УДК 51-74:519.65

Л. Г. ЛАПИНА

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Целью работы является разработка способа численного интегрирования стационарных функций, инвариантного по отношению к начальным значениям. Применялись аналитический метод исследований, а также численные методы интегрирования и аппроксимации.

На основании анализа формул многократного интегрирования отмечено, что результаты интегрирования стационарной функции содержат полиномиальный тренд, коэффициентами которого являются постоянные интегрирования. Разработан способ определения этих постоянных, не зависящий от задаваемых начальных значений искомой функции. Алгоритм численного решения описан для случая двукратного интегрирования и удаления линейного тренда из полученных результатов. На примерах интегрирования гармонической и случайной функций показана приемлемость этого алгоритма для расчетов. Отмечена высокая точность получаемых результатов при интегрировании стационарных функций.

Предложенный способ может быть использован при решении многих технических задач, в которых необходимо интегрировать сигналы, полученные в ходе эксперимента. В частности, могут быть определены скорость и перемещение заданных точек механической системы по результатам измерения их ускорений.

Метою роботи є розробка способу чисельного інтегрування стаціонарних функцій, інваріантного по відношенню до початкових значень. Застосовувалися аналітичний метод досліджень, а також чисельні методи інтегрування та апроксимації.

На підставі аналізу формул багаторазового інтегрування відзначено, що результати інтегрування стаціонарної функції містять поліноміальний тренд, коефіцієнтами якого є постійні інтегрування. Розроблено спосіб визначення цих постійних, який не залежить від заданих початкових значень шуканої функції. Алгоритм чисельного розв'язання описаний для випадку дворазового інтегрування та видалення лінійного тренду з отриманих результатів. На прикладах інтегрування гармонічної та випадкової функцій показано прийнятність цього алгоритму для розрахунків. Відзначено високу точність результатів, що отримані при інтегруванні стаціонарних функцій.

Запропонований спосіб може бути використаний при вирішенні багатьох технічних завдань, в яких необхідно інтегрувати сигнали, отримані в ході експерименту. Зокрема, можуть бути визначені швидкість і переміщення заданих точок механічної системи за результатами вимірювання їх прискорень.

The aim is to provide a method of numerical integration of the fixed functions invariant with respect to the initial values. Analytical method applied research, as well as numerical integration methods and approximations .

Based on the analysis of multiple integration formulas noted that the results of the integration of stationary functions include polynomial trend coefficients are constants of integration. A method of determining these constants, independent of the start value of the desired function . Numerical algorithm is described for the case of two-fold integration and removal of the linear trend of the results. The examples of the integration of the harmonic and random functions shows the acceptability of this algorithm for the calculation. The high accuracy of the results in the integration of stationary functions.

The proposed method can be used in many technical applications where it is necessary to integrate the signals received during the experiment. In particular, it can be determined moving speed and the specified points of the mechanical system by measuring its acceleration.

При решении многих технических задач возникает необходимость интегрирования сигналов, полученных в ходе эксперимента. Одним из примеров задач такого типа является определение скорости и перемещения некоторых точек механической системы по результатам измерения их ускорений. Получение однозначного решения осложняется тем обстоятельством, что в результатах интегрирования присутствуют произвольные постоянные, вызывающие смещение вычисленных значений величин от истинных. Удалить это смещение можно, задавая начальное значение искомой функции, однако на практике в большинстве случаев оно заранее неизвестно. Целью данной работы является разработка способа численного определения постоянных интегрирования и однозначного восстановления стационарной функции (т. е. такой, вероятностные характеристики которой не зависят от начала отсчета) и ее производных низших порядков по заданным значениям высшей производной, инвариантного по отношению к начальным значениям.

Теоретическое обоснование. Обозначим вторую производную искомой стационарной функции через $f_2(x)$. Требование стационарности обусловлено тем, что нестационарная функция содержит некоторый тренд, который не может быть восстановлен при интегрировании. При интегрировании $f_2(x)$ имеем

$$\int f_2(x)dx = f_1(x) + C_1 = F_1(x), \tag{1}$$

где $f_1(x)$ – первообразная функции $f_2(x)$, C_1 – произвольная постоянная.

Результат повторного интегрирования функции $f_2(x)$ с учетом соотношения (1) запишется так:

$$\int F_1(x)\,dx = \int (f_1(x) + C_1)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int C_1\,dx = f_0(x) + C_1x + C_0 = F_0(x), \tag{2}$$

где $f_0(x)$ – первообразная функции $f_1(x)$ (искомая функция), C_0 – произвольная постоянная второго интегрирования.

Из формулы (2) видно, что результат двукратного интегрирования функции $f_2(x)$ является суммой искомой функции $f_0(x)$ и линейной зависимости $C_1x + C_0$, т. е. содержит линейный тренд, коэффициентами которого являются постоянные первого и второго интегрирования. Таким образом, задача восстановления функции и ее первой производной по значениям второй производной может быть решена после определения коэффициентов линейного тренда.

В общем случае, если известна производная m-го порядка искомой функции, то результат ее m-кратного интегрирования содержит полиномиальный тренд порядка $m-1$

$$C(x) = C_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{C_j}{j} x^j, \tag{3}$$

а, значит, для восстановления функции $f_0(x)$ необходимо найти коэффициенты этого тренда C_j, $j = \overline{0, m-1}$.

Для определения коэффициентов полинома, присутствующего в функции в виде тренда, можно воспользоваться подходом, предложенным в работе [1] для удаления тренда из временных рядов. Этот подход заключается в аппроксимации имеющегося ряда значений полиномом заданной степени и вычислении его коэффициентов методом наименьших квадратов.

Алгоритм численного решения задачи двукратного интегрирования. Пусть функция f_2 задана таблично – значениями в точках x_i, $i = \overline{1, n}$. Функцию такого вида в дальнейшем будем называть рядом значений. Искомым результатом однократного интегрирования функции $f_2(x_i)$ является ряд значений $f_1(x_i)$, а двукратного – ряд $f_0(x_i)$ (см. формулы (1) и (2)). Во многих технических приложениях аргументом исследуемых функций является время, а в качестве функции f_2 используется ускорение, функции f_1 – скорость, f_0 – перемещение некоторых заданных точек.

Численное интегрирование функции $f_2(x_i)$ может быть выполнено одним из широко известных методов – прямоугольников, трапеций, Симпсона. Каждый из этих методов предполагает задание значения функции в начальной точке x_1, которое определяет значения функции во всех последующих точках x_i, $i = \overline{2,n}$. Метод трапеций является оптимальным по соотношению точности и простоты реализации. В случае, когда обрабатываются экспериментальные данные, заданный ряд представляет собой кусочно-линейную функцию, значит, погрешность интегрирования на шаге в этом методе равна 0, следовательно, и общая погрешность, определяемая суммированием по всем шагам, также равна 0.

Выполнив последовательно два раза численное интегрирование функции $f_2(x_i)$, получим ряды значений $F_1(x_i)$ и $F_0(x_i)$. Начальные значения $F_1(x_1)$ и $F_0(x_1)$ выбираются произвольно. Для удаления линейного тренда из ряда $F_0(x_i)$ его необходимо аппроксимировать прямой $C_1 x_i + C_0$, $i = \overline{1,n}$. Для определения значений коэффициентов этой прямой C_1 и C_0 методом наименьших квадратов удобно воспользоваться следующими формулами:

$$C_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i F_0(x_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} F_0(x_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{4}$$

$$C_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_0(x_i) - C_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Искомые результаты одно- и двукратного численного интегрирования функции $f_2(x_i)$ находятся путем удаления соответственно постоянного смещения и линейного тренда из рядов $F_1(x_i)$ и $F_0(x_i)$:

$$\begin{aligned} f_1(x_i) &= F_1(x_i) - C_1, \\ f_0(x_i) &= F_0(x_i) - C_1 x_i - C_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Точность вычисления элементов рядов $f_1(x_i)$ и $f_0(x_i)$ определяется точностями метода трапеций и метода наименьших квадратов.

Разработанный алгоритм представлен графически на рис. 1. Отметим, что шаги 4 и 5 независимы друг от друга и могут выполняться в любой последовательности.

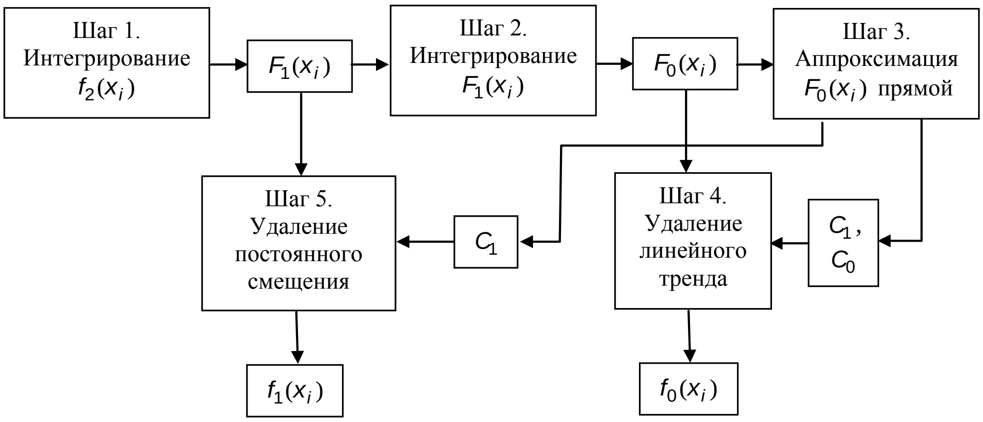

Рис. 1

Иллюстративные примеры. Рассмотрим применение предложенного алгоритма на примерах.

1. *Гармоническая функция*. Пусть

$$f_2(x) = -25\sin(5x+2)\,. \tag{6}$$

Для такой функции несложно получить аналитические выражения $f_1(x)$ и $f_0(x)$, которые будут использованы для оценки результатов численного решения:

$$f_1(x) = 5\cos(5x+2)\,, \tag{7}$$

$$f_0(x) = \sin(5x+2)\,. \tag{8}$$

Ряд $f_2(x_i)$ был сформирован по формуле (6) для значений $x_i = \Delta x \cdot (i-1)$, $\Delta x = 0{,}01$, $i = \overline{1,500}$. Результат интегрирования $f_2(x_i)$ методом трапеций – функция $F_1(x_i)$ – показан на рис. 2 пунктирной линией.

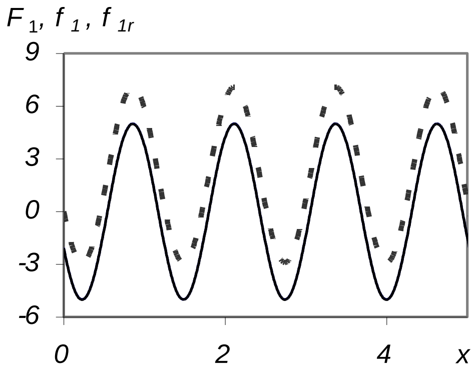

Рис. 2

Результат интегрирования функции $F_1(x_i)$ – функция $F_0(x_i)$ – показан пунктирной линией на рис. 3а. После удаления линейного тренда с коэффициентами C_1 = 2,0919 и C_0 = –0,9634 был получен ряд $f_{0r}(x_i)$, который является решением задачи двукратного интегрирования функции $f_2(x_i)$. Этот ряд изображен на рис. 3а сплошной линией. Здесь же показан ряд $f_0(x_i)$, элементы которого являются точным аналитическим решением решаемой задачи, вычисленным по формуле (8). Отличие между значениями $f_{0r}(x_i)$ и $f_0(x_i)$ для каждого x_i не превышают 6 % от максимального значения этих функций. Чтобы оценить степень близости графиков $f_{0r}(x_i)$ и $f_0(x_i)$, на рис. 3б в увеличенном масштабе показана область, в которой отличия между ними наибольшие.

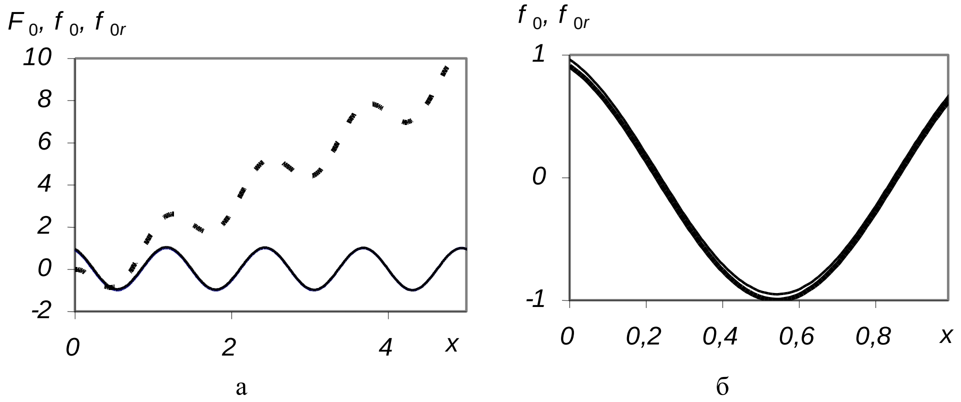

Рис. 3

Удалив постоянное смещение C_1 из ряда $F_1(x_i)$, получим ряд $f_{1r}(x_i)$, который является решением задачи однократного интегрирования функции $f_2(x_i)$. Этот ряд показан на рис. 2 сплошной линией. Здесь же приведен ряд $f_1(x_i)$, элементы которого являются точным аналитическим решением данной задачи, вычисленным по формуле (7). Наибольшее отличие между значениями $f_{1r}(x_i)$ и $f_1(x_i)$ составляет 0,25 % от максимального значения этих функций, и на графике данные линии практически совпадают.

Описанные результаты были получены при интегрировании с начальными значениями, равными 0. Задание других начальных значений приводит к изменению значений $F_1(x_i)$ и $F_0(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, и, следовательно, коэффициентов C_1 и C_0. Искомые ряды $f_{1r}(x_i)$ и $f_{0r}(x_i)$ при этом не изменяются.

2. *Случайная функция*.

В качестве ряда $f_2(x_i)$ были взяты значения второй производной вертикальных неровностей одной из рельсовых нитей некоторого участка железнодорожного пути длиной 800 м. На рис. 4 приведен фрагмент графика процесса $f_{0r}(x_i)$, полученного с помощью предлагаемого алгоритма, и реальной неровности пути, известной априори (процесс $f_0(x_i)$). Наибольшее отличие между значениями $f_{0r}(x_i)$ и $f_0(x_i)$ для каждого x_i в данном примере составляет 3,5 % от максимального значения этих функций.

Таким образом, на примерах гармонического и случайного процессов показана работоспособность предложенного алгоритма при двукратном численном интегрировании.

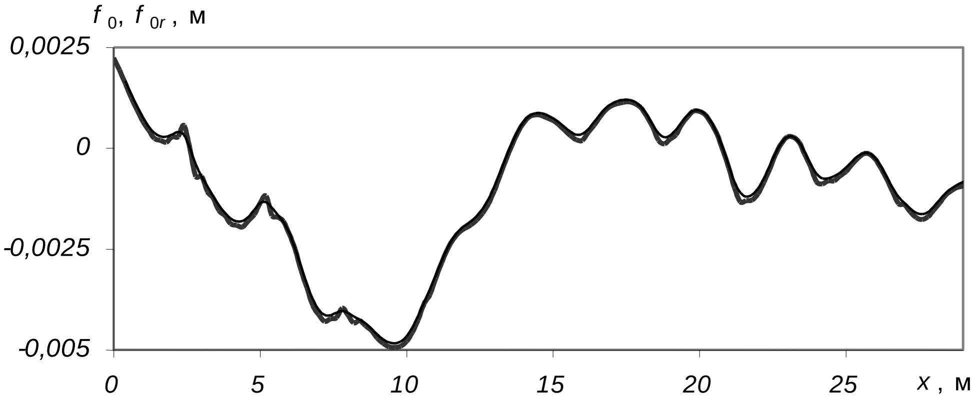

Рис. 4

Особенности применения алгоритма для функций различного вида. Описанный подход к определению постоянных интегрирования, основанный на удалении тренда с применением метода наименьших квадратов на всем интервале интегрирования, не является универсальным. Он позволяет получить с высокой степенью точности решение задачи интегрирования для стационарных функций (гармонических, полигармонических, случайных), которые описывают многие физические процессы. В то же время, при интегрировании нестационарных, в частности монотонных функций аппроксимация функции $F_0(x_i)$ заданным полиномом для всех x_i, $i=\overline{1,n}$ не позволяет получить приемлемые оценки его коэффициентов. Определение постоянных интегрирования для функций такого вида требует дополнительного применения некоторых специальных приемов.

Выводы. Предложен численный способ восстановления функции и ее низших производных по значениям высшей производной. Данный способ является инвариантным по отношению к начальным значениям и обеспечивает высокую степень точности при интегрировании стационарных функций, которые имеют широкое применение в технических приложениях.

Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы / *Р. Отнес, Л. Эноксон*. – М. : Мир, 1982. – 428 с.

Институт технической механики
НАН Украины и ГКА Украины,
Днепропетровск

Получено 03.07.13,
в окончательном варианте 03.0913