

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Построена методика решения обратных задач гидродинамики решеток профилей в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. С использованием данной методики проведено построение ряда плоских решеток по заданным параметрам потока на бесконечности и заданному распределению скорости жидкости на неизвестной границе профиля. Проанализированы основные закономерности изменения геометрических параметров решеток в зависимости от задаваемых краевых условий, а именно: влияние распределения скорости около критических точек на форму кромок профиля; влияние угла поворота потока на период решетки, угол установки и форму профиля; влияние вида задаваемого распределения скорости на изгиб профиля.

A technique for solving the inverse problems of cascade hydrodynamics within the limits of ideal incompressible liquid model is constructed. With the technique use, the construction of a flat cascade series with the given flow parameters on infinity and with the given liquid velocity distribution on unknown airfoil surface is carried out. The basic rules of cascade geometrical parameters change in dependence on the given boundary conditions are analyzed, namely: influence of velocity distribution near critical points on the airfoil edge shape; influence of a flow rotation angle on a lattice spacing, an installation angle, and the airfoil shape; influence of a given velocity distribution type on the airfoil curvature.

**Введение.** Аэродинамическое проектирование лопаточных венцов компрессоров современных авиационных газотурбинных двигателей предполагает решение обратной задачи газодинамики компрессорных решеток, когда по заданным параметрам потока на входе и на выходе из решетки требуется определить форму профиля лопатки и геометрические параметры решетки профилей. Решение данной задачи позволяет построить первичную решетку профилей (первое приближение), которую в дальнейшем необходимо оптимизировать с учетом аэродинамических характеристик решетки, таких как примеру, как потери полного давления и угол поворота потока.

На сегодняшний день разработан ряд методов, позволяющих решать данную задачу в рамках модели несжимаемой жидкости [3, 4, 6, 7, 9, 13, 16], сжимаемого газа при дозвуковых [2, 12, 16], трансзвуковых скоростях и в плоскости годографа вектора скорости [1, 5, 11]. Методы построения решеток профилей при трансзвуковом обтекании, как правило, основаны на многократном решении прямой задачи аэродинамики решеток на основе уравнений потенциала скорости, уравнений Эйлера или Навье-Стокса [1]. Такие методы требуют больших вычислительных затрат и, на наш взгляд, не являются эффективными в качестве методов построения первого приближения.

Методы решения обратной задачи газодинамики решеток профилей в плоскости годографа вектора скорости выглядят достаточно привлекательными с точки зрения теории, однако обладают некоторыми недостатками, существенными с точки зрения практического применения. Для них достаточно трудно точно установить требуемые параметры потока на выходе или период решетки [5]. Кроме того, для данного метода построения не выполняется условие замкнутости профилей, что приводит к построению профилей с незамкнутыми задними кромками.

Методы построения решеток в рамках модели дозвукового течения сжимаемого газа в большинстве своем основаны на соответствующих решениях для несжимаемой жидкости с использованием приближения Чаплыгина [14, 16], т.е. ключевым этапом является решение обратной задачи гидродинамики решеток в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Несмотря на разнообразие представленных по данному направлению работ, при построе-

нии решеток трудно оценить влияние задаваемых параметров и в этой связи важно показать хотя бы качественный характер их воздействия на геометрические параметры решетки.

Таким образом, цель данной работы – исследование особенностей решения обратной задачи гидродинамики решеток в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости.

**Постановка задачи.** Пусть задана безразмерная скорость  $V_1$  и угол входа потока  $\alpha_1$ , набегающего на некоторую решетку профилей (рис. 1). Требуется найти геометрические параметры решетки и форму составляющих ее профилей, обеспечивающие заданный угол выхода потока  $\alpha_2$ .

На рис. 1 также обозначено:  $V_2$  – безразмерная скорость потока на выходе из решетки;  $d$  – период решетки.

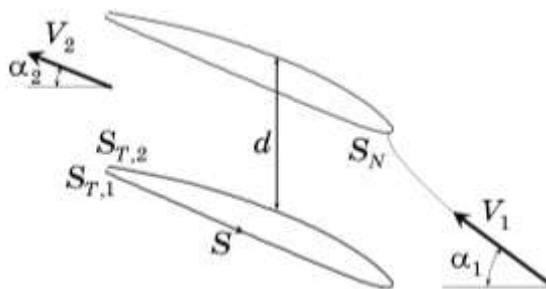


Рис. 1

Для обеспечения корректности данной задачи требуется задать распределение некоторого гидродинамического параметра (как правило, скорости) по обводу профиля.

**Решение обратной задачи.** Зададим распределение скорости  $V$  по обводу профиля в зависимости от длины дуги  $S$  (рис. 2), где  $S_{T,1}$ ,  $S_{T,2}$  – значения длины дуги  $S$ , соответствующие задней кромке профиля при движении от стороны давления к стороне всасывания (рис. 1),  $S_N$  – значение длины дуги  $S$ , соответствующее передней критической точке.

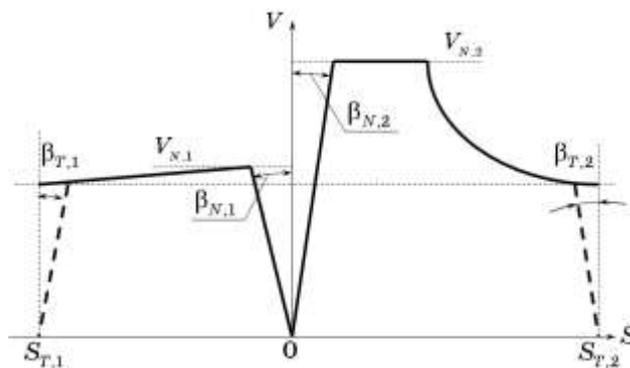


Рис. 2

В такой постановке обратную задачу можно решить методом конформных отображений. Существует ряд подобных методов с отображением искомого течения на различные канонические области.

Для решения обратной задачи воспользуемся методом, представленным в работе [4]. По заданному распределению модуля скорости можно найти распределение потенциала скорости  $\varphi_a$  и циркуляцию по профилю  $\Gamma$ :

$$\varphi_a(S) = \int_{S_{T,1}}^S u(S) dS,$$

$$\Gamma = \int_{S_{T,1}}^{S_{T,2}} u(S) dS,$$

где  $u(S) = \begin{cases} -V(S), & S_{T,1} \leq S \leq 0 \\ V(S), & 0 \leq S \leq S_{T,2} \end{cases}$ .

Тогда период решетки  $d$  определяется как

$$d = \frac{\Gamma}{V_1 \sin(\alpha_1) - V_2 \sin(\alpha_2)},$$

где  $V_2$  – скорость на выходе из решетки, которая определяется из уравнения неразрывности  $V_1 \cos(\alpha_1) = V_2 \cos(\alpha_2)$ .

Комплексный потенциал  $W(w)$  течения около единичного круга в плоскости  $w = \chi + i\nu$  имеет следующий вид:

$$W(w) = \frac{V_m d}{2\pi} \left\{ e^{i\alpha_m} \ln \frac{w - e^k}{w + e^k} + e^{-i\alpha_m} \ln \frac{w - e^{-k}}{w + e^{-k}} \right\} + \frac{\Gamma}{4\pi i} \ln \frac{w^2 - e^{-2k}}{w^2 - e^{2k}}, \quad (1)$$

где  $\alpha_m = \arctg \left\{ \frac{\tg(\alpha_1) + \tg(\alpha_2)}{2} \right\}$ ,  $V_m = \frac{V_1 \cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_m)}$ .

Алгоритм нахождения параметра  $k$  подробно описан в [4].

Описанные величины полностью определяют комплексный потенциал

(1). Тогда легко найти потенциал скорости на единичном круге  $\varphi_c(\theta)$ :

$$\varphi_c(\theta) = \operatorname{Re} \left\{ W(e^{i\theta}) \right\},$$

где  $\theta \in [\theta_T, \theta_T + 2\pi]$  – полярный угол в плоскости  $w$ ,  $\theta_T$  – значение  $\theta$ , соответствующее задней кромке профиля решетки.

Общий вид функции отображения плоскости единичного круга  $w$  на плоскость решетки профилей  $\zeta = \xi + i\eta$  имеет следующий вид

$$\frac{d\zeta}{dw} = \frac{d}{\pi} e^{-k} \frac{\left(1 - \frac{w_T}{w}\right)^{1 - \frac{\varepsilon}{\pi}}}{\left(1 - \frac{w_T^2}{e^{2k}}\right)^{\frac{1 - \frac{\varepsilon}{\pi}}{2}}} Q(w) e^{\frac{h(w)}{Q(w)}} \exp \left\{ \frac{e^k \left(\frac{1 - \frac{\varepsilon}{2\pi}}{2}\right)}{w} \ln \frac{e^k + w_T}{e^k - w_T} \right\}, \quad (2)$$

где  $Q(w) = \frac{w^2(e^{2k} - e^{-2k})}{(e^{2k} - w^2)(w^2 - e^{-2k})}$ ,  $h(w) = p(\chi, v) + iq(\chi, v)$ ,  $p(\chi, v)$ ,  $q(\chi, v)$  – гармонические функции, определяемые ниже,  $\varepsilon$  – параметр, определяющий форму задней кромки профиля ( $\varepsilon = 0$  – заостренная задняя кромка,  $\varepsilon = \pi$  – скругленная).

В работах [4, 14] определяются ограничения, налагаемые на распределение скорости:

- заостренная задняя кромка:  $-u(\theta_T) = u(\theta_T + 2\pi) = C$ , где  $C$  – некоторая положительная постоянная;
- скругленная задняя кромка:  $u(\theta_T) = u(\theta_T + 2\pi) = 0$ .

На рис. 2 сплошной кривой показано распределение скорости для заостренной задней кромки, а пунктирной – изменение скорости на концах для получения скругленной задней кромки.

Из выражения (2) видно, что функция отображения полностью определена, если известен вид функции  $h(w)$ . В действительности процесс получения координат профилей в решетке требует, чтобы функция  $\frac{d\zeta}{dw}$  была известна для точек  $w$ , принадлежащих единичному кругу, и таким образом, необходимо определить  $h(e^{i\theta}) = p(\theta) + iq(\theta)$ .

Функция  $p(\theta)$  определяется из согласования потенциалов на поверхности профиля и единичного круга, а функция  $q(\theta)$  определяется как сопряженная гармоническая функция  $p(\theta)$  посредством выражения:

$$q(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_T}^{\theta_T+2\pi} p(\theta^*) \operatorname{ctg} \frac{\theta^* - \theta}{2} d\theta^*. \quad (3)$$

Интеграл в выражении (3) вычисляется по методу Неймана [10].

Обеспечение замкнутости профиля и соответствия полученного течения течению на бесконечности определяется следующими интегралами:

$$I_1 = \int_{\theta_T}^{\theta_T+2\pi} p(\theta) d\theta, \quad (4)$$

$$I_2 = \int_{\theta_T}^{\theta_T+2\pi} p(\theta) \cos(\theta) d\theta, \quad (5)$$

$$I_3 = \int_{\theta_T}^{\theta_T+2\pi} p(\theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (6)$$

Профиль будет замкнут, и полученное течение будет соответствовать течению на бесконечности, если  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 0$ ,  $I_3 = 0$ . Обычно значения данных интегралов отличны от нуля, поэтому на практике пользуются функцией

$$p'(\theta) = p(\theta) + f(\theta),$$

где  $f(\theta)$  – корректирующая функция, подбираемая так, чтобы интегралы (4),(5),(6) обратились в нуль.

В отличие от предложенного в работе [4] способа определения корректирующей функции, будем определять ее следующим образом. Представим функцию  $f(\theta)$  в виде ряда Фурье:

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \{A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx)\}, \quad (7)$$

где  $A_0, A_j, B_j$  – коэффициенты ряда Фурье.

Подставляя выражение (7) в выражения (4), (5), (6), в силу ортогональности ряда получим:

$$f(\theta) = -\frac{I_1}{2\pi} - \frac{I_2}{\pi} \cos(\theta) - \frac{I_3}{\pi} \sin(\theta).$$

Такой способ модификации предложен в работе [8]. Решение, полученное данным методом, является в определенном смысле оптимальным [14].

После нахождения скорректированной функции  $p'(\theta)$  соответствующим образом корректируется длина дуги профиля  $S'(\theta)$  и распределение скорости на профиле  $u'(\theta)$  [4]. Координаты профиля находятся посредством выражений:

$$\xi(\theta) = \int_{\theta_T}^{\theta} \frac{v_c(\theta)}{u'(\theta)} \cos(\beta(\theta)) d\theta,$$

$$\eta(\theta) = \int_{\theta_T}^{\theta} \frac{v_c(\theta)}{u'(\theta)} \sin(\beta(\theta)) d\theta,$$

где  $v_c(\theta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{dW(w)}{dw} \right\} \Big|_{w=e^{i\theta}}$  – распределение скорости по единичному кругу,

$\beta(\theta) = \frac{\pi}{2} + \theta + \arg \left\{ \frac{d\zeta}{dw} \right\} \Big|_{w=e^{i\theta}}$  – угол наклона касательной к поверхности профиля.

**Проведение расчетов и анализ полученных результатов.** На основе анализа работ [2, 3, 4, 14, 16] можно сделать вывод, что форму профиля в основном определяет заданное распределение скорости. Представляет интерес исследование влияния распределения скорости на форму профиля.

Одним из основных параметров профиля является его толщина, которая во многом определяется формой передней и задней кромок. Рассмотрим влияние распределения скорости на форму передней кромки. Все нижесказанное будет справедливо и для задней кромки.

Радиус закругления передней кромки зависит в первую очередь от величины производной  $\frac{du}{dS}$ . Необходимо отметить, что при задании распределения скорости важно соблюсти равенство углов  $\beta_{N,1} = \beta_{N,2}$  (для задней кромки аналогично  $\beta_{T,1} = \beta_{T,2}$ ). Равенство углов обеспечивает непрерывную дифференцируемость распределения скорости в критической точке. Данное

условие необходимо для обеспечения гладкости передней кромки профиля и обеспечения физичности обтекания, которое заключается в том, что линия тока подходит к обтекаемой поверхности по нормали в критической точке [15]. В дальнейшем будем задавать распределения скорости, удовлетворяющие этому условию, и будем полагать  $\beta_{N,1} = \beta_{N,2} = \beta_N$ ,  $\beta_{T,1} = \beta_{T,2} = \beta_T$ .

На рис. 3 представлены два распределения скорости, различающиеся лишь углами  $\beta_N$ . Угол  $\beta_N$  распределения скорости, представленного на рис. 3,а, составляет  $1,146^\circ$ , а представленного на рис. 3,б –  $2,29^\circ$ . Угол входа потока составляет  $\alpha_1 = 30^\circ$ , угол выхода  $\alpha_2 = 20^\circ$ , скорость на входе  $V_1 = 0,68$ . Поскольку изменение угла  $\beta_N$  мало сказалось на циркуляции скорости, то период решетки в обоих случаях был примерно одинаков и равнялся  $d = 1,95$ .

Далее позицией 1 будем обозначать исходное распределение скорости  $V(S)$ , а позицией 2 – скорректированное распределение скорости  $V'(S')$ .

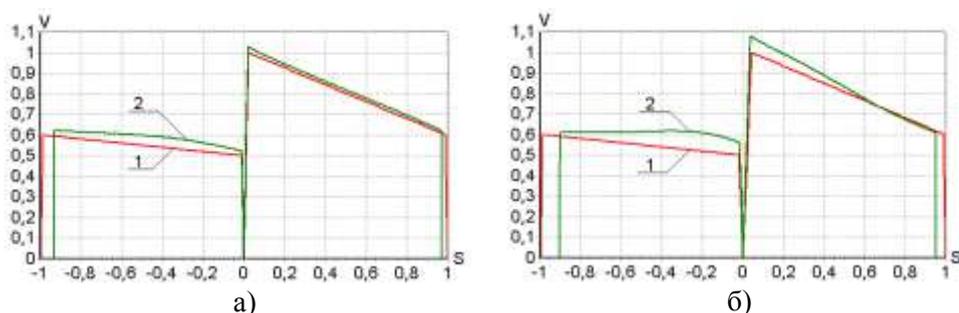


Рис. 3

Профили, соответствующие рассмотренным распределениям скорости, показаны на рис. 4. Профиль, обозначенный позицией 1, соответствует распределению, приведенному на рис. 3,а; профиль, обозначенный позицией 2, – распределению, приведенному на рис. 3,б. Видно, что увеличение угла  $\beta_N$  привело к увеличению радиуса передней кромки профиля и толщины профиля в целом.

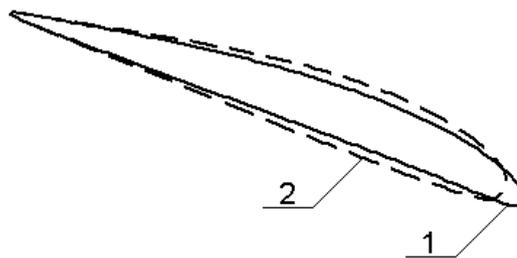


Рис. 4

Перепад скорости около передней критической точки ( $V_{N,2} - V_{N,1}$ ), показанный на рис. 2, определяет изгиб средней линии и, соответственно, носил

ка профиля. Ниже (рис. 5) представлены профили, полученные для распределений скорости с различными перепадами около критической точки.

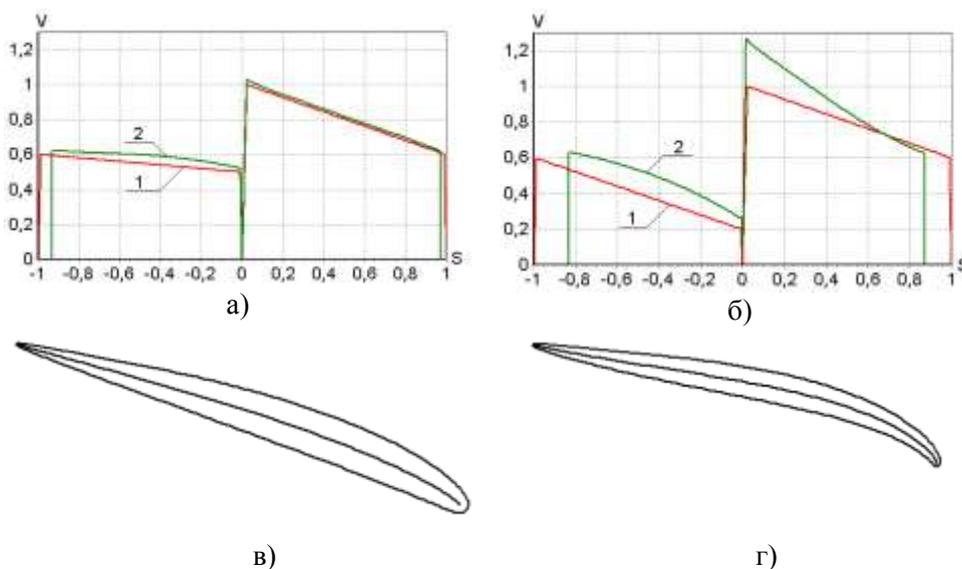


Рис. 5

Видно, что профиль, представленный на рис. 5,г, соответствующий распределению скорости, приведенному на рис. 5,б, имеет бóльшую кривизну носика по сравнению с профилем, представленным на рис. 5,в, соответствующим распределению скорости, приведенному на рис. 5,а. Подобное искривление передней части профиля может оказаться полезным для того, чтобы ориентировать носик по направлению входящего потока и предотвратить отрыв пограничного слоя.

Одной из наиболее важных характеристик решеток профилей является угол поворота потока, который определяется как

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Полезно рассмотреть как влияет изменение угла поворота потока на характеристики решетки. Для этого зафиксируем угол входа потока и начальное распределение скорости (рис. 3,а). Будем варьировать угол выхода потока  $\alpha_2$ . Результаты расчетов для  $\alpha_1 = 30^\circ$  и скорости  $V_1 = 0,68$  представлены в таблице. Полученные профили показаны на рис. 6.

Таблица

Номер профиля	$\alpha_2$	$\alpha$	$d$	$l$	$c$
1	$30^\circ$	$4,456^\circ$	$\infty$	0,898	0,078
2	$25^\circ$	$7,022^\circ$	3,766	0,918	0,082
3	$20^\circ$	$9,945^\circ$	1,960	0,933	0,087
4	$15^\circ$	$13,007^\circ$	1,352	0,944	0,092
5	$10^\circ$	$16,567^\circ$	1,043	0,946	0,100

Приняты следующие обозначения:  $\alpha$  – угол атаки набегающего потока (определяется как угол между направлением набегающего потока и хордой профиля),  $l$  – длина профиля,  $c$  – толщина профиля.

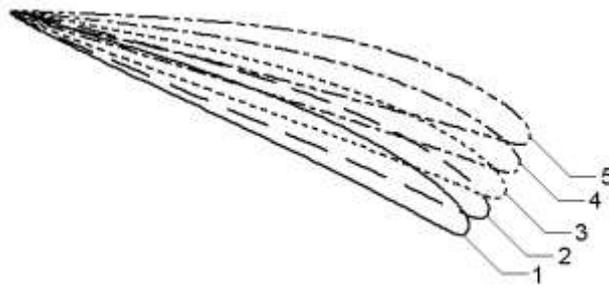
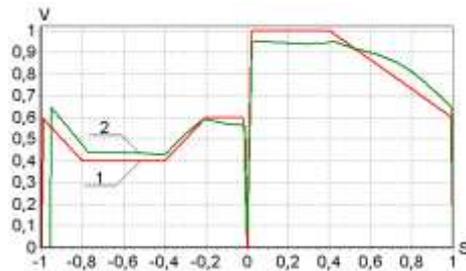


Рис. 6

На основании проведенных расчетов можно сказать, что с увеличением угла поворота потока уменьшается период решетки. При этом профиль больше «ориентируется» по выходному углу, и вследствие этого растет угол атаки.

Следует принять во внимание, что большой угол атаки может приводить к развитому отрыву пограничного слоя, что в свою очередь приводит к резкому возрастанию потерь полного давления в решетке. Для уменьшения угла атаки и обеспечения большого угла поворота потока можно использовать профили с изгибом.

Изгиб профиля определяется наличием «провала» в распределении скорости на стороне давления (рис 7,а). Наличие такого провала увеличивает циркуляцию скорости на профиле и, следовательно, позволяет увеличить период решетки. Сохраняя период решетки неизменным, можно увеличить угол поворота потока. При этом реализуется изогнутый профиль (рис. 7,б).



а)



б)

Рис. 7

**Выводы.** Построена методика решения обратных задач гидродинамики решеток профилей в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. С использованием данной методики проведено построение плоских решеток профилей по заданным параметрам потока на бесконечности и заданному распределению скорости жидкости на неизвестной границе профиля. Установлены следующие основные закономерности изменения геометрических параметров решеток в зависимости от задаваемых краевых условий.

Влияние распределения скорости около критических точек на форму кромок профиля проявляется в том, что производная скорости по длине дуги профиля в критической точке определяет радиус закругления кромки профи-

ля и толщину профиля в целом. При этом с увеличением указанной производной уменьшается радиус закругления кромки профиля и его толщина.

С увеличением задаваемого угла поворота потока уменьшается период решетки, изменяется угол установки профиля таким образом, что профиль больше ориентируется по направлению выхода потока. При этом увеличивается длина и толщина профиля, однако в целом форма профиля меняется слабо.

Изгиб профиля определяется наличием «провала» в распределении скорости на стороне давления. Подобное распределение скорости позволяет строить решетки, обеспечивающие большие углы поворота потока.

В дальнейшем предполагается модифицировать данную методику с учетом приближения Чаплыгина для построения решеток профилей, обтекаемых дозвуковым сжимаемым потоком.

1. *Campbell R.L.* An Approach to Constrained Aerodynamic Design With Application to Airfoils // NASA TP-3260. – 1992. – 22p.
2. *Costello G.R.* Method of designing cascade blades with prescribed velocity distributions in compressible potential flows // NACA Report N978. – 1949. – 11p.
3. *Goldstein A.W., Jerison M.* Isolated and cascade airfoils with prescribed velocity distribution // NACA Report N689. – 1947. – 21p.
4. *Hansen A.G., Yohner P.L.* A numerical procedure for designing cascade blades with prescribed velocity distributions // NACA TN-2101. – Cleveland: Lewis Flight Propulsion laboratory. – 1950. – 52p.
5. *Korn D.* Numerical design of Transonic cascades // Journal of computational physics. – 1978. – V.29. – P.20 – 34.
6. *Lighthill M.J.* A mathematical method of cascade design // Reports and Memoranda. – 1945. – N2104.
7. *Lighthill M.J.* A new method of two-dimensional aerodynamic design // Reports and Memoranda. – 1945. – N2112.
8. *Mangler W.* Die Berechnung eines Tragflügel profiles mit vorgeschriebener Druckverteilung // Jahrb. Deutsch. Luftfahrtforschung. – 1938. – Bd.1. – S.46 – 53.
9. *Mutterperl W.* A solution of the direct and inverse potential problems for arbitrary cascades of airfoils // NACA ARR No L4K22b. – Langley: Memorial Aeronautical Laboratory. – 1944. – 51p.
10. *Naiman Irven.* Numerical evaluation by harmonic analysis of the e-function of the Theodorsen arbitrary-airfoil potential theory // NACA ARR-L5H18. – Langley: Memorial Aeronautical Laboratory. – 1946. – 9p.
11. *Sanz J.M.* Design of supercritical cascades with high solidity // AIAA Journal. – 1983. – V.21, N9. – P.1289 – 1293.
12. *Дорфман Л.А.* Обратная задача для решетки профилей // ПММ. – 1954. – Вып. 5. – С.637 – 640. Замечания к статье – ПММ. – 1955. – Вып. 3. – С. 384.
13. *Дорфман Л.А.* Расчет безвихревого обтекания решеток профилей и построение решеток по заданному распределению скоростей на профилях // ПММ. – 1952. – Вып. 5. – С.599 – 612.
14. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Потапов А.В.* Обратные краевые задачи аэродинамики. Теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. – Магадан, 2006. – 436 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736с.
16. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512с.

Институт технической механики  
НАН Украины и НКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 19.03.2008,  
в окончательном варианте 14.04.08