

## МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Предложена эффективная методика численного моделирования внутренних двумерных турбулентных течений газа. В качестве исходных уравнений выбрана система осредненных уравнений Навье–Стокса, замкнутая с помощью уравнения модели турбулентности и записанная в обобщенных криволинейных координатах. Численное интегрирование системы исходных уравнений выполнено на основе построенной трехслойной неявной схемы типа Бима–Уорминга второго порядка точности по времени, записанной в криволинейных координатах. Эффективность предложенной методики подтверждается возможностью выбора больших чисел Куранта при проведении расчетов и удовлетворительным согласованием результатов численных исследований с экспериментальными данными.

Запропоновано ефективну методику чисельного моделювання внутрішніх двовимірних турбулентних течій газу. В якості вихідних рівнянь вибрано систему осереднених рівнянь Нав'є–Стокса, що замкнена за допомогою рівняння моделі турбулентності та яка записана в узагальнених криволінійних координатах. Чисельне інтегрування системи вихідних рівнянь виконано на основі побудованої тришарової неявної схеми типу Біма–Уормінга другого порядку точності за часом, записаної у криволінійних координатах. Ефективність запропонованої методики підтверджується можливістю вибору великих чисел Куранта при проведенні розрахунків та задовільним узгодженням результатів чисельних досліджень з експериментальними даними.

An effective technique for a numerical simulation of internal two-dimensional turbulent gas flows is proposed. The set of the averaged Navier–Stokes equations, which is closed by the equation of the turbulence model and written in the generalized curvilinear coordinates, is chosen as a set of original equations. The numerical integration of the set of original equations is carried out on a basis of implicit built three-layered scheme of the Beam–Warming type, which has a second order in time and is written in the curvilinear coordinates. The effectiveness of the proposed technique is confirmed by the opportunity of choosing high CFL numbers in calculating and by the satisfactory agreement of the numerical research results with the experimental data.

**Введение.** В связи с интенсивным развитием различных отраслей машиностроения большое внимание уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию газодинамических процессов, реализующихся в различных образцах современной техники. Достигнутый в настоящее время уровень развития численных методов позволяет использовать их в инженерной практике наряду с натурным экспериментом. Необходимость достаточно точного предсказания как локальных, так и интегральных характеристик исследуемых газодинамических процессов требует применения наиболее полных математических моделей на основе системы осредненных уравнений Навье–Стокса, замкнутой с помощью уравнений модели турбулентности. Используемая при этом методика численного интегрирования данной системы должна быть достаточно точной и экономичной с точки зрения вычислительных затрат.

Анализ литературных источников [1 – 5] показывает, что ни одна из существующих методик численного моделирования не имеет значительного преимущества над остальными по всей совокупности показателей эффективности, а стоимость коммерческих вариантов достаточно эффективных методик на мировом рынке программной продукции доходит до нескольких сот тысяч долларов США. Исходя из изложенного, актуальной задачей представляется разработка методики численного моделирования внутренних турбулентных течений газа на основе наиболее эффективных подходов, описанных в литературе, что и составляет цель настоящей работы.

**Система исходных уравнений.** В рамках предлагаемой методики турбулентное течение газа описывается системой осредненных уравнений Навье–Стокса, записанных в обобщенных криволинейных координатах  $(\xi, \eta)$  с якобианом преобразования  $J$  [6].

В данном случае не имеет принципиальной разницы непосредственный выбор модели турбулентности, поэтому запишем общий вид однопараметрической модели для переноса некоторого параметра турбулентности  $\tilde{v}$ . Обобщение построенной методики на многопараметрические модели турбулентности не представляет особой сложности. Тогда система исходных уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} + \hat{H}, \quad (1)$$

где  $\hat{U} = \frac{1}{J} U$ ;  $\hat{H} = \frac{1}{J} H$ ;  $\hat{E} = \frac{1}{J} (E \xi_x + F \xi_y)$ ;  $\hat{F} = \frac{1}{J} (E \eta_x + F \eta_y)$ ;

$$\hat{E}_v = \frac{1}{J} (E_v \xi_x + F_v \xi_y); \quad F_v = \frac{1}{J} (E_v \eta_x + F_v \eta_y);$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \\ \rho \tilde{v} \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \\ \rho u \tilde{v} \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \\ \rho v \tilde{v} \end{pmatrix};$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \\ \mu_{eff} \tilde{v}_x \end{pmatrix}; \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y \\ \mu_{eff} \tilde{v}_y \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{turb} \end{pmatrix};$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xx}^T; \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{xy}^T;$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{yy}^T; \quad q_x = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Производные  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  рассчитываются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

В уравнениях приняты следующие обозначения:  $u, v$  – декартовы компоненты вектора скорости;  $\rho, p, e, T$  – плотность, давление, полная энергия и температура газа соответственно;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;

$\lambda_T$  – коэффициент теплопроводности, учитывающий влияние турбулентного переноса,  $\tau_{i,j}^T$  – тензоры рейнولدсовых напряжений;  $\mu_{eff}$  – диффузионный коэффициент модели турбулентности;  $H_{turb}$  – источниковый член модели турбулентности, содержащий члены генерации, диссипации, диффузии и т.д.

**Численный алгоритм.** Выражение для семейства трехслойных неявных схем в дельта-форме [6] для системы уравнений (1) с шагом интегрирования  $\Delta t$  запишется как

$$\Delta \hat{U}^n = \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{U}^n + \frac{\Delta t}{1+\theta_2} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^n + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta \hat{U}^{n-1} + O \left[ \left( \theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2 \right) \Delta t^2 \right], \quad (2)$$

где  $\Delta \hat{U}^n = \hat{U}^{n+1} - \hat{U}^n$ ;  $\theta_1, \theta_2$  – параметры схемы;  $n$  – номер временного слоя. Как следует из системы (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^n &= \frac{\partial \hat{E}_v^n - \hat{E}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v^n - \hat{F}^n}{\partial \eta} + \hat{H}^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{U}^n &= \frac{\partial \Delta \hat{E}_v^n - \Delta \hat{E}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta \hat{F}_v^n - \Delta \hat{F}^n}{\partial \eta} + \Delta \hat{H}^n. \end{aligned}$$

Проводя линеаризацию конвективных слагаемых и источникового члена относительно предыдущего временного слоя, получим:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E}^n &= \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{U}} \right)^n \Delta \hat{U}^n = \left( \frac{\partial (\mathbf{E} \xi_x + \mathbf{F} \xi_y)}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \Delta \hat{U}^n = \\ &= (\mathbf{A} \xi_x + \mathbf{B} \xi_y)^n \Delta \hat{U}^n = \hat{\mathbf{A}}^n \Delta \hat{U}^n, \\ \Delta \hat{F}^n &= \hat{\mathbf{B}}^n \Delta \hat{U}^n, \\ \Delta \hat{H}^n &= \hat{\mathbf{K}}^n \Delta \hat{U}^n, \end{aligned}$$

где  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \xi_x + \mathbf{B} \xi_y$ ;  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \eta_x + \mathbf{B} \eta_y$ ;  $\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{U}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}}$  – матрицы Якоби.

Для линеаризации диффузионных членов представим их в виде [2]

$$\begin{aligned} \hat{E}_v &= \hat{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) + \hat{V}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta), \\ \hat{F}_v &= \hat{W}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) + \hat{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) &= \frac{1}{J} \left( V_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) \xi_x^2 + (V_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) + W_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi)) \xi_x \xi_y + W_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) \xi_y^2 \right); \\ \hat{V}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) &= \frac{1}{J} \left( V_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) \xi_x \eta_x + V_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) \xi_x \eta_y + W_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) \xi_y \eta_x + W_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) \xi_y \eta_y \right); \\ \hat{W}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) &= \frac{1}{J} \left( V_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) \xi_x \eta_x + V_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) \eta_x \xi_y + W_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) \xi_x \eta_y + W_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi) \xi_y \eta_y \right); \end{aligned}$$

$$\hat{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) = \frac{1}{J} \left( \hat{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) \eta_x^2 + (\hat{V}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) + \hat{W}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta)) \eta_y \eta_x + \hat{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\eta) \eta_y^2 \right).$$

Тогда линеаризация выражения  $\Delta \hat{\mathbf{E}}_v^n$  будет иметь вид:

$$\Delta \hat{\mathbf{E}}_v^n = \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}^n + \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi} \Delta \mathbf{U}_\xi^n + \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}^n + \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta} \Delta \mathbf{U}_\eta^n.$$

Перейдя к переменным  $\hat{\mathbf{U}}$  посредством замены  $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{J} \Delta \hat{\mathbf{U}}$  и произведя несложные преобразования, можно получить:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{E}}_v^n &= \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi} \right) \right\} \Delta \hat{\mathbf{U}}^n + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mathbf{J} \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi} \Delta \hat{\mathbf{U}}^n \right) + \\ &+ \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta} \right) \right\} \Delta \hat{\mathbf{U}}^n + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mathbf{J} \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta} \Delta \hat{\mathbf{U}}^n \right) = \\ &= \mathbf{PK} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}^n + \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{RK} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{SK} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}^n), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } \mathbf{PK} = \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial \hat{V}_1 + \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta} \right) \right\}; \quad \mathbf{RK} = \mathbf{J} \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi};$$

$$\mathbf{SK} = \mathbf{J} \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta}.$$

Аналогично:

$$\Delta \hat{\mathbf{F}}_v^n = \mathbf{PE} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}^n + \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{RE} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{SE} \cdot \Delta \hat{\mathbf{U}}^n),$$

$$\text{где } \mathbf{PE} = \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial \hat{W}_1 + \hat{W}_2}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \hat{W}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta} \right) \right\}; \quad \mathbf{RE} = \mathbf{J} \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial \mathbf{U}_\xi};$$

$$\mathbf{SE} = \mathbf{J} \frac{\partial \hat{W}_2}{\partial \mathbf{U}_\eta}.$$

Матрицы Якоби  $\mathbf{RK}$ ,  $\mathbf{SK}$ ,  $\mathbf{RE}$ ,  $\mathbf{SE}$  диффузионных членов легко можно получить с использованием матриц  $\frac{\partial \hat{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi)}{\partial \mathbf{U}_\xi}$ ,  $\frac{\partial \hat{V}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi)}{\partial \mathbf{U}_\xi}$ ,  $\frac{\partial \hat{W}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi)}{\partial \mathbf{U}_\xi}$ ,

$$\frac{\partial \hat{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_\xi)}{\partial \mathbf{U}_\xi}.$$

Выражения для матриц Якоби  $\mathbf{PK}$  и  $\mathbf{PE}$  легко получаются из выражения  $-(\mathbf{RK} + \mathbf{SK})$  и  $-(\mathbf{RE} + \mathbf{SE})$  соответственно путем замены диффузионных коэффициентов на их производные в соответствующих направлениях.

В конечном итоге, линеаризованная форма схемы (2) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& \Delta \hat{U}^n + \frac{\theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \hat{A}^n \Delta \hat{U}^n - \mathbf{PK} \cdot \Delta \hat{U}^n - \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{RK} \cdot \Delta \hat{U}^n) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{SK} \cdot \Delta \hat{U}^n) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \hat{B}^n \Delta \hat{U}^n - \mathbf{PE} \cdot \Delta \hat{U}^n - \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{RE} \cdot \Delta \hat{U}^n) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{SE} \cdot \Delta \hat{U}^n) \right) - \hat{K}^n \Delta \hat{U}^n \right\} = \quad (3) \\
& = \frac{\Delta t}{1 + \theta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (-\hat{E}^n + \hat{E}_v^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\hat{F}^n + \hat{F}_v^n) \right\} + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta \hat{U}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Можно получить пространственно-факторизованную форму уравнения (3). Для этого в выражениях  $\frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{SK} \cdot \Delta \hat{U}^n)$  и  $\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{RE} \cdot \Delta \hat{U}^n)$  положим  $\Delta \hat{U}^n = \Delta \hat{U}^{n-1} + O(\Delta t^2)$ . В результате получим неявную факторизованную схему с той же точностью по времени:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathbf{I} + \frac{\theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{A}^n - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{PK} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{RK} \right) \right\} \times \\
& \times \left\{ \mathbf{I} + \frac{\theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{B}^n - \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{PE} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mathbf{SE} \right) \right\} \times \quad (4) \\
& \times \left\{ \mathbf{I} - \frac{\theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \hat{K} \right\} \Delta \hat{U}^n = \mathbf{RHS}(3) + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \{ (\mathbf{SK} + \mathbf{RE}) \Delta \hat{U}^{n-1} \}.
\end{aligned}$$

Для повышения устойчивости схемы (4) аппроксимацию линеаризованных конвективных потоков будем проводить с учетом направления распространения возмущений. Матрицы Якоби можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \mathbf{T}_\xi \hat{\lambda}_\xi \mathbf{T}_\xi^{-1} = \mathbf{T}_\xi (\hat{\lambda}_\xi^+ + \hat{\lambda}_\xi^-) \mathbf{T}_\xi^{-1} = \\
&= \mathbf{T}_\xi \hat{\lambda}_\xi^+ \mathbf{T}_\xi^{-1} + \mathbf{T}_\xi \hat{\lambda}_\xi^- \mathbf{T}_\xi^{-1} = \hat{A}^+ + \hat{A}^-,
\end{aligned}$$

$$\hat{B} = \mathbf{T}_\eta \hat{\lambda}_\eta \mathbf{T}_\eta^{-1} = \mathbf{T}_\eta \hat{\lambda}_\eta^+ \mathbf{T}_\eta^{-1} + \mathbf{T}_\eta \hat{\lambda}_\eta^- \mathbf{T}_\eta^{-1} = \hat{B}^+ + \hat{B}^-,$$

где  $\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_k^{-1}$ ,  $k = \{\xi, \eta\}$  – матрицы правых и левых собственных векторов;  $\hat{\lambda}_\xi$ ,  $\hat{\lambda}_\eta$  – диагональные матрицы собственных значений матриц  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ;  $\hat{\lambda}_k^\pm$ ,  $k = \{\xi, \eta\}$  – диагональные матрицы, состоящие только из положительных (отрицательных) собственных значений матриц  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ .

Тогда пространственные производные можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{A} \Delta \hat{U}) = \frac{\partial}{\partial \xi} ((\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \Delta \hat{U}) = \delta^+ (\hat{A}^- \Delta \hat{U}) + \delta^- (\hat{A}^+ \Delta \hat{U}),$$

где  $\delta^-, (\delta^+)$  – разностный оператор с направленной разностью назад, (вперед). В данной работе эти операторы представляют собой односторонние разности и имеют первый порядок по пространству. При этом порядок левой части схемы составит  $O(\Delta t \Delta h)$  (где  $\Delta h$  – характерный шаг по простран-

ву), что при умеренных числах Куранта можно считать вторым порядком по пространству.

Производные в правой (явной) части уравнений (3), (4) аппроксимируются методом контрольного объема. Метрические коэффициенты на гранях рассчитываются по соотношениям вида  $(\xi_x/J)_{i+1/2} = \frac{1}{2}((\xi_x/J)_i + (\xi_x/J)_{i+1})$ , что обеспечивает точную математическую замкнутость конечных объемов как в физическом, так и в метризованном пространстве [6, 7]. Для определения конвективных потоков на гранях контрольного объема применяется схема Роу [8, 9]:

$$\hat{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \hat{E}(U_R) + \hat{E}(U_L) - |\hat{A}|(U_R - U_L) \right\},$$

где  $|\hat{A}| = T_\xi |\lambda_\xi| T_\xi^{-1}$  – матрица Якоби с абсолютными величинами собственных значений;  $|\lambda_\xi|$  – диагональная матрица модулей собственных значений  $\lambda_\xi$ ;  $U_R, U_L$  – векторы переменных справа и слева от грани контрольного объема.

Полагая  $U_R = U_{i+1}$ ,  $U_L = U_i$ , получим оригинальную схему Роу, обладающую первым порядком точности по пространству. Повышение порядка точности может быть достигнуто за счет применения интерполяционных процедур. Для обеспечения консервативности схемы матрица  $|\hat{A}|$  рассчитывается по параметрам  $U_R, U_L$  с использованием осреднения Роу [8].

**Постановка граничных условий.** Рассмотрим численную реализацию граничных условий для внутренних течений газа. Особый интерес представляет собой реализация граничных условий на входной границе, а также на твердых поверхностях. В силу того, что разностная схема состоит из явной и неявной частей, необходима явная и неявная постановка граничных условий.

Пусть на входе заданы: полное давление  $p^*$ , полная температура  $T^*$ , угол входа потока  $\beta_1$ , а также распределение параметра турбулентности  $\tilde{v}$  как функции консервативных переменных  $f(U)$ . Запишем явную постановку граничных условий для входной границы:

$$\begin{cases} \rho_b = \rho_{ex} \\ (\rho u)_b = \rho_{ex} V (\rho_{ex}/\rho^*) \cos \beta_1 \\ (\rho v)_b = \rho_{ex} V (\rho_{ex}/\rho^*) \sin \beta_1 \\ e_b = \rho_{ex} C_V T (\rho_{ex}/\rho^*) + 0,5 \rho_{ex} V^2 (\rho_{ex}/\rho^*) \\ (\rho \tilde{v})_b = f(\rho_{ex}, (\rho u)_{ex}, (\rho v)_{ex}, e_{ex}) \end{cases}, \quad (5)$$

где  $A_b$  – значение величины  $A$ , задаваемое на границе области;  $A_{ex}$  – значение величины  $A$ , экстраполируемое из области;  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$  – модуль вектора скорости.

Выражения для  $V\left(\frac{\rho_{ex}}{\rho^*}\right)$  и  $T\left(\frac{\rho_{ex}}{\rho^*}\right)$ , которые можно получить с использованием газодинамических функций [10], имеют вид:

$$V\left(\rho_{ex}/\rho^*\right) = \sqrt{\frac{2\gamma RT^*}{\gamma-1} \left[ 1 - \left(\frac{\rho_{ex}}{\rho^*}\right)^{\gamma-1} \right]^{1/2}}, \quad (6)$$

$$T\left(\rho_{ex}/\rho^*\right) = T^* \cdot \left(\rho_{ex}/\rho^*\right)^{\gamma-1}. \quad (7)$$

Неявную постановку граничных условий на входной границе можно получить, преобразуя систему (5) в дельта-форму:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\rho_b = \Delta\rho_{ex} \\ \Delta(\rho u)_b = \left[ V\left(\rho_{ex}/\rho^*\right) + \frac{dV\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)\rho_{ex}}{d\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)\rho^*} \right] \cos\beta_1 \Delta\rho_{ex} \\ \Delta(\rho v)_b = \left[ V\left(\rho_{ex}/\rho^*\right) + \frac{dV\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)\rho_{ex}}{d\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)\rho^*} \right] \sin\beta_1 \Delta\rho_{ex} \\ \Delta e_b = \Delta\rho_{ex} \left[ C_V T\left(\rho_{ex}/\rho^*\right) + \frac{V^2\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)}{2} \right] + \\ + \frac{\rho_{ex}}{\rho^*} \left[ C_V \frac{dT\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)}{d\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)} + V\left(\rho_{ex}/\rho^*\right) \frac{dV\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)}{d\left(\rho_{ex}/\rho^*\right)} \right] \Delta\rho_{ex} \\ \Delta(\rho\tilde{v})_b = \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial\rho_{ex}} \Delta\rho_{ex} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial(\rho u)_{ex}} \Delta(\rho u)_{ex} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial(\rho v)_{ex}} \Delta(\rho v)_{ex} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial e_{ex}} \Delta e_{ex} \end{array} \right. \quad (8)$$

В векторной форме систему (8), с учетом выражений (6), (7), можно представить как

$$J_b \mathbf{I} \Delta \hat{\mathbf{U}}_b = J_{ex} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left[ B_3 - \frac{1}{2} B_3 (\gamma - 1) B_2 \right] B_1 \cos\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left[ B_3 - \frac{1}{2} B_3 (\gamma - 1) B_2 \right] B_1 \sin\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma R T^* \left( \frac{1}{\gamma - 1} - B_2 \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \rho_{ex}} & \frac{\partial f}{\partial (\rho u)_{ex}} & \frac{\partial f}{\partial (\rho v)_{ex}} & \frac{\partial f}{\partial e_{ex}} & 0 \end{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{ex},$$

где  $B_1 = \sqrt{\frac{2\gamma R T^*}{\gamma - 1}}$ ;  $B_2 = \left(\frac{\rho R T^*}{p^*}\right)^{\gamma-1}$ ;  $B_3 = \sqrt{1 - B_2}$ .

Говоря о постановке граничных условий на твердой поверхности, следует отметить, что расчетная сетка располагалась таким образом, чтобы ее

граничные узлы лежали на твердой поверхности. На данной поверхности задаются условия прилипания, а также условия равенства нулю тепловых потоков:

$$\begin{cases} (\rho u)_b = 0 \\ (\rho v)_b = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \\ (\rho \tilde{v})_b = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

где  $n$  – нормаль к твердой поверхности.

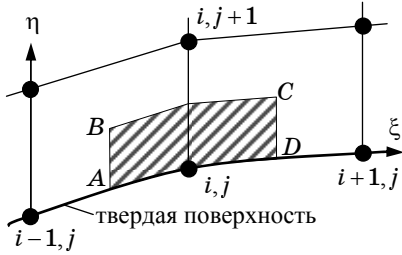


Рис. 1

Из (9) видно, что описанные граничные условия не позволяют получить выражение для плотности на твердой поверхности. Для его получения в рамках настоящей работы предлагается решать уравнение неразрывности с использованием «половинного» контрольного объема, представленного на рис. 1.

Авторы руководствовались тем, что решение уравнения неразрывности позволяет получить недостающее граничное условие в динамической форме без наложения дополнительных условий на течение.

Тогда из выражения (3) с учетом (1) можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho_b}{J_b} + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\Delta(\rho u) \xi_x + \Delta(\rho v) \xi_y}{J} \right)_b + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\Delta(\rho u) \eta_x + \Delta(\rho v) \eta_y}{J} \right)_b = \\ = \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho u \xi_x + \rho v \xi_y}{J} \right)_b + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho u \eta_x + \rho v \eta_y}{J} \right)_b. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрируя (10) по контрольному объему, полагая потоки на гранях  $AB$  и  $CD$  равными нулю в силу условий прилипания, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho_b}{J_b} + \Delta t \left[ \Delta(\rho u)_{BC} \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{BC} + \Delta(\rho v)_{BC} \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{BC} \right] = \\ = \Delta t \left[ (\rho u)_{BC} \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{BC} + (\rho v)_{BC} \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{BC} \right]. \end{aligned}$$

Полагая  $\Delta(\rho u)_{BC} = \frac{1}{2} [\Delta(\rho u)_{i,j+1} + \Delta(\rho u)_{i,j}] = \frac{1}{2} \Delta(\rho u)_{i,j+1}$  и

$\Delta(\rho v)_{BC} = \frac{1}{2} \Delta(\rho v)_{i,j+1}$ , получим



$$\begin{aligned} \frac{\Delta\rho_b}{J_b} + \frac{\Delta t}{2} \left[ \Delta(\rho u)_{i,j+1} \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{BC} + \Delta(\rho v)_{i,j+1} \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{BC} \right] = \\ = \Delta t \left[ (\rho u)_{BC} \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{BC} + (\rho v)_{BC} \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{BC} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Конвективные потоки в правой части (11) рассчитываются, как и ранее, с использованием схемы Роу.

Объединяя полученное выражение (11) с системой граничных условий (9), переписанных в дельта-форме, получим выражение для граничных условий на твердой границе, которое в векторной форме имеет вид:

$$A\hat{U}_{i,j} + B\hat{U}_{i,j+1} = F,$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{e_b}{\rho_b^2} J_b & 0 & 0 & \frac{J_b}{\rho_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} RHS(11) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{BC} & \Delta t \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{BC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left( \frac{e}{\rho^2} - \frac{u^2 + v^2}{\rho} \right)_{i,j+1} & \left( \frac{u}{\rho} \right)_{i,j+1} & \left( \frac{v}{\rho} \right)_{i,j+1} & -\frac{1}{\rho_{i,j+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Верификация.** С целью оценки работоспособности предлагаемой методики численного моделирования внутренних турбулентных течений газа, основанной на численном интегрировании системы осредненных уравнений Навье–Стокса, проведено численное моделирование течения в трансзвуковом диффузоре Сейбена [11]. Важными особенностями данного течения, осложняющими проведение расчета, являются взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем и наличие положительного градиента давления за скачком. Для моделирования турбулентного течения применялась модель турбулентности SALSA [12], а порядок схемы Роу был повышен за счет интерполирования консервативных переменных на грань контрольного объема по квазимонотонной TVD схеме ISNAS [13], обладающей третьим порядком точности по пространственным переменным.

Геометрические параметры диффузора можно найти в работе [11]. На рис. 2 представлена используемая расчетная сетка, состоящая из 200x150 ячеек со сгущением к границам расчетной области,  $y^+ < 0,3$ .



Рис. 2

Аналогично работе [14], было проведено численное моделирование режимов «слабого» и «сильного скачка». Режим «слабого скачка» реализуется при перепаде давления  $p_2 / p_1^* = 0,82$ . На рис. 3 представлено распределение чисел Маха в диффузоре, полученное в результате численного моделирования.

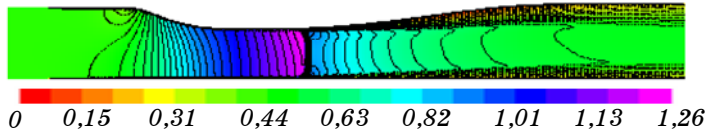


Рис. 3

В результате численного моделирования получены распределения давления по верхней (рис. 4, а) и нижней (рис. 4, б) стенкам диффузора. По оси абсцисс отложена продольная координата  $x$ , отнесенная к высоте критического сечения диффузора  $h^*$ .

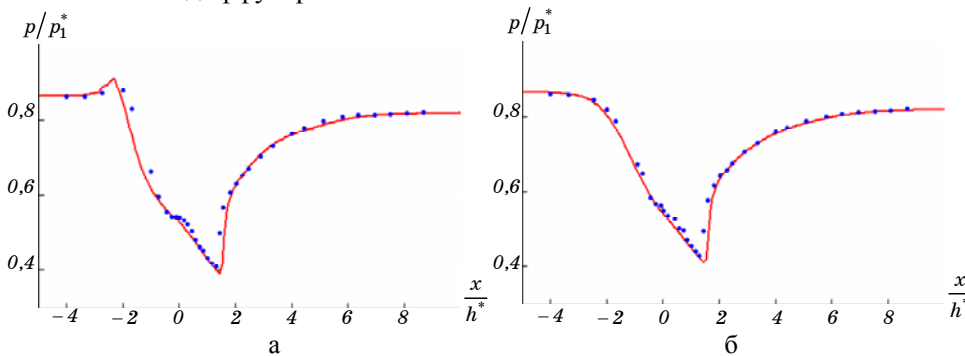


Рис. 4

Также в результате численного моделирования получены профили скорости в различных сечениях диффузора (рис. 5, а – профиль скорости в сечении  $x/h^* = 2,882$ ; рис. 5, б –  $x/h^* = 4,611$ ; рис. 5, в –  $x/h^* = 6,34$ ; рис. 5, г –  $x/h^* = 7,493$ ). Их сопоставление с экспериментальными данными (обозначенными точками), приведенными в работе [14], представлено на рис. 5.

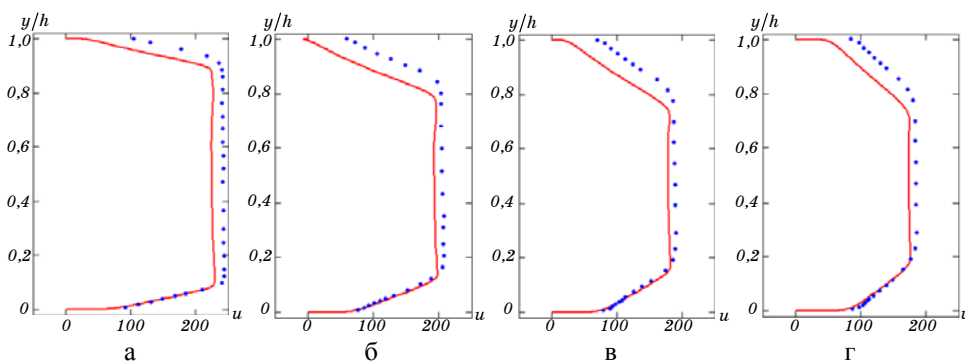


Рис. 5

Режим «сильного скачка» реализуется в диффузоре Сейбена при перепаде давления  $p_2/p_1^* = 0,72$ . При численном моделировании данного режима течения применялась расчетная сетка, приведенная на рис. 1. Полученное в результате численного моделирования распределение чисел Маха в диффузоре показано на рис. 6.

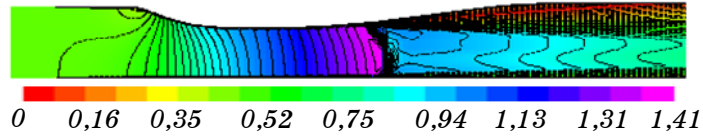


Рис. 6

Получены распределения давления по верхней (рис. 7, а) и нижней (рис. 7, б) стенке диффузора.

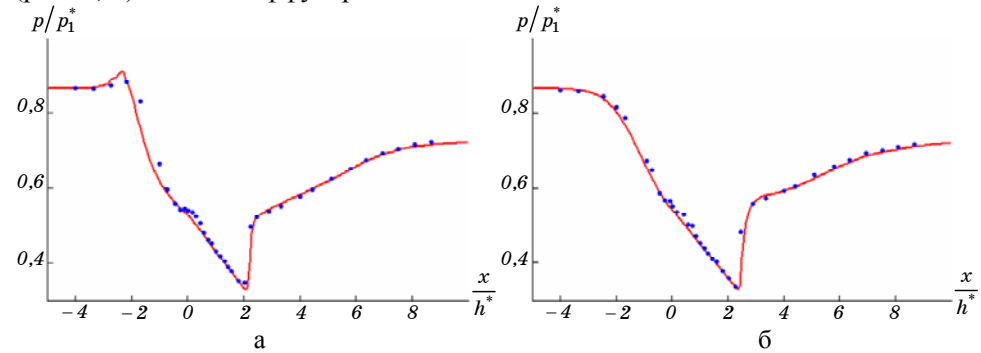


Рис. 7

Получены профили скорости в сечениях диффузора (рис. 8).

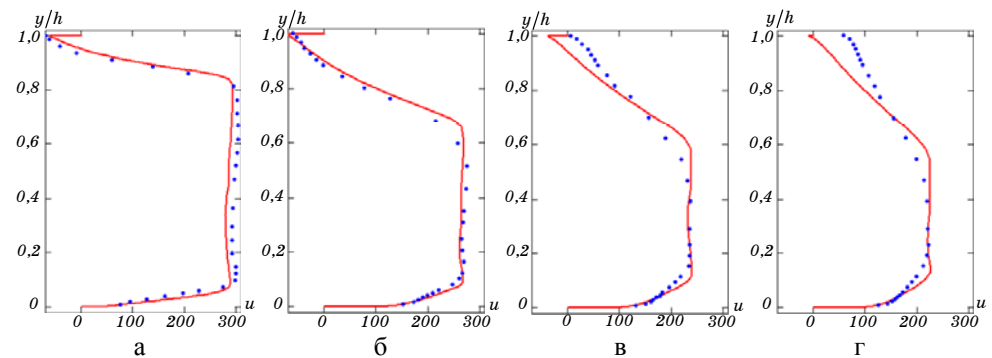


Рис. 8

Анализ результатов расчетов, приведенных на рис. 3 – рис. 8, показывает, что они удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными [11], а также результатами работы [14]. При проведении расчетов наибольшее число Куранта, рассчитываемое по формуле

$$CFL = \max \left( \frac{|u\xi_x + v\xi_y| + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{\Delta\xi} \Delta t, \frac{|u\eta_x + v\eta_y| + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}}{\Delta\eta} \Delta t \right),$$

где  $\Delta\xi, \Delta\eta$  – пространственные шаги в направлениях  $\xi, \eta$ , достигало значения 1500.

**Заключение.** В настоящей работе предложена методика численного моделирования внутренних двумерных турбулентных течений газа, основанная на численном интегрировании системы осредненных уравнений Навье–Стокса, замкнутой с помощью уравнения модели турбулентности.

Отличительными особенностями данной методики являются: использование схемы аппроксимации конвективных членов основных уравнений, разрешающей скачки уплотнения с единственной внутренней точкой; применение линеаризации диффузионных членов основных уравнений по схеме типа Бима–Уорминга, записанной в криволинейных координатах; реализация граничных условий на твердых поверхностях, состоящая в решении уравнения неразрывности с использованием прилежащего к поверхности «половинного» контрольного объема.

Выполнена оценка работоспособности предложенной методики путем численного моделирования двух режимов течения в трансзвуковом диффузоре Сейбена. Получены распределения давления по верхней и нижней стенке, а также профили скорости в различных сечениях диффузора. Эффективность методики подтверждается возможностью выбора больших (свыше тысячи) чисел Куранта при проведении расчетов и приемлемым согласованием результатов расчета с имеющимися экспериментальными данными.

1. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэродинамике и тепломассообмене / А. А. Приходько. – Киев : Наукова думка, 2003. – 382 с.
2. Иванов М. Я. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье–Стокса / М. Я. Иванов, В. Г. Крупа, Р. З. Нигматулин // ЖВМ и МФ. – 1989. – Т. 29, № 6. – С. 888 – 901.
3. Кваша Ю. А. Расчет аэродинамических характеристик компрессорных решеток / Ю. А. Кваша, А. А. Дячкин // Техническая механика. – 2001. – № 1. – С. 58 – 63.
4. Русанов А. В. Математическое моделирование нестационарных вязких пространственных течений в проточных частях турбомашин : дис. ... д-ра техн. наук : 05.05.16 / Андрей Викторович Русанов. – Х., 2005. – 396 с.
5. Nah C. Calculation of Three-Dimensional Viscous Flows in Turbomachinery with an Implicit Relaxation Method / C. Nah // Journal of Propulsion and Power. – 1987. – Vol. 3, №5. – P. 415 – 422.
6. Tannehill J. C. Computational fluid dynamics and heat transfer (Second edition) / J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher. – New York : Taylor & Francis, 1997. – 785 p.
7. Полевой О. Б. Влияние теплообмена на отрыв пространственного сверхзвукового ламинарного пограничного слоя при обтекании вертикального клина на пластине / О. Б. Полевой, А. А. Приходько // Техническая механика. – 2006. – № 2. – С. 82 – 92.
8. Roe P. L. Approximate Riemann schemes / P. L. Roe // Journal of Computational Physics. – 1981. – Vol. 43. – P. 357 – 372.
9. Roe P. L. Characteristic-based schemes for the Euler equations / P. L. Roe // Annual review of fluid mechanics. – 1986. – Vol. 18. – P. 337 – 365.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1987. – 840 с.
11. Богар Т. Дж. Экспериментальное исследование параметров течения и характерных частот возмущений в сверхзвуковых диффузорах / Т. Дж. Богар, М. Сейбен, Дж. К. Кроутил // Аэрокосмическая техника. – 1984. – Т. 2, № 5. – С. 3 – 14.
12. Restatement of the Spalart-Allmaras eddy-viscosity model in strain-adaptive formulation / T. Rung, U. Bunge, M. Schatz, F. Thiele // AIAA Journal. – 2003. – Vol. 41, N 7. – P. 1396 – 1399.
13. Zijlema M. Higher order flux-limiting methods for steady-state, multidimensional, convection-dominated flow / M. Zijlema, P. Wesseling // Technical Report DUT-TWI-95-131. – Delft : University of Technology. – 1995. – 28 p.
14. Georgiadis N. J. Evaluation of Turbulence Models in the PARC Code for Transonic Diffuser Flows / N. J. Georgiadis, J. E. Drummond, B. P. Leonard. – NASA Technical Memorandum. – 1994. – N 106391. – 12 p.