

## РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

С помощью метода пробных частиц (МПЧ) решения уравнения Больцмана выполнено численное исследование обтекания пластины сверхзвуковым потоком разреженного газа для больших и малых чисел Маха в широком диапазоне числа Кнудсена. Получены значения коэффициента лобового сопротивления и распределение макропараметров течения в окрестности пластины, учитывая и донную область. Приведено сравнение полученных результатов с данными других авторов. Показано преимущество МПЧ в сходимости результатов счета и затратах машинного времени.

By the trial particles method for Boltzmann equation solution, the numerical research of plate flow by the supersonic stream of rarified gas is carried out both for big and small Mach numbers in a wide range of the Knudsen number. Values of the front resistance factor and current macroparameters distribution in plate vicinity are obtained also considering the given area. Comparison of the results obtained with the other authors' data is given. The advantage of the trial particles method in calculation results convergence and computational time is shown.

Обзор последних работ в области вычислительной динамики разреженного газа говорит о том, что задача обтекания плоской пластины является по-прежнему актуальной. При этом интерес проявляется как с точки зрения изучения особенностей течений при различных числах Кнудсена ( $Kn_\infty$ ) и совершенствования расчетных алгоритмов [1 – 6], так и разработки новых наукоемких технологий нанесения тонких пленок в вакууме [7].

Целью данной работы является более детальное исследование сверхзвукового обтекания плоской пластины, расположенной нормально к набегающему потоку, при различных числах Маха и Кнудсена. Рассматривается как возмущенная область перед пластиной, так и зона донного вакуума. Приводятся результаты сравнений решения уравнения Больцмана на базе алгоритма, подробно описанного в работах [8 – 10], с решением модельного кинетического уравнения [4] (S-модель Шахова Е.М.).

Расчеты проводились для тех же условий обтекания, что и в [4]:  $0,01 \leq Kn_\infty \leq 10$ ;  $T_0 = 1000\text{K}$ ; температурный фактор  $t_w = T_w / T_0 < 1$  (холодная пластина) или  $T_w = T_e$  (теплоизолированная пластина). Здесь  $T_0$ ,  $T_w$  и  $T_e$  – температуры торможения, поверхности тела и восстановления соответственно. Набегающий поток одноатомного газа задавался моноскоростным (число Маха  $M_\infty = 10,95$ ) с начальным свободномолекулярным полем параметров. В качестве граничных условий на поверхности принималось диффузное отражение с коэффициентом аккомодации, равным единице. При уменьшении числа Кнудсена в качестве исходного использовалось предыдущее поле параметров, полученное для более высокого числа  $Kn_\infty$ .

С учетом симметрии функции распределения и картины обтекания бесконечной пластины относительно ее оси, сонаправленной с вектором скорости набегающего потока  $\vec{V}_\infty$ , численное моделирование проводилось в расчетной области  $\Omega$ , представляющей собой тонкий прямоугольный параллелепипед (рис. 1) и имеющей фиксированную равномерную сетку разбиения. Начальный розыгрыш траекторий пробных частиц проводился со всех граней области  $\Omega$ . При попадании частиц на боковые и нижнюю грани области  $\Omega$  происходило зеркальное отражение и возврат частиц в расчетную область.

Размеры расчетной области по осям  $OX$  и  $OY$  выбирались так, чтобы она оптимальным образом охватывала зону возмущений, вносимых пластиной, при всех рассматриваемых режимах обтекания. В работе [4] размеры расчетной области по осям  $OX$  и  $OY$  соответственно составляли  $L_x = 9a$  и  $L_y = 6a = (a - \text{половина высоты пластины, рис. 1})$ . Центр пластины располагался в точке с координатой  $x = 3a$ . Как показали предварительные расчеты векторных полей скорости при  $Kn_\infty = 0,01$  размеры возмущенной зоны в направлении оси  $OX$  (рис. 1) позволяют ограничить расчетную область размерами  $L_y = 2a$  и  $L_x = 5a$ . Центр пластины располагался в точке с координатой  $x = 2a$ .

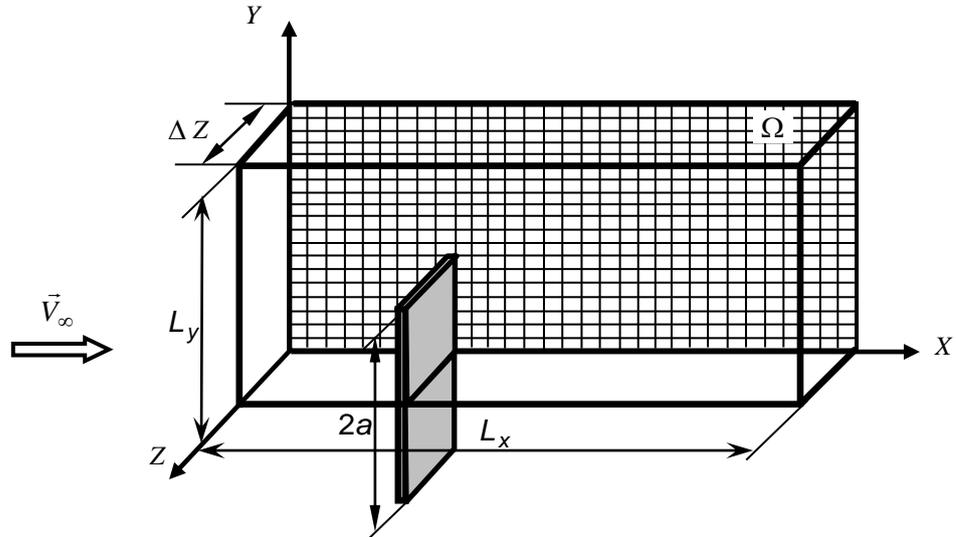


Рис. 1

Линейные размеры расчетных ячеек выбирались так, чтобы они не превышали значений местных длин свободного пробега. Анализ значений местных длин свободного пробега  $\lambda$  при разных числах Кнудсена показал, что минимальный размер  $\lambda$  достигается при  $Kn_\infty = 0,01$ . Как для холодной, так и для теплоизолированной пластины в достаточно тонком ударном слое перед телом  $\lambda \ll \lambda_\infty$ , где  $\lambda_\infty$  – длина свободного пробега невозмущенного потока:  $\lambda_\infty = 0,02$  при  $Kn_\infty = 0,01$ . Во всей остальной области  $\lambda \approx \lambda_\infty$  и  $\lambda > \lambda_\infty$ . На рис. 2 показано поведение  $\lambda$  вдоль оси  $OX$  при обтекании холодной пластины при  $Kn_\infty = 0,01$ . Исходя из этого, расчеты проводились для двух линейных размеров ячеек:  $\Delta = 0,025a$  и  $\Delta = 0,01a$ .

Количество ячеек при выбранных размерах расчетной области составляло  $N \sim 10^5$  для  $\Delta = 0,01a$  и

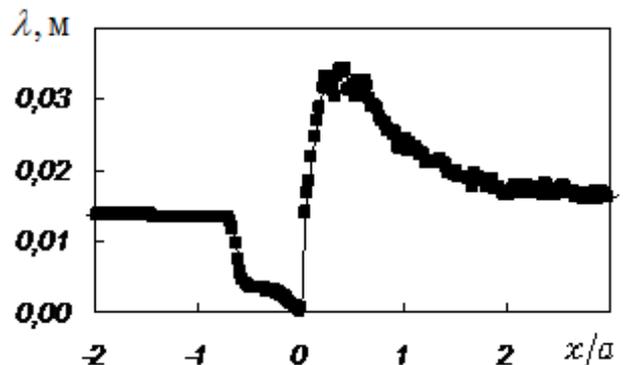


Рис. 2

$N \sim 1,6 \cdot 10^4$  для  $\Delta = 0,025 a$ . Объем выборки (число траекторий с границы расчетной области) составлял  $\sim 2 \cdot 10^6$ . Дальнейшее увеличение количества испытаний при рассматриваемых размерах расчетных ячеек существенно не влияло на результаты вычислений. Время расчета одной итерации зависело от количества ячеек расчетной области и рассматриваемого режима обтекания и составляло для больших чисел Кнудсена от 0,5 до 1 часа для ПЭВМ типа PENTIUM-IV 2400 MHz (BUS 533 MHz) 1000 MB (SDRAM PC-266). Для малых чисел Кнудсена расчетное время возрастало почти на порядок.

Как показал анализ полученных результатов, для размеров ячеек  $\Delta = 0,01 a$  и  $\Delta = 0,025 a$  расчетные значения газодинамических параметров мало отличались друг от друга, поэтому серийные расчеты выполнены для  $\Delta = 0,025 a$ .

Расчеты велись, начиная с больших чисел Кнудсена и постепенно переходя к малым. При числе  $Kn_\infty = 10$  сходимость результатов достигалась на третьей – четвертой итерациях. При уменьшении числа Кнудсена в расчетах в качестве исходного использовалось предыдущее поле параметров, полученное для более высокого числа  $Kn_\infty$ . Благодаря этому при  $Kn_\infty = 0,3$  и  $Kn_\infty = 0,01$  сходимость результатов достигалась уже на второй – третьей итерациях.

При всех рассматриваемых режимах обтекания наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных значений коэффициента лобового сопротивления  $C_D$  холодной пластины при  $T_w = 0,01 T_0$  данным [4]. На рис. 3 кривая 1 соответствует результатам расчетов, приведенных в [4]. Расчетные значения методом пробных частиц обозначены треугольниками. Здесь же показано поведение  $C_D$  для неохлаждаемой пластины при  $T_w = T_0$  (кривая 2 – результаты работы [4], квадраты – настоящие расчеты). Отличия в значениях  $C_D$  как для холодной, так и для горячей пластины наблюдаются только при малых значениях числа  $Kn_\infty = 0,01$ . Вероятно, это объясняется разными размерами расчетных ячеек (в конечно-разностном методе [4]  $\Delta \sim 0,1 a$ , в то время как в методе пробных частиц  $\Delta \sim 0,025 a$ ). Как следует из рис. 2, при  $Kn_\infty = 0,01$  длина свободного пробега молекул лежит в пределах  $0,01 a < \lambda_\infty < 0,02 a$ , что намного меньше размеров ячейки, выбранных в [4].

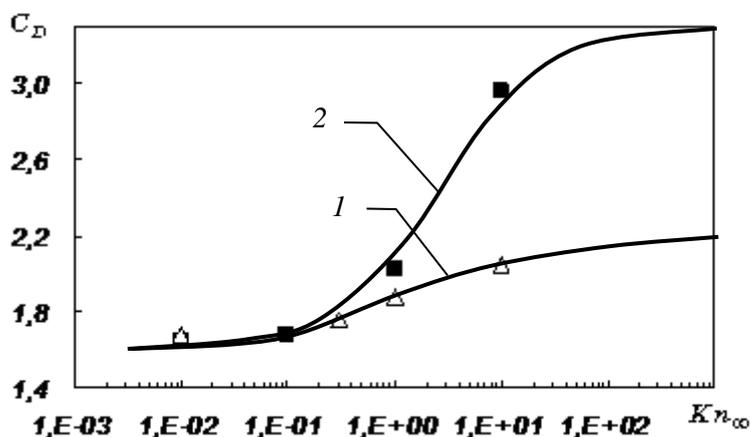


Рис. 3

Общее представление о картине течения при значениях  $Kn_\infty = 10; 0,3; 0,01$  дают рис. 4 и рис. 5, на которых показаны изолинии относительной кон-

центрации  $n/n_\infty$  и относительной температуры  $T/T_\infty$  в окрестности холодной пластины ( $T_w = T_\infty$ ). Результаты расчетов методом пробных частиц показаны на нижней части рисунков, а данные работы [4] – на верхней.

Приведенные выше значения чисел  $Kn_\infty$  соответствуют сильно разреженному (близкому к свободномолекулярному) режиму обтекания, переходному и течению, близкому к сплошной среде соответственно.

В целом для  $Kn_\infty = 10$  имеем типичную картину обтекания холодной пластины сильно разреженным газом. Течение характеризуется пологими профилями плотности и температуры на линии симметрии, а также сильным падением плотности газа в области донного вакуума за пластиной. Для  $Kn_\infty = 0,3$  картина течения меняется вследствие более существенной роли межмолекулярных столкновений. Профили макропараметров в зоне торможения как бы прижимаются к поверхности. Наблюдается процесс формирования ударной волны. При дальнейшем уменьшении числа  $Kn_\infty$  течение в области торможения приближается к режиму обтекания сплошной средой. Для  $Kn_\infty = 0,01$  хорошо видны сформировавшаяся отошедшая ударная волна и пристеночный слой на пластине с большими градиентами плотности и температуры. За пластиной появляется зона возвратного течения, в которую молекулы могут попасть только в результате столкновений между собой и отражения от поверхности тела.

Сравнительный анализ изолиний показывает, что рассчитанное с помощью МПЧ распределение относительной концентрации  $n/n_\infty$  и температуры  $T/T_\infty$  при  $Kn_\infty = 10$  и  $Kn_\infty = 0,3$  достаточно хорошо согласуется с данными работы [4] (рис. 4,а и 4,б; 5,а и 5,б). При  $Kn_\infty = 0,01$  наблюдается расхождение результатов в следе за пластиной (рис. 4,в и 5,в). Сравнение профилей относительных концентраций  $n/n_\infty$ , температуры  $T/T_\infty$  и скорости  $V/\sqrt{2RT_\infty}$  на линии симметрии перед холодной пластиной для тех же чисел Кнудсена с данными работы [4] приведено на рис. 6 – 8. Сплошные кривые 1, 2, 3 соответствуют расчетам [4] для чисел  $Kn_\infty = 10; 0,3; 0,01$ . Результаты расчетов МПЧ при тех же числах  $Kn_\infty$  обозначены маркерами.

Анализ представленных данных показывает, что имеются некоторые количественные различия в расчетах разными методами при достаточно адекватном качественном их поведении (в первую очередь при выходе на асимптотические значения). Эти расхождения могут быть вызваны тем, что в отличие от применяемого в данной работе МПЧ, в [4] решается уравнение Больцмана с модельным оператором столкновений для максвелловских молекул. Кроме того, при расчете по методу [4] линейные размеры расчетных ячеек были гораздо крупнее расчетных ячеек в МПЧ и составляли  $\Delta \sim 0,1 a$ , порой намного превышая местные длины свободного пробега.

Детальный анализ результатов в теневой зоне за пластиной показал, что здесь наблюдаются несколько большие флуктуации расчетных параметров в силу того, что при достаточно больших числах Маха местная статистика пребывания частиц в ячейках для данного объема выборки еще недостаточна. Данное замечание характерно для всех статистических методов.





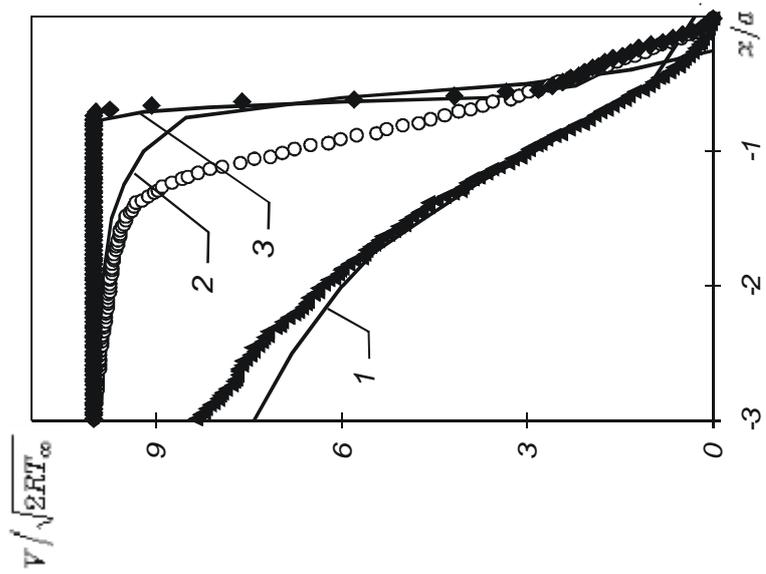


Рис. 8

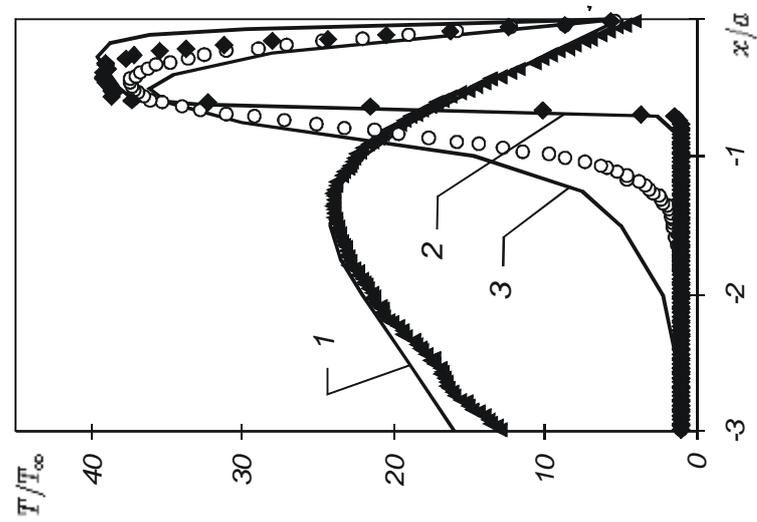


Рис. 7

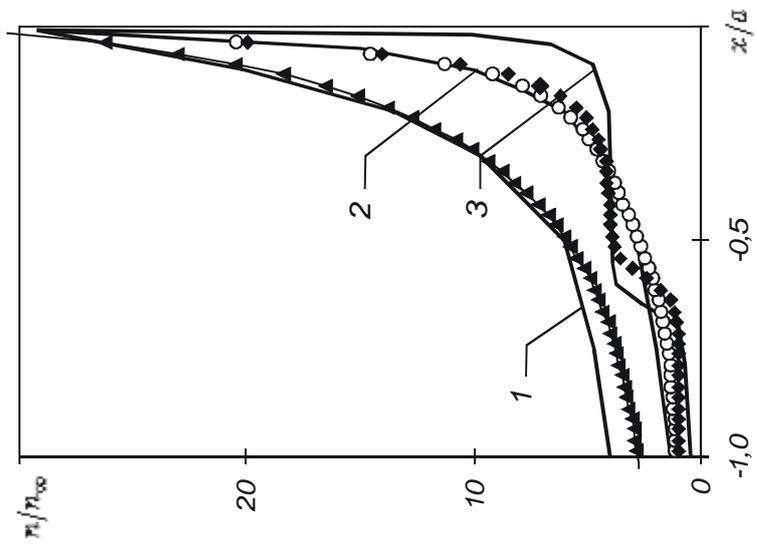


Рис. 6

При обтекании теплоизолированной пластины ( $T_w = T_e$ ) в отличие от холодной отсутствует тонкая пристеночная область с большим градиентом плотности и температуры. Вследствие этого плотность в области донного вакуума за пластиной значительно ниже, а скорость выше, чем для холодной пластины. Характер распределения плотности и температуры за теплоизолированной пластиной несколько иной, чем за холодной. В связи с уменьшением области возвратного течения при малых числах  $Kn_\infty$  улучшается и согласованность результатов расчетов обоими методами. Это хорошо видно по поведению изолиний концентрации (рис. 9) и температуры (рис. 10) при  $Kn_\infty = 0,01$  (верхняя часть рисунков соответствует результатам, приведенным в [4], нижняя – результатам настоящих расчетов).

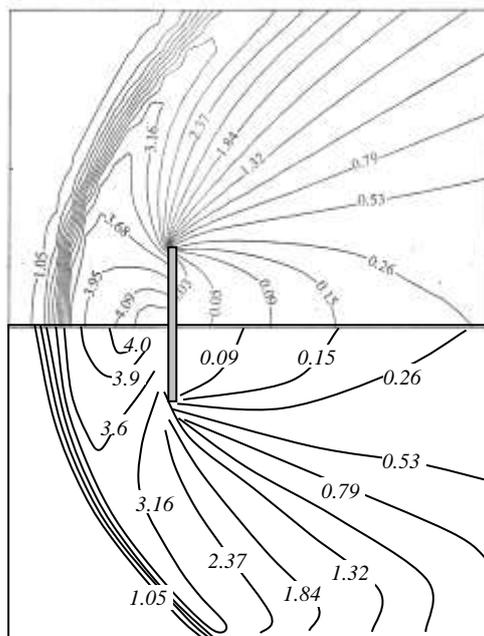


Рис. 9

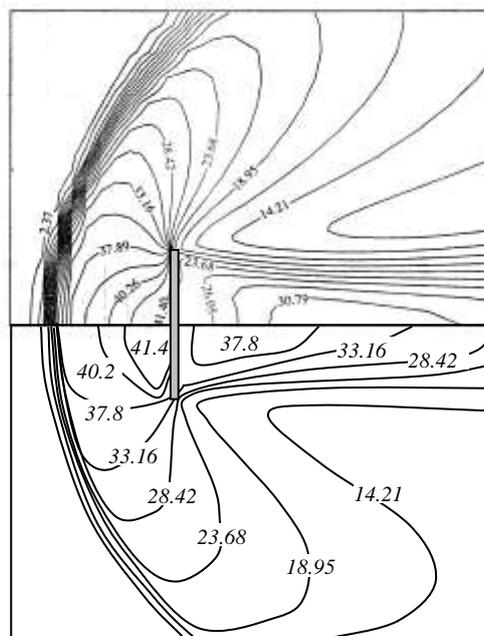


Рис. 10

Следует заметить, что МПЧ требует значительно меньших затрат расчетного времени. Так на проведение расчетов, приведенных в [4], потребовалось несколько месяцев, в то время как расчеты по МПЧ при фиксированном числе Кнудсена составляли не более двух суток.

Помимо гиперзвукового режима обтекания было рассмотрено сверхзвуковое обтекание бесконечной полосы шириной  $a$ , установленной нормально к потоку одноатомного газа при  $M_\infty = 1,8$ ;  $t_w = 1$ ;  $Kn_\infty = 0,015$ . Размеры расчетной области составляли  $L_x = 20a$  и  $L_y = 16a$ . Центр пластины на оси  $Ox$  соответствовал  $x = 5a$ .

Расчетные значения чисел Маха в окрестности пластины сравнивались с результатами работы [3] (рис. 11). Верхняя часть рисунка соответствует данным [3], нижняя – настоящим расчетам. В работе [3] использовался известный в расчетной практике метод прямого статистического моделирования, описанный в [11]. Как и в [3], значения местных чисел Маха определялись по значениям местной скорости и средней температуры  $T = (T_x + T_y + T_z)/3$ .

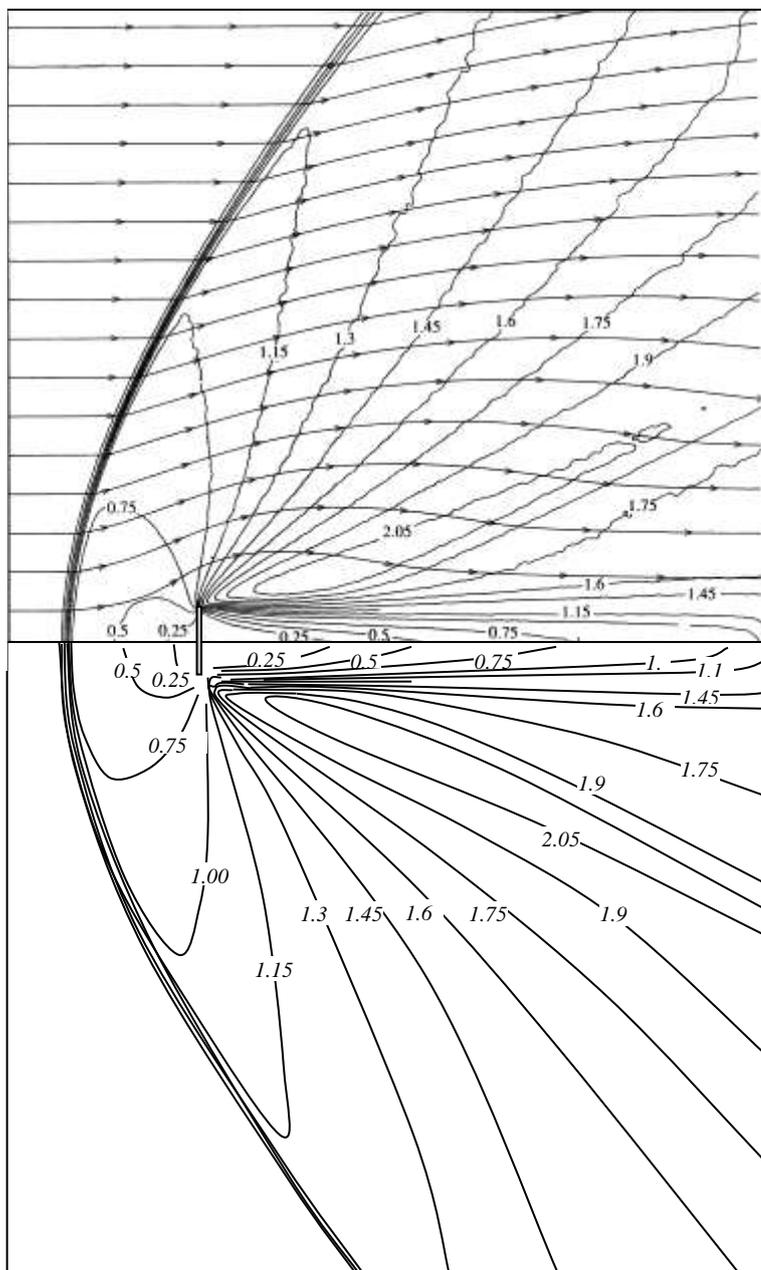


Рис. 11

Результаты расчетов по двум методам показали хорошее взаимное согласие во всей расчетной области за исключением правой приграничной полосы, что обусловлено “мягкими” граничными условиями на боковой поверхности, принятыми в [3].

Время счета одной итерации методом пробных частиц на ПЭВМ типа PENTIUM-IV (тактовая частота 2400 MHz, ОЗУ – 1 GB) для указанной расчетной области при количестве ячеек  $N \sim 3,5 \cdot 10^5$  и объеме выборки  $\sim 10^7$  со-

ставило приблизительно 20 часов. Для достижения сходимости результатов понадобилось четыре итерации.

Как и в работе [3], в возмущенном потоке существует область с числом Маха  $M > 2$ . При этом скорость в этой области выше, а температура ниже тех же параметров в невозмущенном набегающем потоке. В [3] появление этой области объясняется расширением газа в сильно разреженную область за пластиной. На наш взгляд наличие такой зоны обусловлено прежде всего столкновительными процессами, а также влиянием высокоскоростных “хвостов” функции распределения молекул набегающего потока по скоростям.

Отметим, что приведенные в работе [3] решения методом прямого статистического моделирования [11] сравнивались с соответствующими решениями уравнений Навье-Стокса. При  $Kn_{\infty} < 0,015$  метод, используемый в работе [3], требует чрезвычайно больших затрат вычислительных ресурсов. Кроме того, течения при  $M_{\infty} > 1,8$  не могут быть корректно описаны уравнениями Навье-Стокса из-за наличия неравновесности в ударной волне. Тем не менее, сравнение параметров слева от полосы по двум методам показало их хорошее взаимное согласие. Справа от полосы, ниже изолинии с числом Маха 1,9 поля параметров различны. Связано это с неравновесностью течения в этой области вследствие низкой плотности. Характерные числа Кнудсена здесь превышают соответствующее число  $Kn_{\infty}$  на два порядка. Для таких условий уравнения Навье-Стокса неприменимы.

Из сказанного выше следует, что МПЧ позволяет более детально рассмотреть особенности течения как в возмущенной области, так и в зоне высокого вакуума за пластиной при значительной экономии машинных ресурсов.

1. Титарев В.А., Шахов Е.М. Сверхзвуковое течение разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000.– Т. 40, № 3.– С.483 – 494.
2. Титарев В.А., Шахов Е.М. Расчет донного вакуума за пластиной, обтекаемой гиперзвуковым потоком разреженного газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2001.– Т.41, № 9.– С.1444 – 1456.
3. Мальцев Р.В., Ребров А.К. Поперечное обтекание полосы сверхзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005.– № 1.– С.159 – 167.
4. Титарев В.А., Шахов Е.М. Численный расчет поперечного обтекания холодной пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005.– № 5.– С.139 – 154.
5. Попов С.П., Черемисин Ф.Г. Обтекание сверхзвуковым потоком разреженного газа решетки плоских поперечных пластин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.– 2002.– № 3.– С.159 – 168.
6. Попов С.П., Черемисин Ф.Г. Совместное численное решение уравнения Больцмана и Навье-Стокса // Вычислительная динамика разреженного газа. – М.: ВЦ РАН, 2000.
7. Ребров А.К. Физические основы газоструйного осаждения тонких пленок // Сб. докладов 6-й Международной конференции “Вакуумные технологии и оборудование”.– Харьков, 2003.– С.113 – 122.
8. Басс В.П., Печерица Л.Л. Численное моделирование стационарного осесимметричного обтекания затупленного конуса в переходном режиме обтекания // Вісник Дніпропетровського університету. – 2005.– № 10/1.– С.57 – 65.
9. Басс В.П., Печерица Л.Л. Об одном алгоритме реализации Метода Монте-Карло для решения задач динамики разреженного газа // Техническая механика.– 2006.– № 1.– С.67 – 79.
10. Басс В.П., Печерица Л.Л. Гиперзвуковое обтекание теплоизолированного цилиндра разреженным газом // Вісник Дніпропетровського університету. – 2006.– № 2/1.– С.50 – 60.
11. Bird G.A.. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows.– Oxford: Clarendon Gas Press, 1994. – 458 p.

Институт технической механики  
НАН Украины и НКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 22.06.07,  
в окончательном варианте 11.03.08