Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 2012. — Article ID 375264. — 28 p.

16. Sipuˇs, Z. M. Hyperspherical curves in n-dimensional k-isotropic space Ikn [Text] / Z. M. Sipuˇs // Mathematical Communications. — 2001. — № 6. — P. 39–45.

17. Аушева, Н. М. Моделювання плоских сіток на основі дробово-раціональних ізотропних кривих [Текст] : матеріали конференції «Наукові підсумки 2013» / Н. М. Аушева // Технологічний аудит та резерви виробництва. — 2013. — № 4/6(14). — С. 41–43.

18. Ausheva, N. Modeling of minimal surfaces based on isotropic curves and quasiconformal change of parameter [Text] / N. Ausheva // Science and Education a New Dimension: Natural and Technical Sciences. — I(2), Issue 15. — Budapest, 2013. — P. 67–70.

РАЗРАБОТКА ОБОБЩЕННОГО ПОДХОДА К ФОРМИРОВАНИЮ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА НА ОСНОВЕ ИЗОТРОПНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В работе предложен обобщенный подход к моделированию объектов трехмерного действительного пространства, если задаются нулевые характеристики в мнимом пространстве. В качестве изотропных характеристик для моделирования кривых применяются изотропные отрезки, многоугольники, изотропная длина кривой, изотропные кривизна и кручение. Для отображения полученных объектов выполняется выделение действительной и мнимой части, после чего проводится исследование полученных абстракций.

Ключевые слова: изотропная кривая, изотропная кривизна, изотропное кручение, изотропная сетка, нулевые характеристики.

Аушева Наталія Миколаївна, *кандидат технічних наук, доцент, кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів та систем, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Україна,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com***.

Аушева Наталия Николаевна, *кандидат технических наук, доцент, кафедра автоматизации проектирования энергетических процессов и систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина.*

Ausheva Natalia, *National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com***

УДК 28.17.19

Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнаби

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА С ВОЗМУЩЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С помощью численного эксперимента исследованы основные эффекты возмущения правой части уравнений, характеризующие модель сосуществования двух видов при слабых периодических внешних воздействиях на численность и скорость их размножения. Исследована устойчивость численных решений при частотах воздействия, близких к частоте цикла невозмущенной автономной системы.

Ключевые слова: *модель Лотки-Вольтерра, проблемы устойчивости, фазовое пространство.*

1. Введение

В работе рассмотрена математическая модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник — жертва», называемая моделью Вольтерра-Лотки. Эта и более сложные модели были разработаны в начале XX века итальянским математиком В. Вольтерра, глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ — так называемой математической экологии [1].

За это время появилось несколько значительно более детальных моделей экосистем и биоценозов значительно большей размерности. Но, как видно из работ по динамике систем за последние два десятилетия, новые, часто неожиданные, эффекты проявляются и в таких, сравнительно простых моделях как уравнения Лотки-Вольтерра. Помимо экологии, результаты конкурентного взаимодействия субъектов в ограниченной области имеют очевидное применение в макроэкономике, психологии и в исследовании операций, например, в теории дифференциальных игр. Настоящее исследование показывает, что неустойчивая, часто — хаотическая динамика систем является ситуацией общего положения, а не редким явлением как считалось ранее.

2. Постановка проблемы

В настоящей работе содержится исследование механизмов развития неустойчивости в модели сосуществования двух достаточно многочисленных видов в замкнутом ареале и результаты их численного анализа.

Объектом исследования является процесс динамики сосуществования видов «жертв» и «хищников» в среде их обитания при периодическом внешнем воздействии; предметом исследования — модели Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью.

Цель работы — проведение численных экспериментов для исследования устойчивости периодических процессов в эволюционных моделях.

3. Анализ литературных данных

Эффекты неустойчивости движений в детерминированных нелинейных системах, еще совсем недавно не привлекавшие интереса в рамках традиционных стереотипов классической механики и теории колебаний, сейчас уже представляется как научно обоснованное явление фундаментальной и практической значимости. Об этом свидетельствует увеличивающийся поток научной информации в виде научных статей [2], в частности, в работе [3] приведено теоретическое обоснование результатов расчета по рассмотренной ниже модели. В докладах [4, 5] показаны возможные сценарии перехода к хаотическому движению в таких экологических системах через бифуркации. Модель Лотки-Вольтерра и ее обобщения широко используются, например, в работах по биологии [6, 7], по экологии [8, 9] и экономике. В работе [10], в частности, показано, что после незначительной модификации трофической функции, модель адекватно описывает взаимоотношение секторов производства и поставок.

Теория предсказывает, что при наличии определенных типов внешних воздействий со стороны среды на такую систему, ее устойчивость может нарушаться, и движения приобретают квазислучайный вид [11, 12]. Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных автором в [13].

4. Математическое описание и модель объекта

В работе рассматривается в малом ареале (остров) экосистема из двух видов:

1) «жертвы» — в отсутствии хищников могут размножаться неограниченно;
2) «хищники» — размножение ограничено численностью жертв.

Численность тех и других достаточно велика, и меняется гладко во времени.

Первоначальная автономная система (1) возбуждается малым по амплитуде периодическим колебанием размножения одного или обоих видов этой экосистемы.

Базовая модель Лотки-Вольтерра имеет вид:

$$\begin{aligned} dx/dt &= rx - \gamma_1 xy, \\ dy/dt &= -sy + \gamma_2 xy, \end{aligned} \quad (1)$$

где r, s, γ_1, γ_2 — положительные константы — мальтузианские и трофические коэффициенты, соответственно; x — число особей жертв; y — число особей хищников; $x,\ y \gg 1$.

Проблема состоит в исследовании поведения системы, характеризующейся близостью периода T циклов невозмущенной системы (1) и периода возмущения $(1/\Omega)$ неавтономной правой части, где Ω — бифуркационный параметр всех частных моделей, полученных из базовой (1).

Поведение моделей исследуется вдали от начала: $t \gg 0$.

Во всех случаях периодического возмущения базовой модели для численного решения задачи Коши типа (1, 2), соответствующие модели приводятся к форме:

$$Z' = f(Z, m, \Omega, t), \quad (2)$$

где $f(Z, m, \Omega, t) = F(Z) + P(m, \Omega, t)$, $Z^T = (x(t), y(t))$, при начальных условиях $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ для каждой траектории.

Здесь автономное слагаемое вектора правой части системы (2) для всех моделей одинаково и имеет вид:

$$F(Z) = \begin{pmatrix} -\gamma_1(x_* y + xy) \\ \gamma_2(xy_* + xy) \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемых моделей возмущающие слагаемые в (2) имеют вид:

$$P_1(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} m \cdot \sin^3 \Omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2(m, \Omega, t) = x \cdot P_1(m, \Omega, t).$$

В первой модели более гладким, чем исследованные в [13], колебаниям подвержена скорость изменения численности особей x, например, в следствии изменений природных условий.

Во второй модели периодическим колебаниям подвержена сама численность особей x. Это может быть вызвано охотой на «жертв» со стороны третьего субъекта деятельности экосистемы.

5. Численный анализ возмущенных моделей

5.1. Модель 1. Синусоидальное возмущение прироста «жертв» $P_1(m, \Omega, t)$. Приведены результаты работы MathCad-программы — график решения по точкам (рис. 1) для численности «жертв». Бифуркационный параметр — Ω мало отличается от частоты $1/T$ цикла в (2); r, s, g_0, g_1 — нормированные к 1 параметры из (1); при этом $T \approx 1$.

В полном соответствии с теорией, описанной в работах [3, 12], численное решение $x(t)$ показывает, что амплитуда колебаний меняется нерегулярно, с тенденцией к неограниченному увеличению с ростом t.

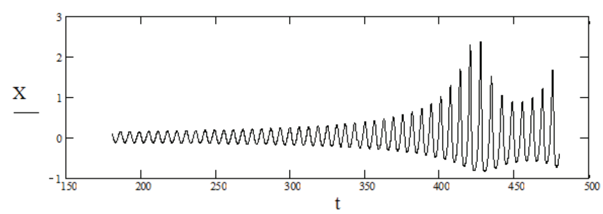

Рис. 1. Решение $X(t)$ для «жертв» в модели 1

5.2. Модель 2. Синусоидальное возмущение численности «жертв» с аналогичными параметрами: $P_2(m, \Omega, t)$. На графике (рис. 2) видна «перемежаемость», характерная для состояний вблизи странного аттрактора, и нелинейные искажения синусоиды. Одинаковые периодические возмущения прироста и численности демонстрируют разную динамику системы; фазовый портрет несимметричен, в отличие от модели 1.

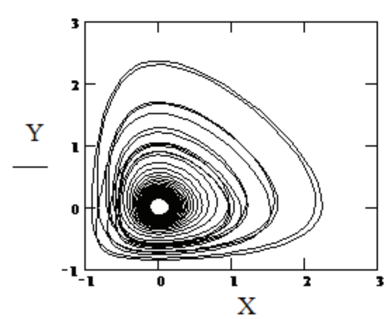

Рис. 2. Фазовый портрет «жертва» (X) — «хищник» (Y) для модели 2

Численный эксперимент показал, что и для этих моделей траектории, имеющие близкие начальные условия, со временем демонстрируют свойства «разбегания» и «перемешивания», характерные для странного аттрактора.

6. Выводы

Проведено исследование сосуществования двух биологических видов в замкнутой экосистеме с внешним возмущением популяций, которое моделируется малым по амплитуде синусоидальным возмущением правой части известной системы уравнений Лотки-Вольтерра. Качественная теория дифференциальных уравнений предсказывает неограниченные хаотические движения неавтономной системы вблизи периодического решения автономной при совпадении периодов. Численные эксперименты показывают, что:

1) фазовые портреты систем имеют вид 2-мерной проекции нерезонансного тора;

2) синусоидальное воздействие на популяцию, как путем изменения скорости размножения одного из видов, так и самой численности, приводит к непериодической динамике системы;

3) в работе определены параметры возмущений, приводящие вблизи «резонанса» $\Omega = 1/T$, как к непериодическому росту популяций (модель 1), так и к непериодическим движениям в конечной области (модель 2), или к стабилизации вблизи нуля.

Все это подтверждает, что даже достаточно простые модели экосистем выявляют их неустойчивость — чувствительность к малым внешним возмущениям. Помимо экологии, эти результаты найдут применение в макроэкономике при исследовании конкуренции субъектов экономической деятельности — фирм, компаний и государств.

Литература

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 288 с.
2. Jost, C. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose [Text] / C. Jost, G. Devulder, J. A. Vucetich, R. Peterson, R. Arditi // J. Anim. Ecol. — 2005. — № 74(5). — P. 809–816.
3. Мартынюк, А. А. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра [Текст] / А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина // Докл. АН Украины. — 1996. — № 4. — С. 1–7.
4. Hayashi, C. Bifurcations and the Generation of Chaotic States in the Solutions of Nonlinear Differential Equations [Text] / C. Hayashi, H. Kawakami // Теоретическая и прикладная механика. — 4-й Нац. конгр.; Варна, 1981. Докл. Кн. 1. — София, 1981. — С. 537–542.
5. Hoppensteadt, F. Predator-prey model [Text] / F. Hoppensteadt // Scholarpedia. — 2006. — № 1(10). — P. 1563.
6. Brauer, F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology [Text] / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. — Springer-Verlag, 2000. — 201 p.
7. Сорокин, П. А. Моделирование биологических популяций с использованием комплексных моделей, включающих в себя индивидуум-ориентированные и аналитические компоненты [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. А. Сорокин. — Долгопрудный, 2004.— 153 с.
8. Arditi, R. How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology [Text] / R. Arditi, L. R. Ginzburg. — Oxford University Press, 2012. — 112 p.
9. Гусятников, П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях хищник — жертва и популяции леммингов [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. П. Гусятников. — Москва, 2006. — 101 с.
10. Nasritdinov, G. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction [Text] / G. Nasritdinov, R. T. Dalimov // Current Research J. of Economic Theory. — 2010. — № 2(2). — С. 32–40.
11. Эрроусмит, Д. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями [Текст] / Д. К. Эрроусмит, К. М. Плейнс. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
12. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
13. Альджаафрех, М. Р. Неустойчивость динамического баланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части [Текст] / М. Р. Альджаафрех // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2014. — № 4/2(68). — С. 47–50.

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ У СИСТЕМАХ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА ЗІ ЗБУРЕННОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

За допомогою чисельного експерименту досліджено основні ефекти збудження правої частини рівнянь, що характеризують модель співіснування двох видів при слабких періодичних зовнішніх впливах на чисельність та швидкість їх розмноження. Досліджено стійкість чисельного розв'язку при частотах впливу, близьких до частоти циклу незбуреної автономної системи.

Ключові слова: модель Лотки-Вольтерра, проблеми стійкості, фазовий простір.

Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнаби, *аспирант, кафедра прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина,*
***e-mail: mohammadrakan1987@yahoo.com*.**

Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнабі, *аспірант, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.*

Alja'afreh Mohammad Rakan Abed Alnabi, *Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine,*
e-mail: mohammadrakan1987@yahoo.com