

Д. т. н. В. А. ПОНОМАРЕВ, к. т. н. О. В. ПОНОМАРЕВА

Россия, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

E-mail: ponva@mail.ru

## ИНВАРИАНТНОСТЬ ТЕКУЩЕГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ФУРЬЕ-СПЕКТРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

*Рассмотрены вопросы измерения Фурье-спектров сигналов в базе дискретных экспоненциальных функций. Предложены методы и алгоритмы скользящих измерений энергетических Фурье-спектров сигналов на конечных интервалах. Исследована инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра сдвигу дискретных действительных сигналов, не являющихся периодическими. Приведены теоретические и практические результаты анализа инвариантности текущих энергетических Фурье-спектров тональных компонент.*

*Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, скользящие спектральные измерения, инвариантность текущих энергетических Фурье-спектров, тональные компоненты.*

В настоящее время круг приложений цифрового Фурье-анализа дискретных сигналов на конечных интервалах постоянно расширяется. Это объясняется, с одной стороны, преимуществами цифровой обработки сигналов, среди которых гарантированная точность, идеальная воспроизводимость результатов, высокая производительность и экономичность, с другой стороны — проведением интенсивных исследований в данной области по созданию и разработке новых методов.

Во многих приложениях цифровой обработке подвергаются сигналы, энергетический Фурье-спектр (ЭФС) которых изменяется во времени [1]. Например, с измерениями их ЭФС приходится иметь дело в таких предметных областях, как радиолокация, виброакустическая диагностика, распознавание и синтез речи, пассивная гидролокация, биомедицина [1–4]. Способ, позволяющий проводить такие измерения и называемый скользящим спектральным измерением, заключается в измерении текущего (скользящего) ЭФС сигнала во временном окне в  $N$  отсчетов, при этом перед повторным спектральным измерением временное окно смещается на один отсчет. Такой спектр носит название текущего (скользящего) ЭФС (ТЭФС).

Заметим, что широкое применение дискретного преобразования Фурье для анализа случайных сигналов на конечных интервалах во многом объясняется тем, что ТЭФС периодического сигнала, содержащего  $N$  отсчетов (далее —  $N$ -периодический сигнал), инвариантен временному сдвигу исходного сигнала [5, 6]. Однако обычно на практике исследуемый сигнал не является периодическим, поскольку,

как правило, период сигнала априори не известен, поэтому нельзя выбрать конечный интервал анализа равным периоду исходного сигнала. Очевидно, что потеря инвариантности ТЭФС неизбежно приведет к ошибкам методического характера при решении задач обнаружения гармонических компонент и измерения их параметров. При этом, как показывает практика, некоторые процессы и эффекты, возникающие в приложениях цифрового спектрального анализа, к сожалению, ускользают от внимания исследователей: в известной авторам литературе рассмотрение вопроса инвариантности ТЭФС временному сдвигу сигнала, не являющегося  $N$ -периодическим, отсутствует. В настоящей работе стояла задача восполнения этого пробела в теории спектрального анализа путем исследования инвариантности ТЭФС действительных дискретных непериодических сигналов на конечных интервалах.

### Измерение Фурье-спектров сигналов на конечных интервалах в базе дискретных экспоненциальных функций

В основе теории спектрального анализа дискретных сигналов в любом конечном базисе лежит три взаимосвязанных задачи [1–3]:

- представление сигнала на конечном множестве  $N$  точек;
- определение сдвига сигнала как некоторой операции по перестановке его отсчетов внутри конечного интервала;
- определение системы дискретных базисных функций.

Измерение Фурье-спектра сигнала на конечных интервалах в базе дискретных экспоненциальных функций основано на дискрет-

ном преобразовании Фурье (ДПФ), которое в обычной форме задается следующим соотношением [1, с. 395]:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad (1)$$

где  $W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ .

Существует и обратное преобразование Фурье (ОДПФ):

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn}. \quad (2)$$

Следует отметить, что в рамках ДПФ решены все вышеперечисленные задачи теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах:

- сигнал  $x(n)$  задается на конечном интервале  $\overline{0, N-1}$ ;
- сдвиг сигнала  $x(n)$  определяется как циклическая перестановка его отсчетов внутри интервала;
- в качестве базисной определена система дискретных экспоненциальных функций  $\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)$ ;  $k, n = \overline{0, N-1}$ .

В рамках аппарата ДПФ вводятся понятия энергетического спектра  $G_N(k)$  и спектра мощности  $P_N(k)$  [1]:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N |S_N(k)|^2; \quad (3)$$

$$P_N(k) = |S_N(k)|^2, \quad (4)$$

где  $\Delta f = 1/N$ .

При этом переход от нормированной величины  $\Delta f$  к «истинной»  $\Delta f_{\text{ист}}$  осуществляется согласно выражению  $\Delta f_{\text{ист}} = \Delta f \cdot F_S$ , где  $F_S$  – частота дискретизации сигнала  $x(n)$ .

В практике применения аппарата ДПФ необходимо учитывать следующее:

- свойства ДПФ являются точными, а не приближенными, основанными на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов;
- ДПФ и ОДПФ «навязывают» циклический сдвиг последовательностям во временной и частотной областях соответственно;
- ДПФ наряду с достоинствами имеет и ряд недостатков, связанных с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его практическое применение.

Отметим два из указанных недостатков ДПФ.

1. Коэффициенты ДПФ  $S_N(k)$  последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , равны значениям ее дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ) [1, 2] на единичной окружности. Однако ДПФ не дает ответа на вопрос, каковы значения ДВПФ этой последовательности между

точками, порождая тем самым известный «эффект частотокола».

2. Применению ДПФ сопутствует также «эффект размывания спектральных составляющих» (часто называемый «эффектом утечки»): при выполнении спектрального анализа исследуемой функции измеряется циклическая свертка спектра исследуемой функции с функцией вида  $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$ , которая не локализована, а размыта по частоте.

### Методы и алгоритмы скользящих измерений Фурье-спектров сигналов на конечных интервалах в базисе дискретных экспоненциальных функций

Одним из методов реализации скользящих спектральных измерений на  $k$ -й частоте является использование одной секции (для нескольких частот – нескольких секций) обобщенного комплексного фильтра на основе частотной выборки (ФОЧВ). В основе ФОЧВ лежит возможность реализации КИХ-фильтра с  $N$  ответвлениями в виде последовательного соединения гребенчатого фильтра и банка из  $N$  комплексных резонаторов, схема одной секции которого приведена на рис. 1 [1, 3]. Структура, изображенная на этом рисунке, позволяет эффективно осуществлять скользящие спектральные измерения на фиксированном множестве частот  $\{2\pi k/N\}$ , где  $k = \overline{0, N-1}$ ,  $N$  – число отсчетов задержки входной последовательности  $x(n)$  в гребенчатом фильтре.

Другим методом проведения скользящих спектральных измерений является вычисление  $k$ -го бина ДПФ (1) в скользящем окне длительностью в  $N$  отсчетов:

$$S_N^{(r)}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+m) W_N^{kn}, \quad (4)$$

где  $k = \overline{0, N-1}$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$  – число отсчетов, на которое окно в  $N$  отсчетов сдвигается вправо по сигналу  $x(n)$ .

Необходимо отметить, что проведение скользящих измерений методом фильтрации на основе частотной выборки более эффективно, чем методом ДПФ. Это связано с тем, что структура

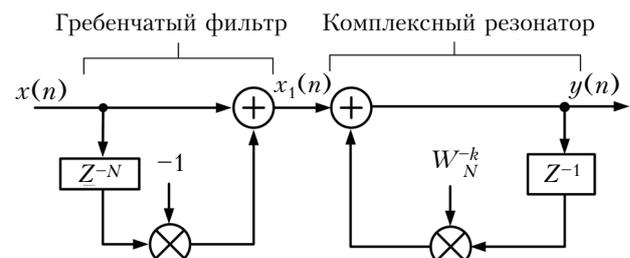


Рис. 1. Структурная схема фильтра на основе частотной выборки

ФОЧВ, в отличие от ДПФ, дает возможность использовать метод рекуррентного расчета значений спектра на выходе комплексного резонатора. Действительно, из анализа структуры секции ФОЧВ (рис. 1) следует, что в этом случае для выполнения скользящего спектрального измерения на  $k$ -й частоте необходимо (после выхода на режим скользящего измерения) выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет (при выполнении ДПФ необходимо, соответственно, выполнить  $N$  комплексных умножений).

В [3] рассмотрен алгоритм однобинового скользящего ДПФ (СДПФ), который позволяет рекуррентно вычислять значение  $k$ -го бина  $N$ -точечного ДПФ в скользящем окне длиной  $N$  отсчетов. Этот алгоритм более эффективен (с точки зрения вычислений), чем алгоритм ДПФ, и позволяет проводить спектральные измерения с частотой прихода отсчетов входного сигнала.

Следует отметить, что общим недостатком всех рассмотренных методов скользящих спектральных измерений является фиксированность множества значений частот, на которых можно осуществлять эти измерения [5].

Рассмотрим вопрос инвариантности ТЭФС временному сдвигу входного сигнала для двух видов его продолжения: «естественного» (реального) и «искусственного», «навязанного» ДПФ.

#### Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра дискретных действительных сигналов

Широкое применение преобразования Фурье к анализу стационарных процессов и систем главным образом основано на фундаментальном свойстве, отмеченном Н. Винером, — свойстве инвариантности экспоненциального базиса к циклическому сдвигу [1–3].

Введем символическое обозначение для ДПФ и ОДПФ циклической ( $N$ -периодической) последовательности  $x(n)$ ,  $n = 0, N-1$ :

$$x(n) \xrightarrow{F} S_N(k). \quad (6)$$

Тогда теорему сдвига для ДПФ можно записать в следующем виде:

$$\text{если } x(n) \xrightarrow{F} S_N(k), \\ \text{то } x(n+m) \xrightarrow{F} W_N^{-km} S_N(k), \quad (7)$$

где  $m = \overline{1, 2, 3, \dots}$ ;  $W_N^{-k} = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} k\right)$  — сдвиг временного окна.

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность энергетического спектра (3)  $N$ -периодической последовательности  $x(n \pm pN) = x(n)$ , где  $p = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n = \overline{0, N-1}$ , ее сдвигу (например, при «искусственном» продолжении сигнала, «навязанном» ДПФ) [6].

Разностное уравнение СДПФ скользящего измерения на  $k$ -й частоте Фурье-спектра действительного дискретного сигнала  $x(n)$  при естественном его продолжении и сдвиге временного окна на  $m$  отсчетов, запишем в следующем виде [3, с. 527]:

$$S_m(k) = W_N^{-k} S_{(m-1)}^\circ(k), \quad (8)$$

где  $N$  — число отсчетов во временном окне (длина окна);

$$S_{(m-1)}^\circ(k) = S_{(m-1)}(k) - x_{(m-1)} + x_{(m-1+N)};$$

$S_0(k) = S_{(m-1)}(k)|_{m=1}$  — значение на  $k$ -й частоте коэффициента ДПФ при выходе алгоритма на режим скользящего измерения.

Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, запишем  $S_{m-1}(k)$ ,  $S_{m-1}^\circ(k)$  в следующем виде:

$$S_{m-1}(k) = |S_{m-1}(k)| \cdot [\cos\varphi_{m-1} + j \cdot \sin\varphi_{m-1}];$$

$$S_{m-1}^\circ(k) = |S_{m-1}^\circ(k)| \cdot [\cos\varphi_{m-1}^\circ + j \cdot \sin\varphi_{m-1}^\circ],$$

где  $|S_{m-1}(k)| = \{[\operatorname{Re}[S_{m-1}(k)]]^2 + \{\operatorname{Im}[S_{m-1}(k)]\}^2\}^{0,5}$ ;

$$|S_{m-1}^\circ(k)| = \{[\operatorname{Re}[S_{m-1}(k) - x_{(m-1)} + x_{(m-1+N)}]]^2 + \{\operatorname{Im}[S_{m-1}(k)]\}^2\}^{0,5};$$

$$\cos\varphi_{m-1} = \frac{\operatorname{Re}[S_{m-1}(k)]}{|S_{m-1}(k)|}, \quad \sin\varphi_{m-1} = \frac{\operatorname{Im}[S_{m-1}(k)]}{|S_{m-1}(k)|},$$

$$\cos\varphi_{m-1}^\circ = \frac{\operatorname{Re}[S_{m-1}(k) - x_{(m-1)} + x_{(m-1+N)}]}{|S_{m-1}^\circ(k)|},$$

$$\sin\varphi_{m-1}^\circ = \frac{\operatorname{Im}[S_{m-1}(k)]}{|S_{m-1}^\circ(k)|}.$$

Учитывая, что

$$W_N^{-k} = \cos\beta_k + j \cdot \sin\beta_k; \quad \beta_k = \frac{2\pi}{N} k; \quad |W_N^{-k}| = 1;$$

$$|(a+jb)(c+jd)| = |(a+jb)| \cdot |(c+jd)|;$$

$$S_m(k) = |S_m(k)| \cdot [\cos(\varphi_{m-1}^\circ + \beta_k) + j \cdot \sin(\varphi_{m-1}^\circ + \beta_k)];$$

$$|S_{m-1}^\circ(k)| = |S_m(k)|,$$

представим разностное уравнение (8) в следующей форме:

$$S_m(k) = |S_m(k)| \cdot [\cos(\varphi_{m-1} + \beta_k) + j \cdot \sin(\varphi_{m-1} + \beta_k)], \quad (9)$$

$$\text{где } \varphi_{m-1}^\circ = \arccos \frac{\operatorname{Re}[S_{m-1}^\circ(k)]}{|S_{m-1}^\circ(k)|}.$$

Из этого соотношения непосредственно следует, что значение ТЭФС действительного сигнала на  $k$ -й частоте равно

$$G_m(k) = N \cdot |S_{m-1}^\circ(k)|^2 = N \cdot [\operatorname{Re}(S_{m-1}(k) - x_{(m-1)} + x_{(m-1+N)})]^2 + [\operatorname{Im} S_{m-1}(k)]^2. \quad (10)$$

Таким образом, ТЭФС сигнала на  $k$ -й частоте будет инвариантен временному сдвигу сиг-

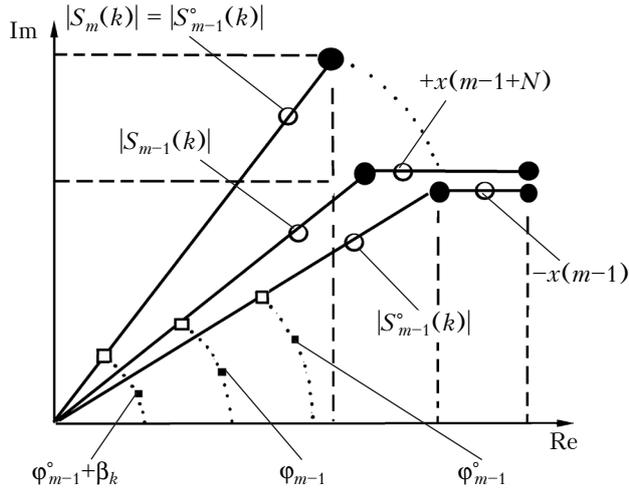


Рис. 2. Рекуррентное измерение  $m$ -го значения текущего Фурье-спектра действительного сигнала на  $k$ -й частоте

нала, когда в выражении (10) сумма  $-x(m-1) + x(m-1+N)$  будет равна нулю. Частный случай, когда это будет иметь место на практике, рассмотрен выше (соотношение (7)). В общем же случае ТЭФС действительного сигнала  $x(n)$  не будет инвариантен временному сдвигу «естественного» («реального») продолжения сигнала. Назовем данный эффект (по примеру уже существующих, некоторые из которых рассмотрены выше) «эффектом неинвариантности».

На рис. 2 приведена графическая интерпретация измерения текущего энергетического Фурье-спектра дискретного действительного сигнала.

### Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра действительных тональных компонент и их суммы

Рассмотрим инвариантность ТЭФС действительных гармонических компонент вида

$$x(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n\right], \quad (11)$$

где  $0 \leq q < 1$ ,  $k = \overline{1, N/2}$ .

Нетрудно видеть, что если параметр  $q$ , характеризующий «несогласованность» периода гармонической компоненты с интервалом анализа  $N$ , равен нулю, то действительный тональный сигнал «укладывается» на интервале анализа целое число раз и его ТЭФС инвариантен временному сдвигу исходного сигнала. То есть в этом случае естественное продолжение сигнала во временном окне будет совпадать с циклическим (периодическим) продолжением сигнала, которое «навязывается» ДПФ [1, 7–9].

Выше было показано, что для инвариантности ТЭФС произвольного входного сигнала  $x(n)$  на  $k$ -й частоте его временному сдвигу достаточно равенства нулю выражения

$$c(m) = x(m-1+N) - x(m-1).$$

Для нашего частного случая введем функцию двух переменных  $c(m, q)$ , аналогичную функции  $c(m)$ :

$$c(m, q) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1+N)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right]. \quad (12)$$

Применив тригонометрическое тождество разности косинусов, преобразуем это выражение к виду

$$c(m, q) = -2 \sin \pi q \times \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) + \pi q\right]. \quad (13)$$

Таким образом, функция  $c(m, q)$ , характеризующая инвариантность ТЭФС сигнала  $x(n)$  (11) на  $k$ -й частоте, при каждом конкретном значении параметра  $q$  представляет собой гармоническое колебание с амплитудой  $2\sin \pi q$ , фазой  $\pi q$  и частотой  $k+q$ . При этом инвариантность ТЭФС сигнала  $x(n)$  (11) имеет место, как и следовало ожидать, только при значении параметра  $q=0$ .

На рис. 3 показано изменение функции  $c(m, q)$  при фиксированных значениях частоты  $k$

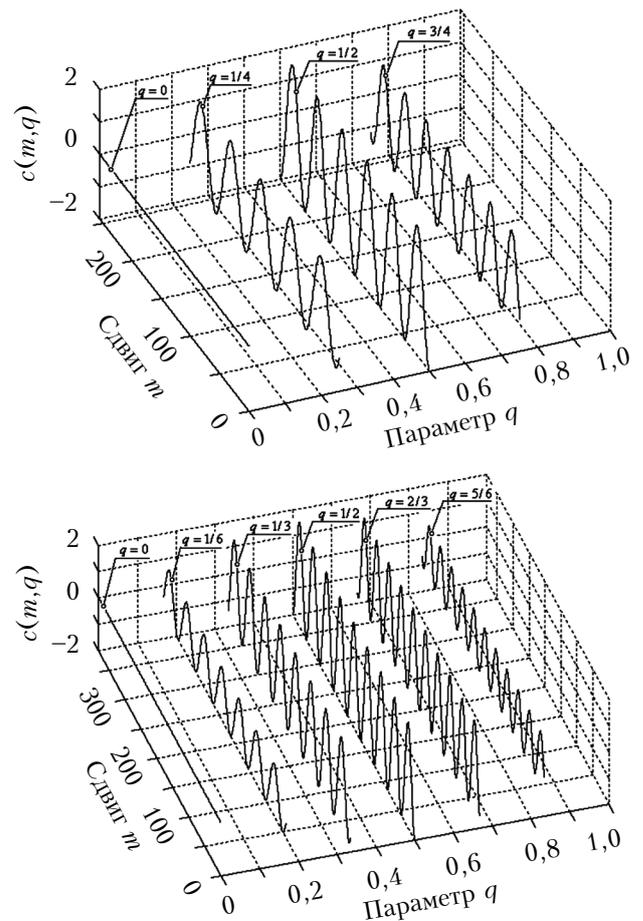


Рис. 3. Изменение амплитуды функции  $c(m, q)$  в зависимости от сдвига  $m$  при различных значениях параметра  $q$  при  $k=1$  и  $N=64$

и длительности окна в  $N$  отсчетов. Как мы видим, гармоническая компонента функции  $c(m, q)$  при значении параметра  $q=1/2$  имеет максимальную амплитуду, равную двум. Очевидно, что при изменении частоты гармонического сигнала (11) амплитуды гармонических компонент функции  $c(m, q)$  зависят исключительно от значения параметра  $q$  и не зависят ни от  $N$ , ни от  $k$ .

Рассмотрим характеристики гармонических компонент функции  $c(m, q)$ .

Если представить у действительной гармонической компоненты  $x(n)$  (11) значение параметра  $q$  в виде дроби  $q=1/p$ , где  $p$  — целое число, то интервал  $N_1 = Np$  будет являться периодом для функции  $x_1(n)$  при реальном продолжении  $x(n)$ . Следовательно, при любых  $q$  и  $k$  среднее значение гармонических компонент функции  $c(m, q)$  на интервале  $N_1$  будет равно нулю:

$$M = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) = 0,$$

а дисперсия

$$D(q) = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1^2(n)$$

будет зависеть от  $q$  и не будет зависеть от  $k$ .

На рис. 4 приведен график изменения дисперсии функции  $c(m, q)$  в зависимости от  $q$ , откуда видно, что она имеет максимальное значение при  $q = 1/2$ .

Для более полного понимания вопроса инвариантности ТЭФС сигнала  $x(n)$ , представляющего собой сумму действительных гармонических компонент вида (11), рассмотрим взаимосвязь ДПФ сигнала, заданного на конечном интервале, с дискретно-временным преобразованием Фурье и с операцией дополнения нулями.

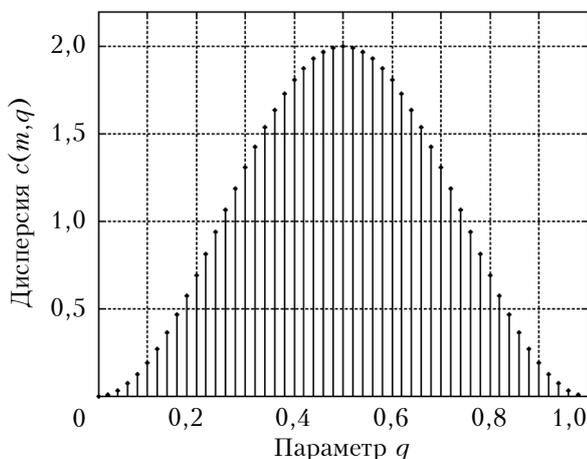


Рис. 4. Изменение дисперсии функции  $c(m, q)$  в зависимости от параметра  $q$

Известно, что ДВПФ представляет собой  $z$ -преобразование сигнала  $x(n)$  (1), вычисленное на единичной окружности [1, с. 41; 2, с. 151]:

$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(-j \cdot 2\pi f)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \times \exp(-2\pi f n), \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

В то же время, коэффициенты ДПФ  $S_N(k)$  последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , в соответствии с (1) равны значениям ее  $z$ -преобразования в точках  $\{2\pi k/N\}$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ , равномерно расположенных на единичной окружности (рис. 5).

Таким образом, ДПФ равно ДВПФ в точках  $\{2\pi k/N\}$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ . Следовательно, ТЭФС некоторого сигнала, полученный методом ДПФ, будет инвариантен временному сдвигу тогда и только тогда, когда модуль ДВПФ этого сигнала в указанных точках не будет зависеть от временного сдвига сигнала.

С помощью операции дополнения нулями можно вычислить значения ДВПФ между точками  $\{2\pi k/N\}$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ , на единичной окружности, уменьшив тем самым влияние «эффекта частоты». Суть этой операции заключается в получении сигнала  $x_1(n)$  путем дополнения исходного сигнала  $x(n)$  нулевыми отсчетами до длины  $M=pN$ , где  $p$  — целое число (обычно  $M$  является целой степенью двух), и последующим вычислением ДПФ сигнала  $x_1(n)$ . В результате получаем не только значения ДПФ, равные значениям ДВПФ в точках  $\{2\pi k/N\}$ , но и интерполированные значения ДВПФ между этими точками (см. рис. 5). В предельном случае при бесконечном числе вводимых нулевых отсчетов ДПФ сигнала  $x_1(n)$  может рассматриваться как ДВПФ сигнала  $x(n)$ .

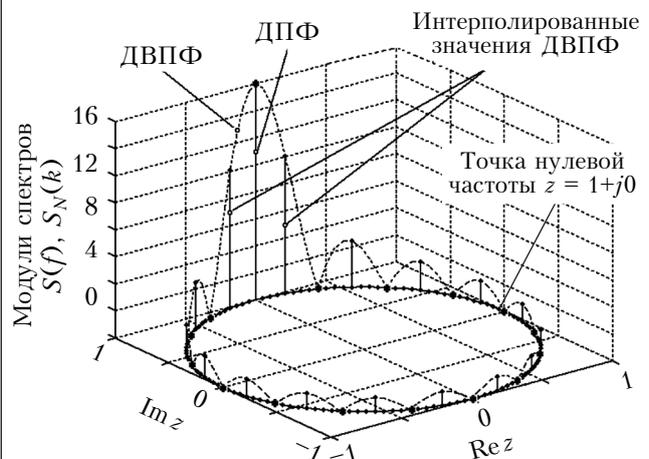


Рис. 5. Расположение значений  $z$ -преобразования сигнала на единичной окружности, его ДВПФ, ДПФ, а также интерполированные значения ДВПФ при  $M=32$

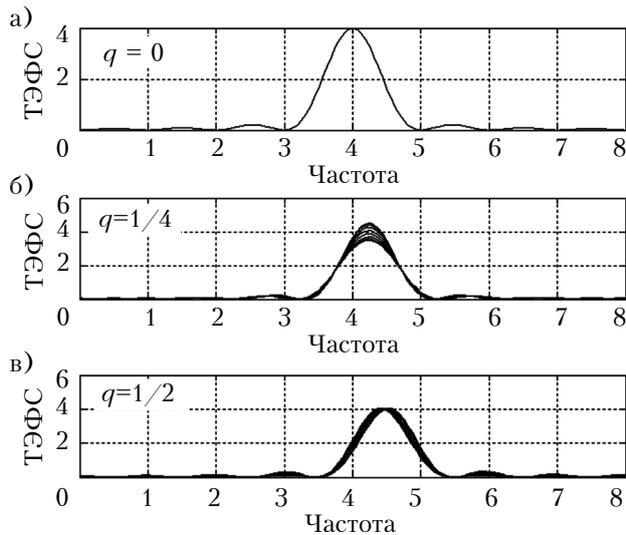


Рис. 6. Неинвариантность ТЭФС сигнала  $x(n) = \cos\left[\frac{\pi}{8}(4 + q)n\right]$ , дополненного 240 нулевыми отсчетами, при  $N=16$ ,  $k=4$ ,  $m=10$  и различных значениях  $q$

Прежде чем перейти к измерению ТЭФС гармонической компоненты (11) при различных значениях параметра  $q$ , сделаем одно важное замечание, которое следует из полученных результатов.

ТЭФС сигнала  $x(n)$ , состоящего из суммы действительных гармонических колебаний вида (11), периоды некоторых из которых не кратны интервалу анализа  $N$ , не будет инвариантен временному сдвигу, т. к. для такого сигнала теорема сдвига не справедлива. Отметим, что при этом часть гармонических колебаний (или все гармонические колебания), входящие в состав сигнала  $x(n)$ , могут быть также периодическими, но на другом интервале  $N_1 > N$ . В частном случае ТЭФС действительной гармонической компоненты  $x(n)$  вида (11) при  $q \neq 0$  не будет инвариантен ее временному сдвигу.

Для иллюстрации эффекта неинвариантности ТЭФС был выбран сигнал в виде гармонической компоненты (11) при следующих параметрах:  $N=16$ ,  $k=4$ ,  $q=0$ ;  $1/4$ ;  $1/2$ , число нулевых отсчетов 240, число сдвигов (по одному отсчету)  $m=10$ . Энергетические спектры исходного сигнала, полученные с помощью операции дополнения нулями, вывелись на один график, который представлен на рис. 6 (на графике в силу симметричности энергетического спектра действительных сигналов относительно точки  $N/2$  выведена только его левая половина).

«Размытость» кривой на рис. 6 характеризует изменение ДВПФ сигнала  $x(n) = \cos\left[\frac{\pi}{8}(4 + q)n\right]$  от сдвига при «естественном» (реальном) продолжении входного сигнала и, следовательно

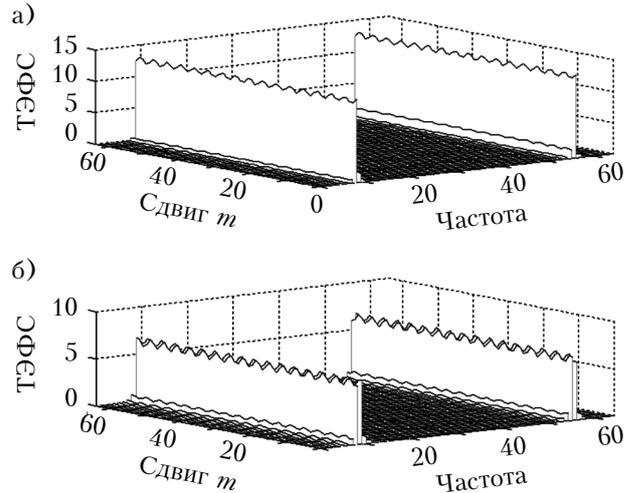


Рис. 7. ТЭФС гармонической компоненты  $x(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k + q)n\right]$  при  $q = 1/4$  (а) и  $q = 1/2$  (б)

(учитывая взаимосвязь ДПФ и ДВПФ), неинвариантность ТЭФС исходного сигнала.

С другой стороны, эффект неинвариантности ТЭФС модельного сигнала (11) можно проиллюстрировать результатами измерения его ТЭФС при различных значениях параметра  $q$ , которые приведены на рис. 7.

На рис. 7 можно увидеть проявление сразу двух явлений, сопровождающих цифровую спектральную обработку рассматриваемого сигнала. Это известный эффект размывания спектральных составляющих (называемый часто эффектом утечки, английский термин — leakage) и эффект неинвариантности, выявленный в настоящей работе (предлагаемый английский термин «non-invariance»). При этом, если значение параметра равно нулю, то ни один из эффектов не проявляется. Отсутствие проявления в этом случае эффекта утечки объясняется тем, что коэффициенты ДПФ «падают» в нули ДВПФ на единичной окружности отрезка гармонической компоненты. Отсутствие же проявления эффекта неинвариантности связано с тем, что естественное продолжение сигнала во временном окне совпадает с циклическим (периодическим) продолжением, «навязываемым» ДПФ. Если же значение параметра не равно нулю, то проявляется и эффект размывания спектральных составляющих, и эффект неинвариантности.

### Заключение

Исследования выявленного авторами эффекта неинвариантности текущего энергетического Фурье-спектра, проведенные в настоящей работе, позволяют:

— по-новому взглянуть на результаты измерения на конечных интервалах текущих Фурье-спектров и текущих энергетических Фурье-спектров сигналов, а также дать числен-

ную оценку невариантности текущих энергетических Фурье-спектров действительных тональных компонент;

– повысить эффективность применения цифрового спектрального анализа во многих его приложениях, в частности при решении задач по обнаружению и выявлению скрытых периодичностей (гармонических, тональных компонент) в таких предметных областях, как радиолокация, виброакустическая диагностика, пассивная гидролокация, биомедицина и т.п.

#### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – Москва: Мир, 1978.
2. Опенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. – Москва: Мир, 1980.
3. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. – Москва: ООО «Бином-Пресс», 2007.
4. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.

5. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.

6. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.

7. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия Вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI, № 9. – С. 67–68.

8. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.

9. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–12.

*Дата поступления рукописи  
в редакцию 01.10.2013 г.*

**В. О. ПОНОМАРЬОВ, О. В. ПОНОМАРЬОВА**

Росія, Іжевський державний технічний університет ім. М. Т. Калашникова  
E-mail: ponva@mail.ru

## ІНВАРІАНТНІСТЬ ПОТОЧНОГО ЕНЕРГЕТИЧНОГО ФУР'Є-СПЕКТРА ДІЙСНИХ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ НА СКІНЧЕННИХ ІНТЕРВАЛАХ

*Розглянуто питання вимірювання Фур'є-спектрів сигналів в базисі дискретних експоненційних функцій. Запропоновано методи та алгоритми ковзних вимірювань енергетичних Фур'є-спектрів сигналів на скінченних інтервалах. Досліджено інваріантність поточного енергетичного Фур'є-спектра зсуву дискретних дійсних сигналів, які не є періодичними. Наведено теоретичні та практичні результати аналізу інваріантності поточних енергетичних Фур'є-спектрів тональних компонент.*

*Ключові слова: дискретний сигнал, скінченний інтервал, ковзні спектральні вимірювання, інваріантність поточних енергетичних Фур'є-спектрів, тональні компоненти.*

DOI: 10.15222/TKEA2014.1.15  
УДК 621.391

PONOMAREV V. A., PONOMAREVA O. V.

Russia, Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
E-mail: ponva@mail.ru

## THE INVARIANCE OF CURRENT ENERGY FOURIER SPECTRUM OF DISCRETE REAL SIGNALS ON FINITE INTERVALS

*Digital spectral analysis of signals based on DFT has a number of advantages. However, the transition from analog to digital methods and techniques is accompanied by a number of undesirable effects. Signals in each subject area usually have their own specifics. Therefore, it is necessary to study these effects in applications of spectral Fourier analysis.*

*Such research is important for three reasons. Firstly, DFT properties are accurate, have their own specificity and significantly differ from the properties of the Fourier transform of continuous signals. Secondly, signals in each subject area have their own specificity. Thirdly, researchers often have prevailing knowledge in some particular domain, rather than in the field of digital signal processing techniques. As a result, in practice, some of the processes and effects arising in applications of digital spectral analysis, unfortunately, escape the attention of researchers which can result in erroneous conclusions. The paper deals with the problems of measuring Fourier spectrum of signals in the base of discrete exponential functions. Methods and algorithms of sliding measurements of energy Fourier spectrum of signals on finite intervals were described. The invariance of current energy Fourier spectrum to moving discrete real signals (which are not periodic) were investigated. The authors identify a new effect of digital spectral analysis – the effect of non-invariance of the current*

energy Fourier spectrum. Theoretical and practical results of analysis of invariance of current energy Fourier spectrum of tonal components are shown.

The conducted studies allow us:

– to see in a new light the measurement results on finite intervals of current Fourier spectrum and the current energy Fourier spectra of signals; give a numerical estimate of the non-invariance of the current energy Fourier spectrum of real tonal components.

– to increase the effectiveness of digital spectral analysis in its many applications, in particular, for solving the problems on detection and identification of hidden periodicities in such subject areas as radar, vibroacoustic diagnostics, passive sonar, biomedicine, etc.

**Keywords:** digital signal, final interval, «sliding» spectral measurement basis, invariance of current Fourier spectrum, tonal components.

## REFERENCES

1. Rabiner L. R., Gold B. *Theory and application digital signal processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1975. 762 p.
2. Oppenheim A.V. *Application of digital signal processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1978. 499 p.
3. Lyons R. G., *Understanding digital signal processing*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2004.
4. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Digital methods of vibroacoustic diagnosing of machines transmission] *Stanki i instrument*, 1983, no 9, pp. 18-21 (in Russian)
5. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Theory and application of parametric discrete Fourier transform] *Tsifrovaya obrabotka signalov*, 2011, no 1, pp. 2-6 (in Russian)
6. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. [Sliding parametric DFT in problems of detecting tonal components] *Tsifrovaya obrabotka signalov*, 2012, no 4, pp. 2-7. (in Russian)
7. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. Generalization of discrete Fourier transform for interpolation in time domain. *Electronic and Electrical Engineering*, 1984, no 3, pp. 27-30
8. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. [Method for fast evaluation discrete Fourier transform real sequence] *Tsifrovaya obrabotka signalov*, 2013, no 2, pp. 10-15 (in Russian)
9. Ponomareva O.V. [Development of the theory of spectral analysis of discrete signals in a finite interval in basis parametric discrete exponential functions] *Tsifrovaya obrabotka signalov*, 2010, no 2, pp. 7-12 (in Russian)

## НОВЫЕ КНИГИ

## НОВЫЕ КНИГИ

### Дворкович В. П., Дворкович А. В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов.— Москва: Техносфера, 2014.

Книга содержит сведения о классических оконных функциях и их параметрах, а также предложенные авторами новые методы синтеза оконных функций с применением следующих алгоритмов:

- минимизации спектральных составляющих оконных функций вне пределов заданного интервала;
- минимизации различий формы и спектра оконных функций;
- максимизации скорости спада уровней боковых лепестков спектра оконных функций;
- перемножения относительных спектров оконных функций.

В приложениях приводится описание методов синтеза оптимальных сигналов, ограниченных по спектру и практически ограниченных по длительности, и синтеза сигналов, форма которых совпадает с огибающей их спектра, разработанных на базе алгоритмов вычисления новых оконных функций.

