

УДК 621.315.592

Гуцул І.В., Гуцул В.І.



Гуцул І.В.

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, вул. Коцюбинського, 2,
Чернівці, 58012 Україна



Гуцул В.І.

**ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО
РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ ТА
ТЕРМОЕЛЕКТРОРУШІЙНОЇ СИЛИ**

**АНІЗОТРОПНОГО ОПТИКОТЕРМОЕЛЕМЕНТА ПРИ ПАРАЛЕЛЬНИХ
НАПРЯМАХ ПРОМЕНЕВОГО ПОТОКУ І ГРАДІЄНТА ТЕМПЕРАТУРИ**

Наведено розв'язок неоднорідного нестационарного рівняння теплопровідності при паралельних напрямках градієнта температури і променевого потоку анізотропної пластини $ZnAs_2$ з урахуванням закону Бугера-Ламберта та проаналізовано залежність температурного розподілу від координат і часу. Отримано вирази поперечної термоелектрорушійної сили для випадків оптичного пропускання та поверхневого поглинання.

Ключові слова: анізотропне середовище, анізотропний оптикотермоелемент, термостат, променевий потік, градієнт температури, поперечна термоелектрорушійна сила.

The solution of the inhomogeneous unsteady-state thermal conductivity equation under parallel directions of temperature gradient and radiant flux of $ZnAs_2$ anisotropic plate with regard to the Bouguer-Lambert law is presented, and the dependence of temperature distribution on coordinates and time is analyzed. The expressions for the transverse thermopower are obtained for the cases of optical transmission and surface absorption.

Key words: anisotropic medium, anisotropic optical thermoelement, thermostat, radiant flux, temperature gradient, transverse thermopower.

Вступ

Перспективи використання анізотропних середовищ з різною величиною оптичної прозорості для реєстрації та перетворення високоінтенсивних променевих потоків спонукають до всебічного вивчення їх властивостей. Одним із методів генерування електрорушійної сили є метод поперечної термоелектрорушійної сили (термоЕРС). Незважаючи на те, що це явище досліджувалось ще Томсоном [1], минуло майже століття перш ніж Самойловичу із співробітниками вдалось реалізувати цю ідею у вигляді анізотропного термоелемента [2]. Відсутність традиційного спаю, наявність тільки однієї ланки, взаємна перпендикулярність теплового потоку та термоелектричного поля зумовили їх велику перспективність і призвели до появи нових поколінь різних приладів і пристроїв, які не мають відповідних вітчизняних і зарубіжних аналогів [3-6]. На сьогодні є джерела, енергію яких досить складно реєструвати і перетворювати існуючими методами. У нашій роботі для цього використовуються середовища з різною величиною оптичної прозорості. Такі середовища дають можливість перетворювати поглинуту частину променевої енергії за допомогою теплопірокалориметричних ефектів. Проведений аналіз показує, що для променевих потоків УФ-,

видимої та ІЧ-областей спектра реалізація цього методу особливо перспективна для випадку використання явища поперечної термоЕРС [1-5]. Це призвело до розробки анізотропних оптикотермоелементів (АОТ) [7]. Вибір конкретних АОТ і необхідних режимів роботи визначається умовами експлуатації і залежить як від параметрів використовуваних матеріалів, так і від взаємних напрямів поширення променевого і теплового потоків відносно вибраних кристалографічних орієнтацій матеріалу.

Нестационарний розподіл температури та термоЕРС АОТ

Розглянемо АОТ у вигляді прямокутної пластини розмірами a, b, c (рис. 1), виготовленої з матеріалу, коефіцієнти теплопровідності χ і термоЕРС α якого у лабораторній системі координат (XYZ) , повернутій на кут φ у площині $ХОУ$ відносно кристалографічної $(X'Y'Z')$, мають вигляд

$$\chi = \begin{vmatrix} \chi_{\parallel} \sin^2 \phi + \chi_{\perp} \cos^2 \phi & (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) \sin \phi \cos \phi & 0 \\ (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) \sin \phi \cos \phi & \chi_{\parallel} \cos^2 \phi + \chi_{\perp} \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\perp} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{\parallel} \sin^2 \phi + \alpha_{\perp} \cos^2 \phi & (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp}) \sin \phi \cos \phi & 0 \\ (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp}) \sin \phi \cos \phi & \alpha_{\parallel} \cos^2 \phi + \alpha_{\perp} \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp} \end{vmatrix},$$

де $\chi_{\parallel}, \chi_{\perp}$ і $\alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}$ – компоненти тензорів χ та α .

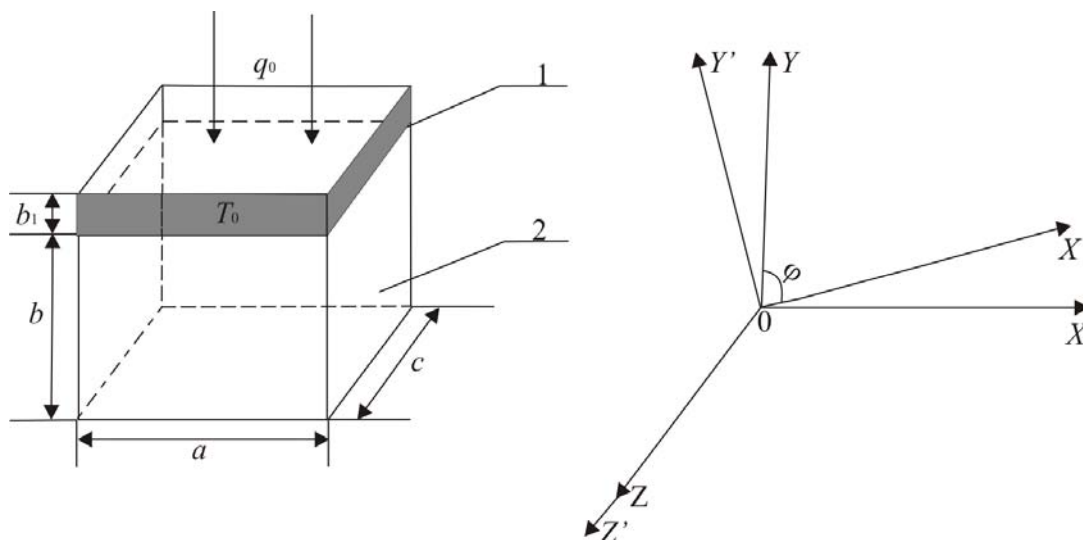


Рис.1. Схема АОТ: 1 – термостат, 2 – анізотропна пластинка. Справа – лабораторна система координат XYZ і орієнтація кристалографічних осей $X'Y'Z'$ пластинки 2.

На верхню грань термостата 1 товщиною b_1 , виготовленого із оптично прозорого в необхідному спектральному діапазоні довжин хвиль матеріалу з коефіцієнтом поглинання γ_1 , падає однорідний монохроматичний променевий потік густиною q_0 . Нижня грань термостата перебуває в теплооптичному контакті з верхньою гранню АОТ 2 за температури $T = T_0$. Бокові і нижні грані пластинки 2 адіабатично ізолювані. При цьому не враховуються крайові ефекти ($a = c \gg b$) [8]. Рівномірний монохроматичний променевий потік густиною q_0 і довжиною хвилі λ_0 , пройшовши

через таку пластину, викликає в ній появу градієнта температури і однозначно зв'язаної з ним поперечної термоЕРС.

За наявності внутрішніх джерел тепла нестационарний розподіл температури в АОТ можна знайти з основного закону теплопровідності [9]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{d C_0} \sum_{i,k=1}^3 \chi_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{q_v}{d C_0}, \quad (2)$$

де d – густина матеріалу АОТ, C_0 – питома теплоємність, χ_{ik} – відповідні компоненти тензора теплопровідності, які визначаємо із другого співвідношення системи (1), q_v – кількість тепла, що виділяється внутрішніми джерелами в одиниці об'єму за одиницю часу і визначається законом Бугера-Ламберта.

Для нестационарного розподілу температури в наближенні

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \chi_{12} < \chi_{22}$$

рівняння теплопровідності (2) має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = R^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + P e^{-\gamma(b-y)}, \quad (3)$$

де $R^2 = \frac{\chi_{22}}{C_0 d}$, $P = \frac{q_0 \gamma}{C_0 d} \exp[-\gamma_1 b_1]$, γ – коефіцієнт поглинання матеріалу АОТ.

Розв'язок неоднорідного рівняння (3) за крайових і початкової умов

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad T|_{y=b} = T_0; \quad T|_{t=0} = T_0 \quad (4)$$

будемо шукати у вигляді

$$T(y, t) = T_0 + V(y, t). \quad (5)$$

Підставляючи (5) в (3), отримаємо задачу теплопровідності

$$\frac{\partial V}{\partial t} = R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + P e^{-\gamma(b-y)} \quad (6)$$

для функції $V(y, t)$ за однорідними крайовими і початковою умовами

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad V|_{y=b} = 0; \quad V|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6) знайдемо у вигляді суми загального розв'язку однорідного і часткового розв'язку неоднорідного рівнянь (6), тобто

$$V(y, t) = V_{одн}(y, t) + V_{неодн}(y, t). \quad (8)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (6) за нульовими крайовими умовами (7) призводить до задачі Штурма-Ліувіля, власною функцією якої є функція $\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right]$, що

відповідає власним значенням $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$, де $n = 0, 1, 2, \dots$. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (6) шукаємо у вигляді розкладу в ряд Фур'є за власними функціями $\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right]$ однорідної задачі:

$$V(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right]. \quad (9)$$

Підставляючи (9) та розклад неоднорідності рівняння теплопровідності (6) у ряд Фур'є за власними функціями однорідної задачі, одержимо рівняння для знаходження $\Phi_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Phi_n'(t) + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2b} R \right]^2 \Phi_n(t) - \varphi_n \right\} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right] = 0, \quad (10)$$

де $\varphi_n = \frac{2}{b} \int_0^b P e^{-\gamma(b-y)} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right] dy$. Отриману рівність можна розглядати як розклад нуль-функції в ряд Фур'є за власними функціями $\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right]$. Підставляючи $\Phi_n(t)$ у рівняння (9), одержимо розв'язок задачі теплопровідності (6)-(7) у такому вигляді:

$$V(y,t) = \int_0^t d\tau \int_0^b \left[\frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left[\frac{(2n+1)}{2b}R\right]^2(t-\tau)\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}\xi\right] P e^{-\gamma(b-\xi)} \right] d\xi. \quad (11)$$

Введемо функцію впливу миттєвого точкового джерела тепла

$$G(y,\xi,t-\tau) = \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left[\frac{(2n+1)}{2b}R\right]^2(t-\tau)\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}y\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}\xi\right]. \quad (12)$$

Тоді розв'язок (11) набуде вигляду

$$V(y,t) = \int_0^t d\tau \int_0^b G(y,\xi,t-\tau) P e^{-\gamma(b-\xi)} d\xi. \quad (13)$$

Підставивши (13) у (5), одержимо після інтегрування кінцевий вираз для нестационарного розподілу температури:

$$T(y,t) = T_0 + \frac{2q_0\gamma}{b\chi_{22}} \exp[-\gamma_1 b_1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n \frac{(2n+1)\pi}{2b} - \gamma e^{-\gamma b} \right]}{\left[\gamma^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right)^2 \right] \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right)^2} \times \left[1 - \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 \pi^2}{4} \frac{\chi_{22}}{C_0 d b^2} t \right) \right] \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} y \right). \quad (14)$$

Із співвідношення (14) видно, що нестационарний розподіл температури АОТ залежить від коефіцієнтів поглинання матеріалів термостата і термоелемента та анізотропії коефіцієнта теплопровідності. Крім цього температурний розподіл залежить від геометричних розмірів термоелемента і термостата та має складну нелінійну залежність від координати y та часу t .

На рис. 2 наведено графік розподілу температурного поля $\Delta T(y,t) = T(y,t) - T_0$ для АОТ, виготовленого із $ZnAs_2$, у випадку оптичного пропускання ($\gamma b \ll 1$), а на рис. 3 – у випадку

поверхневого поглинання ($\gamma b \gg 1$).

Компоненти напруженості термоелектричного поля E_i^T визначаються таким співвідношенням:

$$E_i^T = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (i=1, 2, 3). \quad (15)$$

Підставивши (14) в (15), одержимо

$$E_x^T = -\frac{2q_0 \gamma \alpha_{12}}{b \chi_{22}} \exp[-\gamma_1 b_1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n \frac{(2n+1)\pi}{2b} - \gamma e^{-\gamma b} \right]}{\left[\gamma^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right)^2 \right]} \frac{(2n+1)\pi}{2b} \times \left[1 - \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 \pi^2}{4} \frac{\chi_{22}}{C_0 d b^2} t \right) \right] \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} y \right). \quad (16)$$

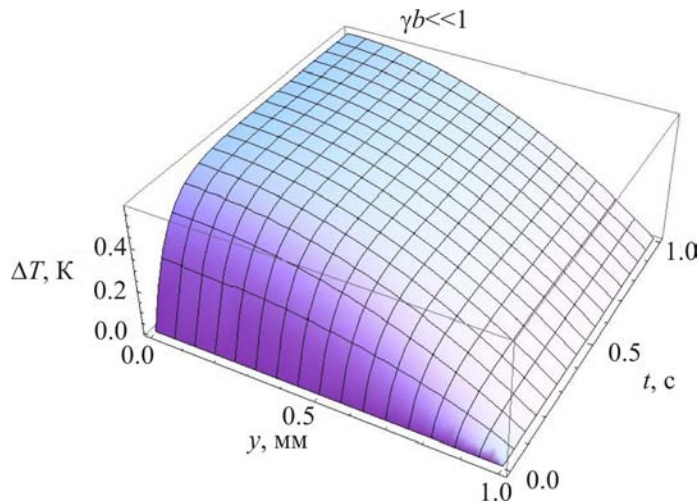


Рис.2. Розподіл температурного поля АОТ із ZnAs₂ у випадку оптичного пропускання.

Згідно з [10], поперечна термоЕРС ε_x визначається таким співвідношенням:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{bc} \int_0^b dy \int_0^c dz \int_0^a E_x^T dx. \quad (17)$$

Підставляючи (16) у (17), одержимо після інтегрування вираз для поперечної термоелектрорушійної сили ε_x розглядуваного АОТ у вигляді

$$\varepsilon_x(t) = -\frac{2q_0 \gamma a \alpha_{12}}{\chi_{22}} \exp[-\gamma_1 b_1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n \frac{(2n+1)\pi}{2b} - \gamma e^{-\gamma b} \right]}{\left[\gamma^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right)^2 \right]} \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right)^2 \times \left[1 - \exp\left(\frac{-(2n+1)^2 \pi^2}{4} \frac{\chi_{22}}{C_0 d b^2} t \right) \right]. \quad (18)$$

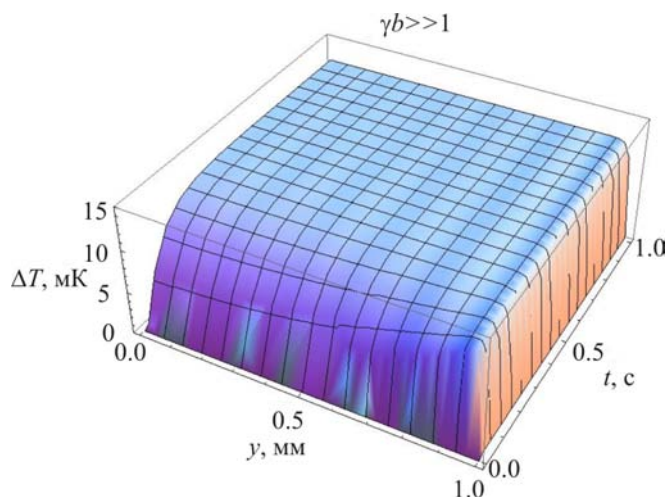


Рис.3. Розподіл температурного поля АОТ із ZnAs₂ у випадку поверхневого поглинання.

На рис. 4 і 5 наведено графіки залежності поперечної термоЕРС ε_x від висоти b АОТ та часу t для випадків оптичного пропускання ($\gamma b \ll 1$) та поверхневого поглинання ($\gamma b \gg 1$) відповідно.

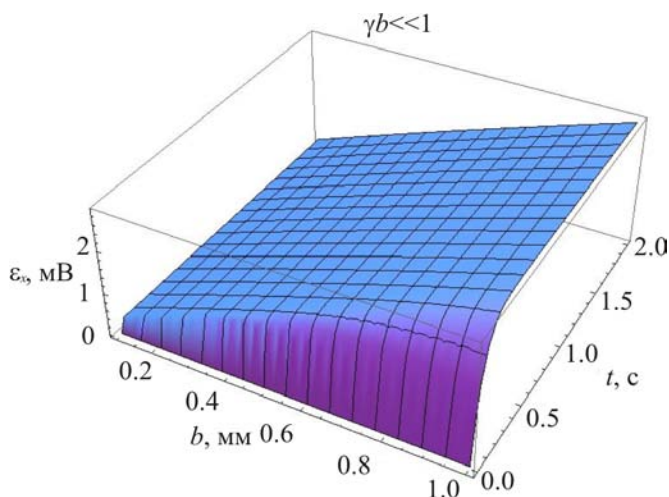


Рис.4. Залежність поперечної термоЕРС ε_x АОТ із ZnAs₂ у випадку оптичного пропускання від часу t і висоти b термоелемента при термостатуванні верхньої робочої грані.

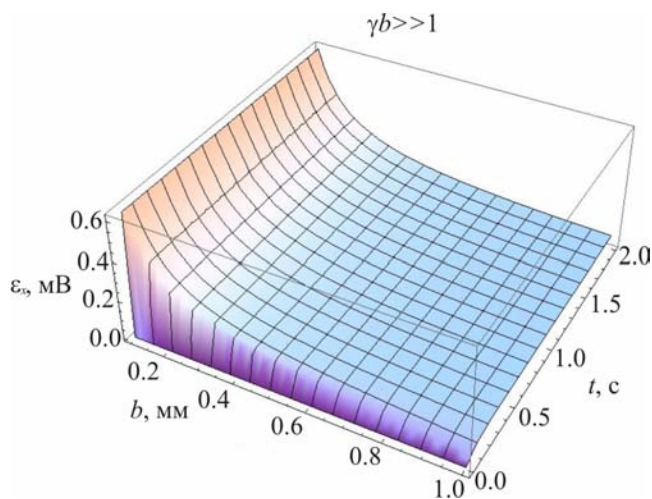


Рис.5. Залежність поперечної термоЕРС ε_x АОТ із ZnAs₂ у випадку поверхневого поглинання від часу t і висоти b термоелемента при термостатуванні верхньої робочої грані.

Встановлено, що з ростом часу t як у випадках оптичного пропускання, так і поверхневого поглинання, поперечна термоЕРС зростає і за певного значення t досягає постійної величини. З графіків видно, що з ростом висоти АОТ поперечна термоЕРС має складну нелінійну залежність у початкові моменти часу як для оптичного пропускання, так і поверхневого поглинання. У більш пізні моменти часу складна нелінійна залежність від висоти залишається для поверхневого поглинання, а для оптичного пропускання спостерігається квазілінійна залежність поперечної термоЕРС від висоти b АОТ.

Висновки

Досліджено вирази поперечної термоЕРС АОТ із $ZnAs_2$ за умови термостатування верхньої робочої грані для випадків оптичного пропускання та поверхневого поглинання. Розглянуті АОТ дають можливість реєструвати та контролювати променеві потоки в широкому спектральному діапазоні.

Література

1. Tomson W. On thermoelectric currents in linear conduction crystalline substance // *Math. Phys. Pap.* – 1882. – N. 1. – P. 266-273.
2. А. с. 230915 СССР. Термоэлемент / Пилат И.М., Самойлович А.Г., Анатычук Л.И. – Опубл. в Б. И., 1970, №3.
3. Анатычук Л.И. Термоэлементы и термоэлектрические устройства. / Л.И. Анатычук // – К.: Наукова думка, 1979. – 767 с.
4. Анатычук Л.И. Вихревые термоэлектрические токи и вихревые термоэлементы / Л.И. Анатычук, О.Я. Лусте // *ФТП.* – 1976. – Т.10. – №5. – С. 817-831.
5. Снарский А.А. Анизотропные термоэлементы (Обзор) /А.А. Снарський, А.М. Пальти, А.А. Ащеулов // *ФТП.* – 1997. – Т.31. – №11. – С. 1281-1298.
6. Ashcheulov A.A., Rarenko I.M., Voronka N.K. Optimized materials based on cadmium antimonide and their application // *J. of Thermoelectricity.* – 1995. – N. 3. – P. 73-88.
7. Ashcheulov A.A., Gutsul I.V. Anisotropic optical thermoelectric elements // *J. of Thermoelectricity.* – 1997. – N. 3. – P. 81-89.
8. Слипченко В.Н., Снарский А.А. Влияние анизотропии теплопроводности на поперечную термоЭДС / В.Н. Слипченко, А.А. Снарський // *ФТП.* – 1974. – Т.8. – №10. – С. 2010-2012.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. / А.В. Лыков // – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
10. Снарский А.А. ЭДС термоэлементов, использующих анизотропию термоЭДС. I. Анизотропные термоэлементы прямоугольной формы / А.А. Снарський // *ФТП.* – 1977. – Т.11. – №10. – С. 2053-2055.

Надійшла до редакції 02.12.2014