

Д. А. Левкин

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЭМБРИОНА

С помощью теории псевдодифференциальных операторов доказано существование и единственность решения уравнения теплопроводности для эмбриона. Используя метод разделенных переменных, решено уравнение теплопроводности для эмбриона.

Ключевые слова: теория псевдодифференциальных операторов, метод разделенных переменных.

Введение

Среди глобальных проблем важное место занимает продовольственная проблема. По данным Государственной службы статистики Украины, в 2011 г., по сравнению с 2010 г., снизилось употребление молока на 1,5 л, мяса всех видов — на 0,9 кг. По состоянию на 1 января 2012 г. в хозяйствах всех категорий поголовье крупного рогатого скота (КРС) сократилось по сравнению с 1 января 2011 г. на 68,6 тыс. гол., и составляло 4471,4 тыс. гол. За 2012 г. усредненная живая масса КРС реализованная на переработку по Украине уменьшилась на 3 кг и составляла 424 кг. На 1 января 2012 г. во всех категориях хозяйств поголовье коров сократилось против 2011 г. на 49 тыс. гол. (на 1,9 %) во всех регионах Украины за исключением Донецкой, Одесской и Ровненской областей, которые увеличили поголовье на 0,1 тыс. гол. (на 3,7 %). Поголовье коров мясной продуктивности на 1 января 2012 г. составляло 36,3 тыс. гол., что на 0,1 тыс. гол. меньше (на 1 %) чем на первое января 2011 г. [1].

Для повышения уровня продуктивности животных необходимо использовать качественные корма, новейшие разработки биотехнологий и генетические методы. Известные ученые (Л. Ф. Кучин, М. В. Зубец, S. M. Willadsen, A. I. Welch, и др.) в своих экспериментальных исследованиях по взаимодействию электромагнитного излучения доказали использование лазерных систем для решения задач взаимодействия электромагнитного излучения с биообъектом в медицине и биологии [2]. При использовании генетических методов для выращивания и кормления КРС прирост живой массы составляет 850 г. на сутки, что составляет 2,8 % от фактического прироста живой массы в сутки. Использование на 85 % показателей потенциальной продуктивности животных генетических методов, даст возможность довести уровень обеспеченности мяса на одного человека до 73 кг [1].

Основная часть

На сегодняшний день возможности получения преимплантационного материала таковы — это биопсия первого и второго полярного тельца, трофобластная биопсия эмбриона на стадии бластоцисты [2]. При построении математической модели лазерного воздействия на эмбрион следует учитывать многочисленные микровилли у большинства клеток млекопитающих [5], многослойную, нестационарную, нелинейную структуру эмбриона, различные толщины каждого слоя и различные коэффициенты теплопроводности каждого слоя эмбриона. Математическая модель уравнения теплопроводности с учетом многослойной структуры эмбриона имеет вид:

$$\rho_e c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \lambda_e \left(\frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right), \quad e = 1, \dots, 4. \quad (1)$$

Равенства (2) выражают условия идеального теплового контакта слоев:

$$T_{e-1} = T_e, \quad -\lambda_{e-1} \frac{\partial T_{e-1}}{\partial r} = -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (2)$$

$$T_e(r, 0) = T_0,$$

Граничные условия (3) относятся к одностороннему обогреву:

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r}(0, t) = q, \quad 0 \leq t \leq \tau_h, \quad (3)$$

τ_h — время действия лазерного источника на слое h , $h = 1, \dots, 4$, тепловой поток q , направленный от нагревателя к единице поверхности объекта, который рассчитывается по формуле:

$$q = \frac{T_4 - T_3}{\frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} + \sum_{e=1}^4 \frac{\delta_{0e}}{\lambda_e}}, \quad (4)$$

где α_3, α_4 — коэффициенты теплоотдачи на оболочке и питательной среде эмбриона; δ_{0e} — толщина e -го слоя эмбриона; T_3 — температура в конце нагрева на оболочке эмбриона; T_4 — температура в конце нагрева питательной среды эмбриона; ρ_e, c_e, λ_e — плотность, средняя удельная теплоемкость и теплопроводность e -го слоя.

Так как коэффициенты теплопроводности сред λ_e не отличаются значительно, то можем принять $\lambda = \max \lambda_e, e = 1, \dots, 4$ [4, 6]. Математическая модель уравнения теплопроводности с усредненными коэффициентами теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) = \frac{q(r,t)}{pc}, \quad (5)$$

где T — избыточная температура, t — время, r — расстояния от центра источника лазерного воздействия до точки, в которой рассчитывается температурное поле, $a = \lambda/pc$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, p, c — плотность и удельная теплоемкость соответственно, $q(r,t)$ — плотность источника лазерного воздействия

$$q(r,t) = \begin{cases} q_0, & \text{если } r \in [0, r_0], \quad t \in [0, h], \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

h — время воздействия источника и предположим что:

$$\begin{cases} T(r,t)|_{t=t_0} = 0, \\ T(r,t)|_{r=R} = 0, \end{cases}$$

без учета температуры питательной среды (37 °C) [4].

Применяя теорию псевдодифференциальных операторов, имеем, что решение данной задачи Коши (5) будет существовать и единственно [8]. Используя метод разделенных переменных [3, 7] получаем решение уравнения теплопроводности:

$$T_{\text{реш. у.}}(r,t) = -\frac{q_0}{6a} r^2 + \left(c_1 + \frac{c_2}{r} \right) e^{ct}, \quad (6)$$

где $c = \text{const}$, $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$.

Вывод

Доказана корректность задачи Коши (5) и решено уравнение теплопроводности для эмбриона.

Литература

1. Безуглий М. Д. Сучасний стан реформування аграрно-промислового комплексу [Текст] / М. Д. Безуглий, М. В. Присяжнюк. — К. : Аграр. наука, 2012. — 48 с.
2. Willadsen S. M. Attempts to produce monozygotic quadruplets in cattle by blastomere separation [Текст] / S. M. Willadsen, C. Polge // Veter. Rec. — 1981. — V. 108. — P. 211.
3. Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными [Текст] / И. Г. Петровский. — М. : Наука, 1986. — С. 418–426.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В. П. Михайлов. — М. : Наука, 1973. — С. 151–197.
5. Шигимага В. А. Математическое моделирование мембраны в связи с проводимостью клетки в различных растворах [Текст] / В. А. Шигимага, Д. А. Левкин, Ю. Е. Мегель // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. — № 4/4(58). — Харків, 2012. — С. 32–35.
6. Мегель Ю. Е. Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта [Текст] / Ю. Е. Мегель, Д. А. Левкин // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. — № 3/4(57). — Харків, 2012. — С. 4–8.
7. Левкин Д. А. Аналитическое решение уравнения теплопроводности для многослойного микробиологического объекта [Текст] / Д. А. Левкин // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. — № 4/4(58). — Харків, 2012. — С. 29–32.
8. Макаров А. А. Задача Коши для экспоненциально-корректных псевдодифференциальных операторов [Текст] / А. А. Макаров, Д. А. Левкин // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. — № 990. — Харків, 2012. — С. 42–47. — (Серія: Математика, прикладна математика і механіка ; вип. 64).

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЕМБРІОНА

Д. А. Левкін

За допомогою теорії псевдодиференціальних операторів доведено існування та єдність розв'язку рівняння теплопровідності для ембріона. Використовуючи метод відокремлених змінних, розв'язане рівняння теплопровідності для ембріона.

Ключові слова: теорія псевдодиференціальних операторів, метод відокремлених змінних.

Дмитро Артурович Левкін, аспірант кафедри кібернетики Харківського Національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (057) 716 42 63, e-mail: artur.lav@3g.ua.

INVESTIGATION OF THE HEAT EQUATION FOR EMBRYO

D. Levkin

By means of the theory of pseudodifferential operators it has been proved the existence and solution unicity of the equation of thermal conduction for an embryo. Using the method of separated variables the equation of thermal conduction for an embryo has been solved.

Keywords: The theory of pseudodifferential operators, the method of separated variables.

Dmitriy Levkin, aspirant graduate of Department of kibernetik, Kharkiv Vasilenko National Technical University of Agriculture, tel.: (057) 716 42 63, e-mail: artur.lav@3g.ua.