УДК 517.946.9

Д. М. Яковлева

КРАЙОВІ ТА НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛООБМІНУ

У статті розглянуті математичні моделі у вигляді крайової та нелокальної задачі для рівняння теплопровідності у рухомому осесиметричному середовищі з інтегральною умовою. Проведені чисельні експерименти за розв'язками задач. Зроблено порівняльний аналіз температурних розподілів.

Ключові слова: *математична модель, нелокальна задача, нелокальна інтегральна умова, температурний розподіл, різницева схема.*

1. Вступ

Для багатьох технологічних процесів у металургії характерною особливістю є те, що нагріванню піддається рухомий об'єкт. Для розробки надійно працюючих систем керування технологічними процесами рухомих та нерухомих виробів потрібні ґрунтовні дослідження температурних розподілів та процесів дифузії [1—2]. В останні 20—30 років у математичних моделях технологічних процесів почали використовуватись нелокальні задачі [3—4]. Математичні моделі на основі нелокальних задач дозволяють більш повно описувати фізичні процеси, зокрема процеси теплопровідності та термодифузії. Тому дослідження, про які йдеться в роботах [1—4] є актуальними.

2. Постановка проблеми

До сьогодні залишається актуальним створення узагальнених математичних моделей, що найбільш повно враховують основні закономірності процесів термодифузії, які відбуваються під час термічної обробки рухомих виробів з постійно діючими джерелами тепла. Актуальною є розробка чисельних методів розв'язку нелокальних та нелінійних крайових. Такого типу математичні моделі та методи розв'язку задач, відображених у моделях, до сьогодні були слабо досліджені.

3. Основна частина

3.1. Аналіз літературних джерел по темі дослідження. В роботі [1] у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності розглядаються концептуально нові та модифіковані математичні моделі, що описують температурні розподіли під час термічної обробки рухомого дроту, з постійно та періодично діючими внутрішніми джерелами тепла. Математична модель температурного поля з постійно діючими внутрішніми джерелами тепла в області $\Omega\times t=\{0<z<l\,,\ 0<r<r_0\,,\ 0<t\le t_0\}$ з границею $\partial\Omega$ має вигляд

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}-v(t)c\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t}=$$
$$=-\frac{I^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0{}^4}, \tag{1}$$

$$T(r,z,0)=T_0\,, \tag{2}$$

$$T(r,0,t)=T_0\,,\quad T(r,l,t)=T_l\,, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0\,,\ \ \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}=-\alpha(T-T_c)-\sigma\varepsilon(T^4-T_c^4). \tag{4}$$

Досліджується вплив нелінійної складової у граничних умовах задачі (1)—(4) на температурний розподіл.

В роботі [1] розглядається математична модель, що описує процес нагрівання дроту зовнішніми джерелами тепла. Основою такої моделі є нелінійна початково-крайова задача для однорідного рівняння теплопровідності з конвективними доданками.

Розв'язок отриманих у математичних моделях нелінійних задач знаходиться чисельним методом.

В роботі [3] обґрунтовується застосування у математичних моделях теплових процесів нелокальних задач та задач із нелокальною інтегральною умовою. У роботах [3, 4] доведені теореми існування єдиного розв'язку нелокальних задач, їх еквівалентність відповідним крайовим задачам.

Розглядається задача для нестаціонарного рівняння теплопровідності з нелокальною умовою, яка пов'язує шуканий розв'язок у внутрішніх точках області з умовами на її межі

$$\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0+}^{r_0}\int\limits_{0}^{l}\frac{I(t)^2\rho_0 l(1+\beta T(r,z,t))}{v(t)r_0^4\pi^2}dzdrdt=$$
$$=c\rho_n\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0+}^{r_0}\int\limits_{0}^{l}(T(r,z,t)-T_0)\,dzdrdt+$$
$$+\ r_0\alpha l\int\limits_{0+}^{t_0}\frac{1}{v(t)}\oint\!\!\oint\limits_{S}(T(r,z,t)-T_c)\,dsdt\,. \tag{5}$$

Розв'язок крайової задачі з нелокальною інтегральною умовою, знайдено чисельними методами.

3.2. Результати досліджень. Математичну модель розглянуто для тонкого в термічному відношенні дроту. Математична модель усередненого по радіусу температурного поля для стаціонарного процесу має вигляд [1, 2]. При цьому рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \upsilon\chi\frac{dT}{dz} + \theta T - hT^4 + \tau = 0, \quad 0 < z < l, \tag{6}$$

$$T(0) = T_0, \; T(l) = T_l, \tag{7}$$

де

$$\theta = (I^2 \cdot \rho_0 \cdot \beta - 2\pi^2 r_0^3 \alpha) \cdot (\pi^2 r_0^4 \lambda)^{-1},$$

$$h = 2\varepsilon\sigma \cdot (r_0\lambda)^{-1},$$

$$\tau = (I^2\rho_0 + 2\alpha T_c \pi^2 r_0^3 + 2\pi^2 r_0^3 T_c^4 \varepsilon\sigma) \cdot (\pi^2 r_0^4 \lambda)^{-1},$$

$$\chi = c\rho_n \lambda^{-1}.$$

В спрощених випадках задачі (6) — (7) отримано аналітичні розв'язки. Для знаходження розв'язку нелінійної задачі застосовано кінцево-різницеву схему

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i + O(h^2),$$

$$i = \overline{1, n-1};$$

$y_0 = y_a$, $i = 0$; $y_n = y_b$, $i = n$, котру представлено у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею та розв'язано з використанням методу прогонки.

Для дослідження та порівняння температурних розподілів у математичних моделях з локальними та нелокальною умовами у спрощену крайову задачу замість однієї із крайових умов уведено нелокальну інтегральну умову (5), що визначає баланс енергії зони нагрівання.

Якщо у задачі (6) — (7) замість однієї із крайових умов увести нелокальну інтегральну умову (5), то отримаємо нелокальну задачу [3, 4]. Це дозволить отримати більш точний температурний розподіл в зоні нагрівання.

На рис. 1 зображено температурні розподіли за розв'язками задач нелінійної (1) — (4), квазілінеаризованої та нелокальної (1—3) — (5).

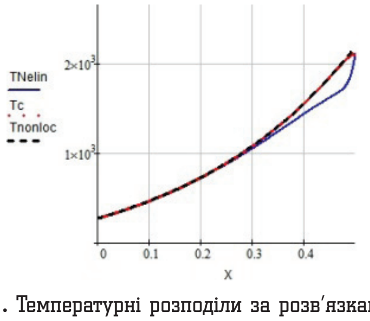

Рис. 1. Температурні розподіли за розв'язками задач

У рамках проведених досліджень було показано, що нелокальна задача враховує нелінійну складову і більш точно відображає фізичні особливості процесу нагрівання.

Література

1. Ляшенко В. П. Математичне моделювання процесів термодифузії у порошковій металургії [Текст] : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня док. техн. наук : спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / **В. П. Ляшенко**. — Харків, 2012. — 36 с.
2. Ляшенко В. П. Математична модель переносу речовини під час спікання порошкових матеріалів [Текст] / **В. П. Ляшенко** // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. — Кременчук : КДУ. — 2010. — Вип. № 5/2010(64), частина 1. — С. 58—64.
3. Ляшенко, В. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою [Текст] / **В. П. Ляшенко**, О. Б. Кобильська // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2010. — Вип. № 4. — С. 158—162.
4. Ляшенко В. П. Розв'язання однієї оберненої задачі Стефана [Текст] / **В. П. Ляшенко**, О. Б. Кобильська // Вісник Львівського національного університету імені І. Франка, серія «Прикладна математика та інформатика». — 2009. — Вип. № 15. — С. 251—257.

КРАЕВЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛООБМЕНА

Д. М. Яковлева

В статье рассмотрены математические модели в виде краевой и нелокальной задачи для уравнения теплопроводности в движущейся осесимметричной среде с интегральным условием. Проведены численные эксперименты по решениям задач. Выполнен сравнительный анализ температурных распределений.

Ключевые слова: математическая модель, нелокальная задача, нелокальное интегральное условие, температурное распределение, разностная схема.

***Дарья Михайловна Яковлева**, аспирант кафедры информатики и высшей математики Кременчугского национального университета имени Михаила Остроградского,*
***тел.: (068) 446-57-25, e-mail: Y_Dasha.89@mail.ru**.*

EDGES AND NONLOCAL PROBLEMS IN THE MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER

D. Yakovleva

The article the mathematical model in the form of marginal and nonlocal problem for the heat equation in a moving axisymmetric environment with an integral condition. Numerical experiments in problem solving. A comparative analysis of temperature distributions.

Keywords: mathematical model, nonlocal problem, nonlocal integral condition, the temperature distribution, the difference scheme.

***Darya Yakovleva**, graduate student of Department of Computer science and Higher mathematics, Kremenchug National University named after Mikhail Ostrogradskii,*
***tel.: (068) 446-57-25, e-mail: Y_Dasha.89@mail.ru**.*