $P/128 \dots P/2$ . Зовнішні температури:  $\bar{T} = 0^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , довжина ТЕ провідника  $l = 0.08\text{м}$ , параметри ТЕ матеріалу  $\kappa = 1.7\text{Вт/мК}$ ,  $\chi = 1.2 \times 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}$ , густина струму  $j = 0.1 \times 10^6\text{ А/м}^2$  і період обертання  $P = 1\text{с}$ . (копір у режимі онлайн).

Це аналогічно вічній мерзлоті, коли періодичні зміни температури на поверхні Землі не виявляють впливу на температуру на певній глибині.

Слід також зазначити, що температура на середині ТЕ провідника трохи вища, ніж  $\bar{T}$  із-за Джоулевого тепла, що виділяється. За відсутності струму температура в центрі ТЕ провідника, звичайно, дорівнює  $\bar{T}$ .

### ККД генерування потужності в $P$ -режимі

ККД генерування потужності  $\eta$  ТЕ пристрою в  $P$ -режимі залежить від теплового потоку, що надходить до гарячого спаю, і вихідного з холодного спаю ТЕ провідника (за  $x = 0$  й  $x = l$  відповідно) [14]. Густина теплового потоку  $q_x$  є сумою густин потоків, створених розподілом температур  $\sim \partial T / \partial x$  і тепловим потоком Пельтьє  $\Pi j$ , де  $\Pi = \alpha T$  – коефіцієнт Пельтьє (ми вважаємося, що термоЕРС або коефіцієнт Зеєбека  $\alpha$  не залежить від температури).

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha T j. \quad (20)$$

Знаходимо тепловий потік на холодному –  $\dot{Q}_C$  і гарячому –  $\dot{Q}_H$  спаюх за допомогою (19):

$$\dot{Q}_C = q_x S|_{x=0} = -\frac{\rho J^2 l}{2} S - \kappa \frac{2T_0}{l} S - \kappa T_0 S \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} N_k e^{-A_k \tau} + \alpha T_c J, \quad (21)$$

$$\dot{Q}_H = q_x S|_{x=l} = -\frac{\rho J^2 l}{2} S - \kappa \frac{2T_0}{l} S - \kappa T_0 S \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\pi}{l} N_k e^{-A_k \tau} + \alpha T_H J. \quad (22)$$

Тут  $S$  – поперечний переріз ТЕ провідника,  $J$  – потоки струму через ТЕ провідник.  $J$  визначається ЕРС  $\varepsilon$ , генерованим згідно з ефектом Зеебека  $\varepsilon = \alpha(T_H - T_C)$  і з'єднаним послідовно опором ТЕ провідника  $r = \rho l / S$  і опором навантаження  $R$ :

$$J = \alpha \frac{T_H - T_C}{r + R} = \alpha \frac{2T}{r(1 + \Omega)}, \quad \Omega = \frac{r}{R}. \quad (23)$$

Знаки компонентів тепла Пельтьє в (21) і (22) обрані таким чином, щоб потік був позитивно спрямований від гарячого до холодного спаю, тобто тепловий потік, що надходить до гарячого спаю, ( $x = l$ ) і вихідний з холодного спаю ( $x = 0$ ), вважаємо позитивним.

Тепло, що виходить із гарячого  $Q_H$  і надходить до холодного  $Q_C$  спаю, залежить від часу, тому, щоб одержати ККД  $\eta$ , ми повинні інтегрувати  $Q_H$  і  $Q_C$  за певний час, таким часом для  $P$  – режиму є напівперіод  $P/2$ :

$$Q_H = \int_0^{P/2} \dot{Q}_H d\tau, \quad Q_C = \int_0^{P/2} \dot{Q}_C d\tau. \quad (24)$$

Підставляючи у (24) вирази для  $\dot{Q}_H$  (21) й  $\dot{Q}_C$  (22), знаходимо

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P/2} Q_C &= \frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e + \alpha T_C J \\ \frac{1}{P/2} Q_H &= -\frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e + \alpha T_H J \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

де перенормована теплопровідність

$$\kappa_e = \kappa \left[ 1 + \frac{4\mu_0^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{(k\pi)^2} \operatorname{th} \left( A_k \frac{P}{4} \right) \right] \quad (26)$$

і

$$\mu_0^2 = J^2 \frac{1}{P\chi}. \quad (27)$$

Порівнюючи співвідношення (25) і (26) для  $P$ -режиму і формули для усталеного режиму [14] можна зрозуміти, що вони відрізняються тільки величиною теплопровідності. ККД  $\eta$  в усталеному режимі залежить тільки від теплопровідності –  $\kappa_e$ , але в  $P$  – режимі він залежить від перенормованої теплопровідності  $\kappa_e$  (26), яка є комплексним параметром, пропорційним не тільки теплопровідності ТЕ провідника –  $\kappa_e$ , але і довжині ТЕ провідника, періоду перемикання  $P$  і температуропровідності  $\chi$ .

Отже відповідний вираз для ККД  $\eta = (Q_H - Q_C) / Q_H$  для  $P$ -режиму аналогічний стаціонарному режиму, але використовує перенормовану теплопровідність  $\kappa_e$  (26). Відповідні розрахунки можна знайти, наприклад, в [14] і нижче наводиться остаточний вираз



$$\eta = \frac{Z_e \Delta T \Omega}{(1 + \Omega)^2 \left[ 1 + \frac{Z_e T_H}{1 + \Omega} - \frac{1}{2} \frac{Z_e \Delta T}{(1 + \Omega)^2} \right]}, \quad (28)$$

де  $Z_e = \sigma \alpha^2 / \kappa_e$  – перенормована за допомогою (26) безрозмірна ТЕ добротність.

Як і в усталеному режимі [14], максимальний ККД  $\eta$  в  $P$  – режимі досягається за оптимальним співвідношенням  $\Omega_{opt} = R / r = \sqrt{1 + Z_e \bar{T}}$ . Використовуючи  $\Omega_{opt}$  в (28), знаходимо значення максимального ККД  $\eta_{max}$  для  $P$  – режиму, яке залежить тільки від  $T_H, T_C$  і  $Z_e$

$$\eta_{max} = \frac{\Delta T}{T_H} \frac{\sqrt{1 + Z_e \bar{T}} - 1}{\sqrt{1 + Z_e \bar{T}} - \frac{T_C}{T_H}}. \quad (29)$$

Максимальний ККД  $\eta_{max}$  є монотонно зростаюча функція  $Z_e$ , тому більш високе  $Z_e$  і відповідно більш низьке  $\kappa_e$  дають покращене значення  $\eta_{max}$ .

Перенормована теплопровідність  $\kappa_e$  в  $P$ -режимі (26) завжди вища, ніж  $\kappa$ ,  $\kappa_e > \kappa$ , тому ККД в  $P$ -режимі (28) завжди нижчий, ніж ККД в усталеному режимі. У випадку, коли  $\chi P \pi^2 / 4l > 3$ , гіперболічний тангенс у (26) майже дорівнює одиниці, і з врахуванням  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1 + (-1)^k}{(k\pi)^2} \right] = 1/12$  одержуємо апроксимований вираз для перенормованої теплопровідності

$$\kappa_e \approx \kappa \left( 1 + \frac{1}{3} \mu_0^2 \right). \quad (30)$$

Щоб ККД ТЕ пристрою в  $P$ -режимі був якнайвищим, нам необхідно  $\kappa_e \rightarrow \kappa$  або  $\mu_0^2 \rightarrow 0$  [30]. Останнє означає більш високі значення  $\chi$  або більш короткі довжини  $l$  ТЕ провідника. Іншими словами, половину періоду ТЕ провідник нагрівається майже як ТЕ провідник в усталеному режимі.

### Охолодження в $P$ -режимі

Розрахунки для режиму охолодження в  $P$ -режимі аналогічні розрахункам для ККД, лише слід враховувати, що струм визначається (5)  $J = J_0 \theta(t)$ , а не ефектом Зеебека. Оптимальний струм  $J_{opt}$  мінімізує температуру охолодження або максимально збільшує холодильний коефіцієнт  $K$ .

Теплові потоки  $\dot{Q}_C$  й  $\dot{Q}_H$  у режимі охолодження  $P$  – режиму відрізняються від (21) і (22) лише знаками компонента тепла Пельтьє, бо струм у ТЕ провіднику протікає у зворотному напрямку порівняно з режимом генерування потужності.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P/2} \dot{Q}_C &= \frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e - \alpha T_C J \\ \frac{1}{P/2} \dot{Q}_H &= -\frac{1}{2} r J^2 + \frac{2T_0}{l} S \kappa_e - \alpha T_H J \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

У режимі охолодження ми повинні стежити за змінами ефективної (нормалізованої) теплопровідності  $\kappa_e(\tau)$ , щоб знайти час досягнення мінімальної можливої температури охолодження.  $\kappa_e(\tau)$  залежить від часу  $\tau$  в такий спосіб:

$$\kappa_e(\tau) = \kappa \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \pi N_k e^{-A_k \tau} \right]. \quad (32)$$

Слід зазначити, що  $\kappa_e(\tau)$ , на відміну від  $\kappa_e$  (26), не містить фактор  $\mu_0^2$  (27).

Потім, як в усталеному режимі умова  $\partial \dot{Q}_C / \partial J = 0$  для струму дає

$$J_{opt} = \frac{\alpha T_C}{\rho l} S = \frac{\alpha T_C}{r}. \quad (33)$$

Відмітимо, що на відміну від усталеного режиму теплопровідність  $\kappa_e(\tau)$  (32) залежить від  $\tau$ , однак не впливає на величину оптимального струму  $J_{opt}$ .

Вираз для теплового потоку на холодному спаї за оптимального струму дорівнює

$$\frac{1}{S} \dot{Q}_C = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 T_C^2}{\rho l} + \frac{2T_0}{l} \kappa_e(\tau). \quad (34)$$

В усталеному режимі мінімальна температура  $T_C^{\min}$  охолодження вираховується з умови  $\dot{Q}_C = 0$ . У  $P$ -режимі умова  $\dot{Q}_C = 0$  можлива тільки в певні моменти часу. Вважаючи що  $\dot{Q}_C = 0$  [34], одержимо

$$T_C^{\min} = 2\bar{T} \frac{\sqrt{1 + Z_e(\tau)\bar{T}} - 1}{Z_e(\tau)\bar{T}}, \quad (35)$$

де перенормована добротність  $Z_e(\tau) = \sigma \alpha^2 / \kappa_e(\tau)$  залежить від часу  $\tau$ .

Єдина відмінність між  $T_C^{\min}(\tau)$  (35) і виразом для  $T_C^{\min}$  в установленому режимі полягає в значенні добротності.  $T_C^{\min}(\tau)$  (35) використовує перенормовану теплопровідність  $\kappa_e(\tau)$ , яка залежить від часу  $\tau$  і дає можливість оптимізувати температуру охолодження.

Максимальне значення  $Z_e(\tau)$ , тобто мінімальна температура охолодження  $T_C^{\min}$ , відповідає мінімальному  $T_C^{\min}$ . Як випливає з (32),  $\kappa_e(\tau)$  має мінімум за  $\tau = P/2$ , однак навіть у цьому випадку  $\kappa_e(\tau = P/2) > \kappa$ , тобто аналогічно режиму генерування потужності  $P$ -режиму.

У зв'язку з тим, що  $\kappa_e(\tau) > \kappa$ , холодильний коефіцієнт  $K = \dot{Q}_C / (\dot{Q}_H - \dot{Q}_C)$  і максимальна холодопродуктивність  $Q_C^{\max}$  менші, ніж в установленому режимі хоча за деяких значень теплопровідності період перемикання й інші параметри ТЕ провідника близькі до нього.

Наведені вище висновки застосовні тільки до  $P$ -режиму. Далі ми покажемо, що ТЕ пристрій, який працює в  $S$ -режимі, може продемонструвати покращені характеристики.

## Розподіл температури й тепловий потік в S – режимі

### Розподіл температури в S – режимі

Розв'язок рівняння (1) із граничними умовами (4) для S-режиму починається з подання  $T(x, t)$  у вигляді

$$T(x, t) = \bar{T} - j_0^2 F \left( \sin 2\omega t - \mu^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) + \tilde{T}(x, t), \quad (36)$$

де

$$\mu^2 = a^2 \frac{\omega}{\chi}, \quad F = \frac{\rho}{4c_v \rho_0 \omega}. \quad (37)$$

Потім (1) дає рівняння для  $\tilde{T}(x, t)$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}, \quad (38)$$

а граничні умови (4) приймають вигляд

$$\tilde{T}(x, t) \Big|_{x=\pm a} = \pm T_0 \sin(\omega t) + j_0^2 F \sin(2\omega t). \quad (39)$$

Розв'язок (38) з граничними умовами можна знайти у вигляді

$$\tilde{T}(x, t) = T_0 (S(x) \sin \omega t + C(x) \cos \omega t) + j_0^2 F (\tilde{S}(x) \sin 2\omega t + \tilde{C}(x) \cos 2\omega t), \quad (40)$$

де

$$\begin{cases} S(x) = S_{cs} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) + S_{sc} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right), \\ C(x) = S_{sc} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) - S_{cs} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}a} x\right), \\ \tilde{S}(x) = \tilde{S}_{cc} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{a} x\right) + \tilde{S}_{ss} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{a} x\right), \\ \tilde{C}(x) = -\tilde{S}_{ss} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \cos\left(\frac{\mu}{a} x\right) + \tilde{S}_{cc} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{a} x\right) \sin\left(\frac{\mu}{a} x\right). \end{cases} \quad (41)$$

Граничні умови (39) дають можливість знайти коефіцієнти в (41):

$$\begin{aligned} S_{cs} &= \frac{\operatorname{ch}(\mu/\sqrt{2}) \sin(\mu/\sqrt{2})}{\operatorname{sh}^2(\mu/\sqrt{2}) + \sin^2(\mu/\sqrt{2})}, & S_{sc} &= \frac{\operatorname{sh}(\mu/\sqrt{2}) \cos(\mu/\sqrt{2})}{\operatorname{sh}^2(\mu/\sqrt{2}) + \sin^2(\mu/\sqrt{2})}, \\ \tilde{S}_{ss} &= \frac{\operatorname{sh}(\mu) \sin(\mu)}{\operatorname{ch}^2(\mu) - \sin^2(\mu)}, & \tilde{S}_{cc} &= \frac{\operatorname{ch}(\mu) \cos(\mu)}{\operatorname{ch}^2(\mu) - \sin^2(\mu)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Отже, розв'язок (1) з граничними умовами (4) можна записати як

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \bar{T} + T_0 (S(x) \sin \omega t + C(x) \cos \omega t) + \\ &+ j_0^2 F \left( \sin 2\omega t + \mu^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2} + \tilde{S}(x) \sin 2\omega t + \tilde{C}(x) \cos 2\omega t \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Компоненти в (43) з  $\sin \omega t$  і  $\cos \omega t$  зобов'язані своїм походженням тепловому потоку, створеному різницею температур на кінцях ТЕ провідника ( $x = \pm a$ ), їхня амплітуда пропорційна  $T_0$ . Такі компоненти описують типове ослаблення температурних хвиль на відстані від кінців ТЕ провідника ( $x = \pm a$ ). Параметр  $\mu^2$  є комбінацією частоти, довжини й теплопровідності ТЕ провідника, що аналогічно  $\mu_0^2$  в  $P$  – режимі (27).

Двочастотні члени  $\sin 2\omega t$ ,  $\cos 2\omega t$  у (43) пропорційні квадрату амплітуди густини струму  $j_0^2$ . Ці члени описують тепловий потік, що переноситься неоднорідністю розподілу температури за рахунок тепла Джоуля.

На рис. 3 показано розподіл температури в ТЕ провіднику, який має ті ж параметри, що й на рис. 2, але використовується в  $S$  – режимі.

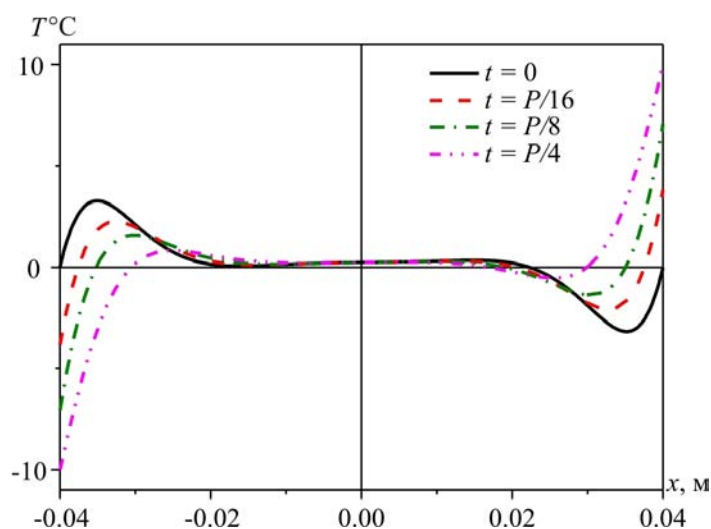


Рис. 3. Розподіл температури ТЕ провідника в  $S$ -режимі в різний час, вимірюваний від початку періоду:  $0 \dots P/16$ . Зовнішні температури:  $\bar{T} = 0^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , розміри ТЕ провідника  $a = 0.04\text{m}$ , параметри ТЕ матеріалу  $\kappa = 1.7\text{B} / \text{mK}$ ,  $\chi = 1.2 \times 10^{-6} \text{m}^2 / \text{c}$ , амплітуда густини струму  $j = 0.1 \times 10^6 \text{A} / \text{m}^2$  й період обертання  $P = 1\text{c}$  (колір онлайн).

На рис. 3 показано, що розподіл температури ТЕ провідника в  $S$  – режимі аналогічний  $P$  – режиму. Але температура на гранях ТЕ провідника в  $S$  – режимі постійно змінюється по синусоїді в діапазоні  $\bar{T} \pm T_0$ . У центрі ТЕ провідника  $T(0,t) > \bar{T}$  завдяки виділенню тепла Джоуля.

### Охолодження в $S$ – режимі

Нехай під час першого півперіоду температура нижнього кінця (спаю) ТЕ провідника (див. рис. 1б) нижча, ніж верхнього, тобто нижній спай холодний.

Звідси тепловий потік на холодному спаї ( $x = -a$ ) дорівнює

$$Q_C = -q_x S \Big|_{x=-a} = S \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-a} - \alpha T_C(t) j(t) S, \quad (44)$$

де другий член – тепловий потік Пельтьє,  $S$  – поперечний переріз ТЕ провідника,  $T_C(t) = T(x = -a, t)$ .

Підставляючи у (44) вираз для розподілу температури з (43), при  $x = -a$  одержимо

$$\begin{aligned} \left. \frac{Q_C}{S} \right|_{x=-a} &= \kappa T_0 (S'(-a) \sin \omega t + C'(-a) \cos \omega t) + \\ &+ \kappa j_0^2 F \left( -\frac{2\mu^2}{a} + \tilde{S}'(-a) \sin 2\omega t + \tilde{C}'(-a) \cos 2\omega t \right) - \alpha T_C(t) j(t), \end{aligned} \quad (45)$$

де  $S$  – поперечний переріз ТЕ провідника, а  $S', C', \tilde{S}', \tilde{C}'$  – похідні по координаті за  $x = -a$ .

Згідно з (4), температура холодного спаю буде мінімальною за  $\omega t = \pi/2$ . Позначимо її  $T_c$ . У цей момент тепловий потік на холодному спаї дорівнює

$$\left. \frac{Q_C}{S} \right|_{\substack{x=-a \\ \omega t=\pi/2}} = \kappa T_0 S'(-a) - \kappa j_0^2 F \left( 2\mu^2 / a - \tilde{C}'(-a) \right) - \alpha T_c j_0. \quad (46)$$

Щоб визначити мінімальну можливу температуру холодного спаю, нам потрібно знайти мінімальний тепловий потік на холодному спаї, тобто  $Q_C / S \big|_{\substack{x=-a \\ \omega t=\pi/2}}$  як функцію амплітуди густини струму  $j_0$ , потім, щоб знайти оптимальний струм  $j_0^{opt}$ , ми використовуємо умову  $\partial Q_C / \partial j_0 = 0$ . Далі, використовуючи  $j_0^{opt}$ , розрахуємо тепловий потік на холодному спаї (46) й у результаті одержимо мінімальну температуру охолодження  $T_c^{min}$ .

Значення оптимального струму  $j_0^{opt}$

$$j_0^{opt} = \frac{\alpha T_c}{2F\kappa \left( 2\mu^2 / a - \tilde{C}'(-a) \right)}. \quad (47)$$

За мінімальної температури  $T_c^{min}$  тепловий потік  $Q_C$  холодного спаю з амплітудою густини струму  $j_0^{opt}$  дорівнює нулю

$$\left. \frac{Q_C}{S} \right|_{\substack{x=-a \\ \omega t=\pi/2}} = \kappa T_0 S'(-a) - \frac{(\alpha T_c)^2}{4F\kappa} \frac{1}{\left( 2\mu^2 / a - \tilde{C}'(-a) \right)} = 0. \quad (48)$$

Використовуючи  $T_0 = \bar{T} - T_c$ , для (48) знаходимо

$$T_c^2 = 2\bar{T}(\bar{T} - T_c) \left[ \frac{2F\kappa^2}{\bar{T}\alpha^2 a^2} \left( 2\mu^2 - a\tilde{C}'(-a) \right) a S'(-a) \right]. \quad (49)$$

Позначимо член у квадратних дужках в (49)  $\beta(\mu, Z\bar{T}) / Z\bar{T}$ , потім, використовуючи  $2F\kappa^2 / \bar{T}\alpha^2 a^2 = 1 / 2Z\bar{T}\mu^2$ , запишемо наступні формули для безрозмірного параметра  $\beta(\mu)$

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= \frac{\mu}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{1}{2\mu} \frac{\text{sh}(\mu)\text{ch}(\mu) + \cos(\mu)\sin(\mu)}{\text{ch}^2(\mu) - \sin^2(\mu)} \right) \times \\ &\times \frac{\text{sh}(\mu/\sqrt{2})\text{ch}(\mu/\sqrt{2}) + \sin(\mu/\sqrt{2})\cos(\mu/\sqrt{2})}{\text{sh}^2(\mu/\sqrt{2}) + \sin^2(\mu/\sqrt{2})}, \end{aligned} \quad (50)$$

а рівняння (49) переписемо у вигляді

$$T_c^2 + \frac{\beta(\mu)}{Z\bar{T}} \bar{T} T_c - \frac{\beta(\mu)}{Z\bar{T}} \bar{T}^2 = 0. \quad (51)$$

Для розрахунків  $T_c^{\min}$  необхідно розв'язати квадратичне рівняння (51), позитивний корінь із (51) дає  $T_c^{\min}$ :

$$T_c^{\min} = \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + \frac{Z\bar{T}}{\beta(\mu)}}}. \quad (52)$$

Порівняємо  $T_c^{\min}$  в  $S$  – Режимі з мінімальною температурою охолодження в установленому режимі  $T_c^{st}$  – яку можна виразити [14] у такий спосіб:

$$T_c^{st} = \frac{T_H}{\sqrt{1 + Z\bar{T}}}, \quad (53)$$

або використовуючи  $T_H = 2\bar{T} - T_c$ .

$$T_c^{st} = \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T}}}. \quad (54)$$

Співвідношення (52) й (54) мають аналогічний вигляд, що робить можливим переписати вираз для  $T_c^{\min}$

$$T_c^{\min} = \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + Z_e \bar{T}}}, \quad (55)$$

де  $Z_e \bar{T}$  – перенормована добротність

$$Z_e \bar{T} = \frac{Z\bar{T}}{\beta(\mu)}. \quad (56)$$

Таким чином, розрахунки  $S$  – режиму також аналогічні установленому режиму. Як видно з (55),  $T_c^{\min}$  є монотонно зростаюча функція безрозмірного параметра  $\beta(\mu) / Z\bar{T}$ , за високих значень  $\beta(\mu) / Z\bar{T} \gg 1$  одержимо  $T_c^{\min} \rightarrow \bar{T}$ , що означає відсутність охолодження за високого  $\beta(\mu) / Z\bar{T}$ , тобто чим менше значення  $\beta(\mu) / Z\bar{T}$ , тим нижча  $T_c^{\min}$ .

Крім того, можна стверджувати, що більш висока ТЕ добротність  $Z\bar{T}$  означає краще охолодження в  $S$ -режиму (50) й навпаки при  $Z\bar{T} \rightarrow 0$ ,  $\beta(\mu) / Z\bar{T} \rightarrow \infty$  і охолодження неможливе. Далі відзначимо, що (50) й (52) показують, що  $T_c^{\min}$  залежить тільки від одного безрозмірного параметра –  $\mu$ .

Проаналізуємо співвідношення мінімальних температур в  $S$  – режимі і в установленому режимі,

$$\frac{T_c^{\min}}{T_c^{st}} = \frac{1 + \sqrt{1 + Z_e \bar{T}}}{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T} / \beta(\mu)}}{1 + \sqrt{1 + Z\bar{T}}}. \quad (57)$$

За фіксованої добротності  $Z\bar{T}$  співвідношення (57) залежить тільки від одного параметра  $\beta(\mu)$ . Функція  $\beta(\mu)$  має один мінімум і інваріантна відносно до  $Z\bar{T}$ . Мінімум спостерігається за  $\mu \approx 1.53$  і відповідно  $\beta \approx 0.76 < 1$ , тобто ТЕ пристрій в  $S$  – режимі забезпечить у певні моменти часу більш глибоке охолодження, ніж в установленому режимі (див. рис. 4).

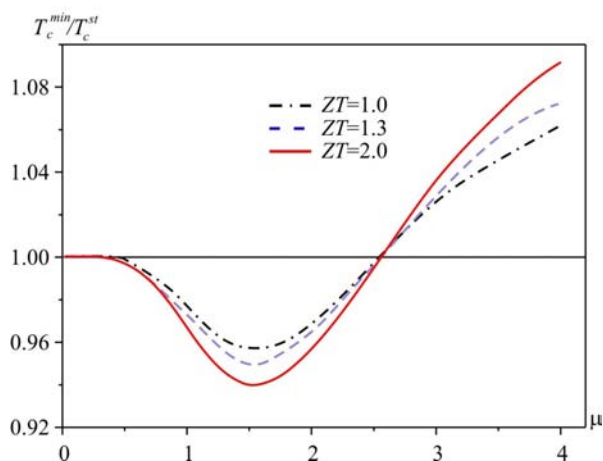


Рис. 4. Співвідношення мінімальних температур  $T_c^{min} / T_c^{st}$  для  $S$ -режиму й установленого режиму залежно від  $\mu$  для  $Z\bar{T} = 1.0, 1.4, 2.0$  (колір онлайн).

Як приклад, для ТЕ пристрою в  $S$  – режимі з ТЕ провідником з  $Bi_2Te_3$  [34] (температуропровідність  $\chi \approx 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ ) ми вибрали довжину ТЕ провідника  $2a = 1.5 \text{ мм}$  й період обертання  $P \approx 1.15 \text{ с}$ , що дає оптимальне  $\mu_{min} \approx 1.53$ .

Для термоелектричного пристрою, що працює в  $S$ -режимі із зазначеними вище параметрами, були розраховані  $T(x, t)$ , відлічувані від початку періоду – рис. 5.

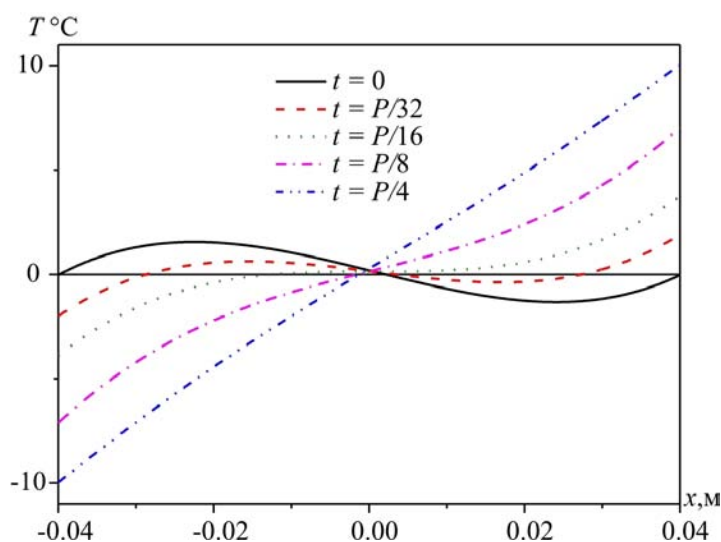


Рис. 5. Розподіл температури ТЕ провідника в  $S$ -режимі в різний час, вимірюваний від початку періоду:  $0 \dots P / 32$ . Зовнішні температури:  $\bar{T} = 0^{\circ}\text{C}$ ,  $T_0 = 10^{\circ}\text{C}$ , безрозмірний параметр ТЕ матеріалу  $\mu_{min} \approx 1.53$ , розміри ТЕ провідника  $a = 0.04 \text{ м}$ .

Порівнюючи рис. 3 і рис. 5, видно, що саме за критичного значення безрозмірного параметра, рівного  $\mu_{\min} \approx 1.53$ , залежність температури  $T(x,t)$  від координати в момент часу  $P/4$  стає лінійною, тепло проникає до середини віток і таким чином увесь її об'єм повністю задіяний.

Для  $S$  – режимі за оптимального  $\beta(\mu) \approx 0.76$  мінімальну досягну температуру охолодження можна виразити як

$$T_c^{\min} \approx \frac{2\bar{T}}{1 + \sqrt{1 + 1.3Z\bar{T}}}. \quad (58)$$

Іншими словами, використовуючи ТЕ матеріал з  $ZT = 1$  в  $S$  – режимі, ми одержимо охолодження подібно матеріалу з  $ZT = 1.3$  в установленому режимі. ТЕ матеріал за  $ZT = 1.3$  в  $S$  – режимі відповідає  $ZT = 1.7$  в установленому режимі

### Дискусія й висновки

У статті описано два типи пропонованого ТЕ обладнання, які працюють у періодичних установлених режимах:  $P$ -режимі – періодичному режимі перемикавання, і  $S$ -режимі – неперервному синусоїдальному режимі.

Як правило, ККД ТЕ пристрою зв'язаний зі швидкістю виробництва ентропії, особливо з об'ємним інтегралом відхилення густини потоку ентропії  $s = q/T$ ,  $B = \int_V \text{div}(s) dV$ . У результаті,

ККД можна записати у вигляді

$$\eta = \eta_c \frac{1}{1 + \frac{BT_H}{A}}, \quad (59)$$

де  $A$  – робота, виконана ТЕ генератором потужності.

Таким чином, чим вища швидкість виробництва ентропії, тим нижчий ККД ТЕ обладнання в режимі генерування потужності. Перехідний режим, що має деяку додаткову просторову неоднорідність розподілу температури, природно призводить до додаткового виробництва ентропії  $B$  й, як наслідок, ККД повинен бути ще нижчим.

Але співвідношення (59), що зв'язує ККД і виробництво ентропії, виводиться для режиму, що встановився. Тому передбачити заздалегідь, яким буде ККД у перехідному, імпульсному або періодичному режимі, практично неможливо. У цілому, в статті розглядаються можливі переваги застосування ТЕ обладнання в перехідних режимах, особливо в періодичних режимах.

Показано, що  $S$  – режим у певні моменти часу демонструє більш глибоке охолодження порівняно з усталеним режимом.

Пропонований метод аналітичного розрахунку параметрів ТЕ обладнань у періодичних  $P$  – і  $S$  – режимах для режиму генерування потужності або режиму охолодження може бути узагальнений навіть на складніші режими синхронізації. Аналітичний розв'язок дає можливість застосувати метод оптимізації для знаходження оптимальних параметрів ТЕ обладнання.

ПОДЯКА. Автори висловлюють вдячність д.ф.-м.н. Л.М. Вихор, професорові С.З. Сапожникову й професорові І.В. Андріанову за цінні й конструктивні пропозиції в ході виконання цієї дослідницької роботи.

І.В. Безсуднову надано підтримку Урядом Російської Федерації (Грант 074-U01).



## Доповнення А

### Розв'язок рівняння теплопровідності в $P$ – режимі.

Тут ми приведемо розв'язок задачі про розподіл температури (1) з граничними умовами (2) в  $P$  – режимі (див. рис. 1) за допомогою стандартного методу поділу змінних.

Як і раніше в тексті статті, для віток термоелемента в проміжках часу від  $nP$  до  $(n+1)P/2$ , де  $P$  - період, а  $n=0,1,\dots$  нижній край є холодним, а верхній гарячим.

Будемо вважати, як і раніше  $l = 2a$ , і перепишемо рівняння теплопровідності (1), граничні умови (2), так само, як і заміну змінних, виконану в (7) у координатах  $x = -a \dots a$ .

Рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\rho}{c_v \rho_0} j^2, \quad (\text{A1})$$

і граничні умови

$$T|_{x=\pm a} = \bar{T} + T_0 \theta(t). \quad (\text{A2})$$

Проводячи заміну

$$T(x, t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{\kappa} (a^2 - x^2) + \tilde{T}(x, t), \quad (\text{A3})$$

одержимо

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}, \quad (\text{A4})$$

$$\tilde{T}(x, t)|_{x=\pm a} = T_0 \theta(t). \quad (\text{A5})$$

Подамо розв'язок рівняння (A1) з граничними умовами (A2) у формі

$$T(x, t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{\kappa} (a^2 - x^2) + \tilde{T}(x, t) = \bar{T} + \frac{\rho j^2}{\kappa} (a^2 - x^2) + T_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ S_n(x) \sin\left(\frac{2\pi}{P} nt\right) + C_n(x) \cos\left(\frac{2\pi}{P} nt\right) \right], \quad (\text{A6})$$

де

$$C_n(x) = \frac{1}{\Omega_n} [B_n \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin(\lambda_n x) - A_n \operatorname{sh}(\lambda_n x) \cos(\lambda_n x)], \quad (\text{A7})$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\Omega_n} [A_n \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin(\lambda_n x) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n x) \cos(\lambda_n x)], \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{n\pi}{\chi P}}$$

Коефіцієнти  $A_n$ ,  $B_n$  і  $\Omega_n$  мають вигляд

$$A_n = \operatorname{ch}(\lambda_n a) \sin(\lambda_n a), \quad B_n = \operatorname{sh}(\lambda_n a) \cos(\lambda_n a), \quad \Omega_n = A_n^2 + B_n^2, \quad (\text{A8})$$

а  $b_n$  – є коефіцієнтом розкладання  $\theta(t)$  в ряд Фур'є

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{P} nt\right), \quad b_n = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]. \quad (\text{A9})$$

На рис. А1 показано залежність температури  $T(x,t)$  уздовж вітки термопари, отриману як методом Грінберга [30] (TG), так і методом поділу змінних (TD), викладеним вище. (Параметри ТЕ обладнання відповідають наведеним у статті).

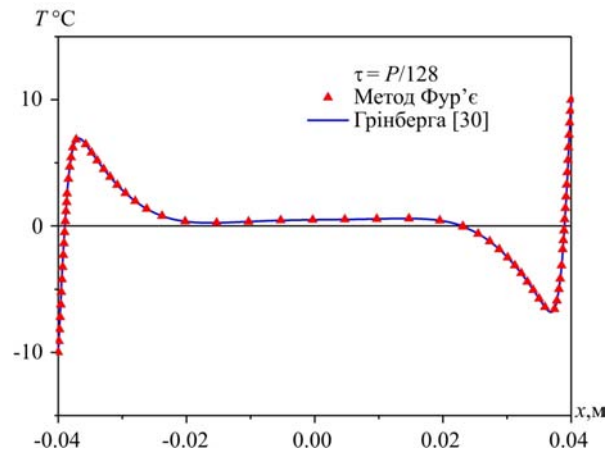


Рис. А1. Розподіл температури уздовж вітки термопари для моменту часу  $t = P / 128$ .

Як видно з рис. А1, розподіл температур  $T(x,t)$  отримано обома методами – методом поділу змінних і методом Грінберга [30] практично збігаються. Для розрахунків генераторного й холодильного режимів і для їхньої оптимізації необхідно обчислити потоки тепла, тобто, у тому числі похідні температури  $\partial T / \partial x$  на кінцях віток термоелемента  $x = \pm a$ . Для розв'язку, отриманого методом поділу змінних, розрахувати таку похідну неможливо, оскільки для  $x = \pm a$  формула (А9) дає розбіжний ряд, у той час як розв'язок (19), отриманий по [30] за  $x = \pm a$  сходиться й похідна може бути розрахована, див. (20)-(22).

На рис. А2 показано залежність  $T(x,t)$  температури для різних значень коефіцієнта теплопровідності. Коефіцієнти  $\lambda_n$  обернено пропорційно залежать від теплопровідності (і відповідно теплопроводності) тим самим, чим більше  $\lambda_n$ , тим глибше будуть проникати температурні зміни в вітку ТЕ обладнання.

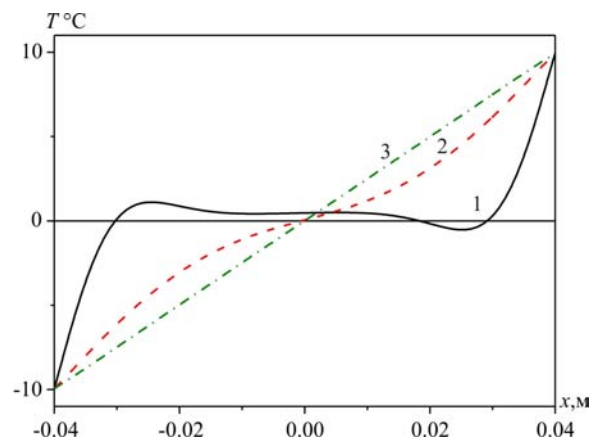


Рис. А2. Розподіл температури в момент часу  $P / 4$  уздовж вітки термоелемента за різних значень коефіцієнта теплопровідності 1-  $\chi = 1.214 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ , 2 -  $\chi = 12.14 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ , 3 -  $\chi = 4.183 \times 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ .

Відзначимо, що залежність 3 на рис. А2 наведено для значення температуропровідності, відповідного до значення  $\mu_0$  (27) рівному 1.53, тобто тому, яке знайдено в (56). Подальше збільшення температуропровідності не змінює вигляду залежності 3 на рис. А2. За такого значення температуропровідності тепло повністю доходить до середини віток термопари, і залежність  $T(x, P/4)$  стає незмінною.

На рис. А3 наведено залежності  $T(x, t)$  й  $\partial T / \partial x$  у різні моменти часу. Для розрахунків похідної було використано розв'язок за методом Грінберга [30].

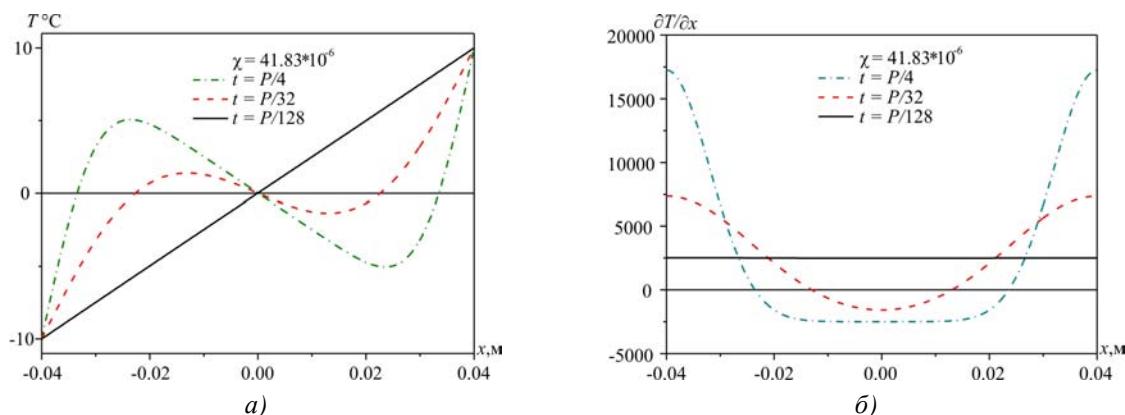


Рис. А3. Залежності температури  $T(x, t)$  (а) і градієнта температури  $\partial T / \partial x$  (б) у моменти часу  $P / 128, P / 32, P / 4$ , для  $\chi = 4.183 \times 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ .

Як видно з рис. А3, та частина теплового потоку, яка зобов'язана градієнту температури  $\partial T / \partial x$  ( $q_x = -\kappa \cdot \partial T / \partial x + \Pi j_x$ ) у середині віток термопари, поблизу  $x = 0$ , багато менша потоку на краях, де наявні більші теплові потоки, що входять у гарячий край і виходять в холодний. При цьому наскрізного потоку через вітки термопари у зв'язку з малістю  $\partial T / \partial x|_{x=0}$  практично немає.

## Література

1. Tritt T.M., Annual Review of Materials Research, **41**, 433 (2011).
2. Snyder G.J., and Eric S. Toberer, Nature Materials **7**, 105 (2008).
3. Nolas G.S., Poon J, and Kanatzidis M., Materials Research Society Bulletin, **31**, 199 (2006).
4. Alam H., Ramakrishna S., Nano Energy **2**, 190 (2013).
5. Nolas G.S., Sharp J., and Goldsmid J., Thermoelectrics. Basic Principles and New Materials Developments, Springer Series in Materials Science **45-VIII** (Springer-Verlag, Berlin, 2001), p.293.
6. Zheng X.F., Liu C.X., Yan Y.Y., and Wang Q., Renewable and Sustainable Energy Reviews **32**, 486 (2014).
7. New Materials for Thermoelectric Applications: Theory and Experiment, NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics, edited by V. Zlatić and A. Hewson (Springer, New York, 2013 ) p.273.
8. Properties and Applications of Thermoelectric Materials. The Search for New Materials for Thermoelectric Devices. Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Properties and Application of Thermoelectric Materials, Hvar, Croatia, 21-26 September 2008, edited by V.

- Zlatic and A. Hewson, NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics (Springer, New York, 2009), p.340.
9. Thermoelectric Nanomaterials Materials Design and Applications. Springer Series in Materials Science, **182-XIX**, edited by K. Koumoto, T. Mori, (Springer, New York, 2013), p.387.
  10. Weishu L., Xiao Y., Gang C., and Zhifeng R., Nano Energy **1**, 42 (2012).
  11. Bulat L.P., Drabkin I.A., Karatayev V.V., Osvenskii V.B., Parkhomenko Yu.N., Pshenay-Severin D.A., and Sorokin A.I., Journal of Electronic Materials, **43**, 2121 (2014).
  12. Bulat L.P., Osvenskii V.B., and Pshenai-Severin D.A., Physics of the Solid State, **55**, 2442 (2013).
  13. Фізика і техніка напівпровідників, / Снарський А.А., А.К. Сарычев, И.В. Безсуднов, [и др.] **46**, 659 (2012).
  14. Goldsmid H.J., Introduction to Thermoelectricity, Springer Series in Materials Science, **121**, (Springer, Berlin, 2009), p. 242.
  15. Zhou Q., Bian Z., and Shakouri A., J. Phys. D: Appl. Phys. **40**, 4376 (2007).
  16. Snyder G.J., Fleurial J.-P., Caillat T., Yang R., and Chen G., J. Appl. Phys., **92**, 1564, (2002).
  17. Dudarev Yu.I., Maksimov M.Z., Technical Physics, **43**, 737 (1998).
  18. Chakraborty A., Ng K.C., International Journal of Heat and Mass Transfer, **49**, 1845 (2006).
  19. Yanga R., Chena G., Kumarb F.R., Snyder G.J., and Fleurial J.-P., Energy Conversion and Management, **46**, 1407 (2005).
  20. Mao J.N., Chen H.X., Jia H., and Qian H.L., Journal of Applied Physics, **112**, 014514 (2012).
  21. Сильбанс Л.С., Журнал технической физики / Л.С. Сильбанс, Н.А. Федорович // **3**, 460 (1958).
  22. Parrott J.E., Solid State Electron. **1**, 135 (1960).
  23. Naer V.A., Journal of Engineering Physics, **8**, 340 (1965).
  24. Иорданишвили Е.К., Термоэлектрические источники питания / Е.К. Иорданишвили // (Советское радио, Москва, 1968), С.110
  25. Snyder G. J., Fleurial J. P., Caillat T., Yang R., and Chen G., J. Appl. Phys. **92**, 1564 (2002).
  26. Hoyos G. E., Rao K. R., and Jerger D., Energy Convers. **17**, 45 (1977).
  27. K. Landecker, A.W. Findlay, Solid State Electron. **3**, 239 (1961).
  28. Thonhauser T., Mahan G.D., Zikatanov L., and Roe J., Appl. Phys. Lett. **85**, 3247 (2004).
  29. Field R. L., Blum H. A., Energy Conversion, **19-3**, 159 (1979).
  30. Гринберг А.А., Избранные проблемы математической теории электрических и магнитных явлений / А.А. Гринберг // (Издательство АН СССР, Москва, 1948), стр. 727.
  31. Haberman R. Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1998) p 215.
  32. Zwillinger D., Handbook of Differential Equations (3rd edition), (Academic Press, Boston, 1997) p.828.
  33. Polyanin A. D., Zaitsev V. F.p, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations (2nd edition), (Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003), p.816.
  34. Thermoelectrics Handbook. Macro to Nano, edited by D.M.Rowe (CRC Press, 2005) p.1014

Надійшла до редакції 21.10.2014